,

Unit 999
Offener Sandkasten

Wir betrachten infinite Folgen natürlicher Zahlen

$$\underline{\mathbf{a}} = \langle 0; a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots \rangle = \langle 0; a_i \rangle_{i=1}^{\infty} \qquad (1)$$

z.B.

$$a_i = i \qquad (2)$$

$$a_i = i^k \; ; k \in \mathbb{N} \qquad (3)$$

$$a_i = p_i^k \quad p_1=2, p_2=3, p_3=5, p_4=7, p_5=11, \ldots$$
Primzahlfolge (4)

und **insbesondere XXXXXXXXXXXXXX**

$\underline{\mathbf{a}}$ = <0;1,5,7,11,13,17,19,23,25,29,31,35,

$\underline{\mathbf{s(a)}}$ = <4,2,4, 2, 4, 2, 4 2, 4, 2, 4, 2,
37,41,43,47,49,53,55,59,61,65,67,
4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4,
71,73,77,79,83,85,89,91,95,97,101,
2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2,
103,107,109,113,115,119,121,125,127,…>
4, 2, 4, 2, 4, 2, 4 2, 4,…>

(5.1)

mehr:

$\underline{\mathbf{a}}$ = <0; 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 55, 59,
61, 65, 67, 71, 73, 77, 79, 83, 85, 89, 91, 95, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 115,
119, 121, 125, 127, 131, 133, 137, 139, 143, 145, 149, 151, 155, 157, 161, 163,
167, 169, 173, 175, 179, 181, 185, 187, 191, 193, 197, 199, 203, 205, 209, 211,
215, 217, 221, 223, 227, 229, 233, 235, 239, 241, 245, 247, 251, 253, 257, 259,
263, 265, 269, 271, 275, 277, 281, 283, 287, 289, 293, 295, 299, 301, 305, 307,
311, 313, 317, 319, 323, 325, 329, 331, 335, 337, 341, 343, 347, 349, 353, 355,
359, 361, 365, 367, 371, 373, 377, 379, 383, 385, 389, 391, 395, 397, 401, 403,

407, 409, 413, 415, 419, 421, 425, 427, 431, 433, 437, 439, 443, 445, 449, 451,
455, 457, 461, 463, 467, 469, 473, 475, 479, 481, 485, 487, 491, 493, 497, 499,
503, 505, 509, 511, 515, 517, 521, 523, 527, **529**, 533, 535, 539, 541, 545, 547,
551, 553, 557, 559, 563, 565, 569, 571, 575, 577, 581, 583, 587, 589, 593, 595,
599, 601, 605, 607, 611, 613, 617, 619, 623, **625**, 629, 631, 635, 637, 641, 643,
647, 649, 653, 655, 659, 661, 665, 667, 671, 673, 677, 679, 683, 685, 689, 691,
695, 697, 701, 703, 707, 709, 713, 715, 719, 721, 725, 727, 731, 733, 737, 739,
743, 745, 749, 751, 755, 757, 761, 763, 767, 769, 773, 775, 779, 781, 785, 787,
791, 793, 797, 799, 803, 805, 809, 811, 815, 817, 821, 823, 827, 829, 833, 835,
839, **841**, 845, 847, 851, 853, 857, 859, 863, 865, 869, 871, 875, 877, 881, 883,
887, 889, 893, 895, 899, 901, 905, 907, 911, 913, 917, 919, 923, 925, 929, 931,
935, 937, 941, 943, 947, 949, 953, 955, 959, **961**, 965, 967, 971, 973, 977, 979,
983, 985, 989, 991, 995, 997, 1001, 1003, 1007, 1009, 1013, 1015, 1019, 1021,
1025, 1027, 1031, 1033, 1037, 1039, 1043, 1045, 1049, 1051, 1055, 1057, 1061,
1063, 1067, 1069, 1073, 1075, 1079, 1081, 1085, 1087, 1091, 1093, 1097, 1099,
1103, 1105, 1109, 1111, 1115, 1117, 1121, 1123, 1127, 1129, 1133, 1135, 1139,
1141, 1145, 1147, 1151, 1153, 1157, 1159, 1163, 1165, 1169, 1171, 1175, 1177,
1181, 1183, 1187, 1189, 1193, 1195, 1199, 1201, 1205, 1207, 1211, 1213, 1217,
1219, 1223, **1225**, 1229, 1231, 1235, 1237, 1241, 1243, 1247, 1249, 1253, 1255,
1259, 1261, 1265, 1267, 1271, 1273, 1277, 1279, 1283, 1285, 1289, 1291, 1295,
1297, 1301, 1303, 1307, 1309, 1313, 1315, 1319, 1321, 1325, 1327, **1331**, 1333,
1337, 1339, 1343, 1345, 1349, 1351, 1355, 1357, 1361, 1363, 1367, **1369**, 1373,
1375, 1379, 1381, 1385, 1387, 1391, 1393, 1397, 1399, 1403, 1405, 1409, 1411,
1415, 1417, 1421, 1423, 1427, 1429, 1433, 1435, 1439, 1441, 1445, 1447, 1451,
1453, 1457, 1459, 1463, 1465, 1469, 1471, 1475, 1477, 1481, 1483, 1487, 1489,
1493, 1495, 1499, 1501, 1505, 1507, 1511, 1513, 1517, 1519, 1523, 1525, 1529,
1531, 1535, 1537, 1541, 1543, 1547, 1549, 1553, 1555, 1559, 1561, 1565, 1567,
1571, 1573, 1577, 1579, 1583, 1585, 1589, 1591, 1595, 1597, 1601, 1603, 1607,
1609, 1613, 1615, 1619, 1621, 1625, 1627, 1631, 1633, 1637, 1639, 1643, 1645,
1649, 1651, 1655, 1657, 1661, 1663, 1667, 1669, 1673, 1675, 1679, **1681**, 1685,
1687, 1691, 1693, 1697, 1699, 1703, 1705, 1709, 1711, 1715, 1717, 1721, 1723,
1727, 1729, 1733, 1735, 1739, 1741, 1745, 1747, 1751, 1753, 1757, 1759, 1763,
1765, 1769, 1771, 1775, 1777, 1781, 1783, 1787, 1789, 1793, 1795, 1799, 1801,
1805, 1807, 1811, 1813, 1817, 1819, 1823, 1825, 1829, 1831, 1835, 1837, 1841,
1843, 1847, **1849**, 1853, 1855, 1859, 1861, 1865, 1867, 1871, 1873, 1877, 1879,
1883, 1885, 1889, 1891, 1895, 1897, 1901, 1903, 1907, 1909, 1913, 1915, 1919,
1921, 1925, 1927, 1931, 1933, 1937, 1939, 1943, 1945, 1949, 1951, 1955, 1957,
1961, 1963, 1967, 1969, 1973, 1975, 1979, 1981, 1985, 1987, 1991, 1993, 1997,
1999, 2003, 2005, 2009, 2011, 2015, 2017, 2021, 2023, 2027, 2029, 2033, 2035,
2039, 2041, 2045, 2047, 2051, 2053, 2057, 2059, 2063, 2065, 2069, 2071, 2075,
2077, 2081, 2083, 2087, 2089, 2093, 2095, 2099, 2101, 2105, 2107, 2111, 2113,
2117, 2119, 2123, 2125, 2129, 2131, 2135, 2137, 2141, 2143, 2147, 2149, 2153,
2155, 2159, 2161, 2165, 2167, 2171, 2173, 2177, 2179, 2183, 2185, 2189, 2191,
2195, **2197**, 2201, 2203, 2207, **2209**, 2213, 2215, 2219, 2221, 2225, 2227, 2231,
2233, 2237, 2239, 2243, 2245, 2249, 2251, 2255, 2257, 2261, 2263, 2267, 2269,
2273, 2275, 2279, 2281, 2285, 2287, 2291, 2293, 2297, 2299, 2303, 2305, 2309,
2311, 2315, 2317, 2321, 2323, 2327, 2329, 2333, 2335, 2339, 2341, 2345, 2347,
2351, 2353, 2357, 2359, 2363, 2365, 2369, 2371, 2375, 2377, 2381, 2383, 2387,
2389, 2393, 2395, 2399, **2401**, 2405, 2407, 2411, 2413, 2417, 2419, 2423, 2425,
2429, 2431, 2435, 2437, 2441, 2443, 2447, 2449, 2453, 2455, 2459, 2461, 2465,
2467, 2471, 2473, 2477, 2479, 2483, 2485, 2489, 2491, 2495, 2497, 2501, 2503,
2507, 2509, 2513, 2515, 2519, 2521, 2525, 2527, 2531, 2533, 2537, 2539, 2543,
2545, 2549, 2551, 2555, 2557, 2561, 2563, 2567, 2569, 2573, 2575, 2579, 2581,
2585, 2587, 2591, 2593, 2597, 2599, 2603, 2605, 2609, 2611, 2615, 2617, 2621,
2623, 2627, 2629, 2633, 2635, 2639, 2641, 2645, 2647, 2651, 2653, 2657, 2659,
2663, 2665, 2669, 2671, 2675, 2677, 2681, 2683, 2687, 2689, 2693, 2695, 2699,
2701, 2705, 2707, 2711, 2713, 2717, 2719, 2723, 2725, 2729, 2731, 2735, 2737,
2741, 2743, 2747, 2749, 2753, 2755, 2759, 2761, 2765, 2767, 2771, 2773, 2777,
2779, 2783, 2785, 2789, 2791, 2795, 2797, 2801, 2803, 2807, **2809**, 2813, 2815,
2819, 2821, 2825, 2827, 2831, 2833, 2837, 2839, 2843, 2845, 2849, 2851, 2855,
2857, 2861, 2863, 2867, 2869, 2873, 2875, 2879, 2881, 2885, 2887, 2891, 2893,
2897, 2899, 2903, 2905, 2909, 2911, 2915, 2917, 2921, 2923, 2927, 2929, 2933,
2935, 2939, 2941, 2945, 2947, 2951, 2953, 2957, 2959, 2963, 2965, 2969, 2971,
2975, 2977, 2981, 2983, 2987, 2989, 2993, 2995, 2999, 3001, 3005, 3007, 3011,
3013, 3017, 3019, 3023, **3025**, 3029, 3031, 3035, 3037, 3041, 3043, 3047, 3049,
3053, 3055, 3059, 3061, 3065, 3067, 3071, 3073, 3077, 3079, 3083, 3085, 3089,
3091, 3095, 3097, 3101, 3103, 3107, 3109, 3113, 3115, 3119, 3121, 3125, 3127,
3131, 3133, 3137, 3139, 3143, 3145, 3149, 3151, 3155, 3157, 3161, 3163, 3167,
3169, 3173, 3175, 3179, 3181, 3185, 3187, 3191, 3193, 3197, 3199, 3203, 3205,
3209, 3211, 3215, 3217, 3221, 3223, 3227, 3229, 3233, 3235, 3239, 3241, 3245,
3247, 3251, 3253, 3257, 3259, 3263, 3265, 3269, 3271, 3275, 3277, 3281, 3283,
3287, 3289, 3293, 3295, 3299, 3301, 3305, 3307, 3311, 3313, 3317, 3319, 3323,
3325, 3329, 3331, 3335, 3337, 3341, 3343, 3347, 3349, 3353, 3355, 3359, 3361,
3365, 3367, 3371, 3373, 3377, 3379, 3383, 3385, 3389, 3391, 3395, 3397, 3401,

3403, 3407, 3409, 3413, 3415, 3419, 3421, 3425, 3427, 3431, 3433, 3437, 3439,
3443, 3445, 3449, 3451, 3455, 3457, 3461, 3463, 3467, 3469, 3473, 3475, 3479,
3481, 3485, 3487, 3491, 3493, 3497, 3499, 3503, 3505, 3509, 3511, 3515, 3517,
3521, 3523, 3527, 3529, 3533, 3535, 3539, 3541, 3545, 3547, 3551, 3553, 3557,
3559, 3563, 3565, 3569, 3571, 3575, 3577, 3581, 3583, 3587, 3589, 3593, 3595,
3599, 3601, 3605, 3607, 3611, 3613, 3617, 3619, 3623, 3625, 3629, 3631, 3635,
3637, 3641, 3643, 3647, 3649, 3653, 3655, 3659, 3661, 3665, 3667, 3671, 3673,
3677, 3679, 3683, 3685, 3689, 3691, 3695, 3697, 3701, 3703, 3707, 3709, 3713,
3715, 3719, **3721**, 3725, 3727, 3731, 3733, 3737, 3739, 3743, 3745, 3749, 3751,
3755, 3757, 3761, 3763, 3767, 3769, 3773, 3775, 3779, 3781, 3785, 3787, 3791,
3793, 3797, 3799, 3803, 3805, 3809, 3811, 3815, 3817, 3821, 3823, 3827, 3829,
3833, 3835, 3839, 3841, 3845, 3847, 3851, 3853, 3857, 3859, 3863, 3865, 3869,
3871, 3875, 3877, 3881, 3883, 3887, 3889, 3893, 3895, 3899, 3901, 3905, 3907,
3911, 3913, 3917, 3919, 3923, 3925, 3929, 3931, 3935, 3937, 3941, 3943, 3947,
3949, 3953, 3955, 3959, 3961, 3965, 3967, 3971, 3973, 3977, 3979, 3983, 3985,
3989, 3991, 3995, 3997, 4001, 4003, 4007, 4009, 4013, 4015, 4019, 4021, 4025,
4027, 4031, 4033, 4037, 4039, 4043, 4045, 4049, 4051, 4055, 4057, 4061, 4063,
4067, 4069, 4073, 4075, 4079, 4081, 4085, 4087, 4091, 4093, 4097, 4099, 4103,
4105, 4109, 4111, 4115, 4117, 4121, 4123, 4127, 4129, 4133, 4135, 4139, 4141,
4145, 4147, 4151, 4153, 4157, 4159, 4163, 4165, 4169, 4171, 4175, 4177, 4181,
4183, 4187, 4189, 4193, 4195, 4199, 4201, 4205, 4207, 4211, 4213, 4217, 4219,
4223, **4225**, 4229, 4231, 4235, 4237, 4241, 4243, 4247, 4249, 4253, 4255, 4259,
4261, 4265, 4267, 4271, 4273, 4277, 4279, 4283, 4285, 4289, 4291, 4295, 4297,
4301, 4303, 4307, 4309, 4313, 4315, 4319, 4321, 4325, 4327, 4331, 4333, 4337,
4339, 4343, 4345, 4349, 4351, 4355, 4357, 4361, 4363, 4367, 4369, 4373, 4375,
4379, 4381, 4385, 4387, 4391, 4393, 4397, 4399, 4403, 4405, 4409, 4411, 4415,
4417, 4421, 4423, 4427, 4429, 4433, 4435, 4439, 4441, 4445, 4447, 4451, 4453,
4457, 4459, 4463, 4465, 4469, 4471, 4475, 4477, 4481, 4483, 4487, **4489**, 4493,
4495, 4499, 4501, 4505, 4507, 4511, 4513, 4517, 4519, 4523, 4525, 4529, 4531,
4535, 4537, 4541, 4543, 4547, 4549, 4553, 4555, 4559, 4561, 4565, 4567, 4571,
4573, 4577, 4579, 4583, 4585, 4589, 4591, 4595, 4597, 4601, 4603, 4607, 4609,
4613, 4615, 4619, 4621, 4625, 4627, 4631, 4633, 4637, 4639, 4643, 4645, 4649,
4651, 4655, 4657, 4661, 4663, 4667, 4669, 4673, 4675, 4679, 4681, 4685, 4687,
4691, 4693, 4697, 4699, 4703, 4705, 4709, 4711, 4715, 4717, 4721, 4723, 4727,
4729, 4733, 4735, 4739, 4741, 4745, 4747, 4751, 4753, 4757, 4759, 4763, 4765,
4769, 4771, 4775, 4777, 4781, 4783, 4787, 4789, 4793, 4795, 4799, 4801, 4805,
4807, 4811, 4813, 4817, 4819, 4823, 4825, 4829, 4831, 4835, 4837, 4841, 4843,
4847, 4849, 4853, 4855, 4859, 4861, 4865, 4867, 4871, 4873, 4877, 4879, 4883,
4885, 4889, 4891, 4895, 4897, 4901, 4903, 4907, 4909, **4913**, 4915, 4919, 4921,
4925, 4927, 4931, 4933, 4937, 4939, 4943, 4945, 4949, 4951, 4955, 4957, 4961,
4963, 4967, 4969, 4973, 4975, 4979, 4981, 4985, 4987, 4991, 4993, 4997, 4999,
5003, 5005, 5009, 5011, 5015, 5017, 5021, 5023, 5027, 5029, 5033, 5035, 5039,
5041, 5045, 5047, 5051, 5053, 5057, 5059, 5063, 5065, 5069, 5071, 5075, 5077,
5081, 5083, 5087, 5089, 5093, 5095, 5099, 5101, 5105, 5107, 5111, 5113, 5117,
5119, 5123, 5125, 5129, 5131, 5135, 5137, 5141, 5143, 5147, 5149, 5153, 5155,
5159, 5161, 5165, 5167, 5171, 5173, 5177, 5179, 5183, 5185, 5189, 5191, 5195,
5197, 5201, 5203, 5207, 5209, 5213, 5215, 5219, 5221, 5225, 5227, 5231, 5233,
5237, 5239, 5243, 5245, 5249, 5251, 5255, 5257, 5261, 5263, 5267, 5269, 5273,
5275, 5279, 5281, 5285, 5287, 5291, 5293, 5297, 5299, 5303, 5305, 5309, 5311,
5315, 5317, 5321, 5323, 5327, **5329**, 5333, 5335, 5339, 5341, 5345, 5347, 5351,
5353, 5357, 5359, 5363, 5365, 5369, 5371, 5375, 5377, 5381, 5383, 5387, 5389,
5393, 5395, 5399, 5401, 5405, 5407, 5411, 5413, 5417, 5419, 5423, 5425, 5429,
5431, 5435, 5437, 5441, 5443, 5447, 5449, 5453, 5455, 5459, 5461, 5465, 5467,
5471, 5473, 5477, 5479, 5483, 5485, 5489, 5491, 5495, 5497, 5501, 5503, 5507,
5509, 5513, 5515, 5519, 5521, 5525, 5527, 5531, 5533, 5537, 5539, 5543, 5545,
5549, 5551, 5555, 5557, 5561, 5563, 5567, 5569, 5573, 5575, 5579, 5581, 5585,
5587, 5591, 5593, 5597, 5599, 5603, 5605, 5609, 5611, 5615, 5617, 5621, 5623,
5627, 5629, 5633, 5635, 5639, 5641, 5645, 5647, 5651, 5653, 5657, 5659, 5663,
5665, 5669, 5671, 5675, 5677, 5681, 5683, 5687, 5689, 5693, 5695, 5699, 5701,
5705, 5707, 5711, 5713, 5717, 5719, 5723, 5725, 5729, 5731, 5735, 5737, 5741,
5743, 5747, 5749, 5753, 5755, 5759, 5761, 5765, 5767, 5771, 5773, 5777, 5779,
5783, 5785, 5789, 5791, 5795, 5797, 5801, 5803, 5807, 5809, 5813, 5815, 5819,
5821, 5825, 5827, 5831, 5833, 5837, 5839, 5843, 5845, 5849, 5851, 5855, 5857,
5861, 5863, 5867, 5869, 5873, 5875, 5879, 5881, 5885, 5887, 5891, 5893, 5897,
5899, 5903, 5905, 5909, 5911, 5915, 5917, 5921, 5923, 5927, **5929**, 5933, 5935,
5939, 5941, 5945, 5947, 5951, 5953, 5957, 5959, 5963, 5965, 5969, 5971, 5975,
5977, 5981, 5983, 5987, 5989, 5993, 5995, …>

(5.2)

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Die Folge **a** wird gemäß Gl.(5.1) aus dem Startteil <0;1, und der geschachtelt aufgebauten Steuerfolge
s(a) = <(4,2)per> rekursiv generiert.
In der Folge **a** sind eingebettet
** **alle Primzahlen ≥ 5** (schwarz) in der natürlichen Reihenfolge,
** alle Semiprimzahlen mit Primfaktoren ≥ 5 (orange),
** die aufeinanderfolgenden Quadrate aller Primzahlen ≥ 5 (rot),
** aber auch Quadrate von Nichtprimzahlen (insbesondere von Primzahlquadraten und von Semiprimzahlen; dunkelrot)
** die aufeinanderfolgenden Kuben aller Primzahlen ≥ 5 (hellblau),
** dito n-te Potenzen, n=4,5,6,7,…
enthalten.

Probleme

1** Untersuchen Sie die zahlentheoretische Funktion $\pi_{a1}(n)$ – Anzahl der Primzahlen unter den ersten n Elementen von **a** :
Graph
Kurvendiskussion
Approximationsformel (vgl. [1,2])

2** Untersuchen Sie die zahlentheoretische Funktion $\pi_{a\infty}(n)$ – Anzahl der Primzahlen und aller Primzahlpotenzen unter den ersten n Elementen von **a** :
Graph
Kurvendiskussion
Approximationsformel.

3** Vergleich von $\pi_{a1}(n)$ und $\pi_{a\infty}(n)$ mit der

Primzahlfunktion π(n) [1,2].

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Mit der Filtergleichung

$$k! \mid \left(a_{\left(2\frac{k!}{3!}i+1\right)} - 1\right); \; k=3,4,5,\ldots$$

$$i=1,2,3,\ldots \qquad (6)$$

Beispiel 1

k=4, i=7 →

$24 \mid (((a_{57}=169=13^2)\text{-}1)=168), \; \frac{168}{24} = 7$

Beispiel 2

k=4, i=8 →

$24 \mid (((a_{65}=193)\text{-}1)=192), \; \frac{192}{24} = 8$

Beispiel 3

$24 \nmid (((a_{63}=187)\text{-}1)=186), \; \frac{186}{24} = 7.75$

wird die Folge **a** um den Faktor 8 reduziert (alle a_i, die Gl. (6) nicht erfüllen, werden entfernt); das Ergebnis ist die Teilfolge

$\mathbf{a}^* = <a_1 = a_1^2 = 1, \; a_9 = a_2^2 = 25, \; a_{17} = a_3^2 = 49,$
$a_{25} = 73, \; a_{33} = 97, \; a_{41} = a_4^2 = 121,$
$a_{49} = 145, \; a_{57} = a_5^2 = 169, \; a_{65} = 193,$
$a_{73} = 217, \; a_{81} = 241, \; a_{89} = 265,$
$a_{97} = a_6^2 = 289, \; a_{105} = 313, \; a_{113} = 337,$
$a_{121} = a_7^2 = 361, \; a_{129} = 385, \; a_{137} = 409,$
$a_{145} = 433, \; a_{153} = 457, \; a_{161} = 481, \; a_{169} = 505,$

$$a_{177} = a_8^2 = 529, \ldots> \qquad (7.1)$$

mit den Elementen

$$a_{8j+1} = 24j+1 = 3(8j+1)-2$$

$$j=0,1,2,3,4,\ldots , \qquad (7.2)$$

$\underline{\mathbf{a}}^*$ enthält für

jred.=0,1,2,5,7,12,15,22,26,35,40,51,57,
1 1 **3** 2 **5** 3 **7** 4 **9** 5 **11** 6 **13**
70,77,92,100,117,126,145,155,176,
7 **15** 8 **17** 9 **19** 10 **21** 11
187,210,222,247,260,287,301,330,
23 12 **25** 13 **27** 14 **29** 15
345,376,392,425,442,477,495,532,
31 16 **33** 17 **35** 18 **37** 19
551,590,610,651,672,715,737,782,
39 20 **41** 21 **43** 22 **45** 23
805,852,876,925,950,1001,1027,
47 24 **49** 25 **51** 26 **53**
1080,1107,1162,1190,1247,1276,
27 **55** 28 **57** 29 **59**
1335,1365,1426,1457,1520,1552,
30 **61** 31 **63** 32 **65**
1617,1650,1717,1751,1820,1855,…
33 **67** 34 **69** 35

(7.3)

eingebettet die aufeinanderfolgenden Quadrate aller Primzahlen ≥ 5 (rot).

Probleme

1** Untersuchen Sie die zahlentheoretische Funktion

$\pi_{a^*1}(n)$ – Anzahl der Primzahlquadrate unter den ersten n Elementen von $\underline{\mathbf{a}}^*$:

Graph

Kurvendiskussion

Approximationsformel

2** Vergleich von $\pi_{a1}(n)$, $\pi_{a\infty}(n)$, $\pi_{a^*1}(n)$ und $\pi(n)$.

3** Untersuchen Sie Möglichkeiten zur weiteren systematischen Reduktion von $\underline{\mathbf{a}}^*$ bzw. der Folge der jred. (systematisches Entfernen von schwarz/blau markierten Elementen in $\underline{\mathbf{a}}^*$ / der Folge der jred. mit geeigneten Filtergleichungen. Die jeweils rot markierten Elemente in $\underline{\mathbf{a}}^*$ / der Folge der jred sollen diese Filter unverändert passieren.

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Lateral 1

Die Indexfolge (vgl. [3])

jred.= <0,1,2,5,7,12,15,22,26,35,40,51,57,

s(jred.)=<**1** 1 **3** 2 **5** 3 **7** 4 **9** 5 **11** 6 **13**

70,77,92,100,117,126,145,155,176,

7 **15** 8 **17** 9 **19** 10 **21** 11

187,210,222,247,260,287,301,330,

23 12 **25** 13 **27** 14 **29** 15

345,376,392,425,442,477,495,532,

31 16 **33** 17 **35** 18 **37** 19

551,590,610,651,672,715,737,782,

39 20 **41** 21 **43** 22 **45** 23
805,852,876,925,950,1001,1027,
47 24 **49** 25 **51** 26 **53**
1080,1107,1162,1190,1247,1276,
27 **55** 28 **57** 29 **59**
1335,1365,1426,1457,1520,1552,
30 **61** 31 **63** 32 **65**
1617,1650,1717,1751,1820,1855,…>
33 **67** 34 **69** 35 …>

(8)

wird gemäß Gl.(8) aus dem Startteil <0;1, und der geschachtelt aus der Folge der ungeraden und der Folge der natürlichen Zahlen aufgebauten Basisfolge **s(jred.)** rekursiv generiert. Die rot markierten j-Werte erzeugen in **a*** eingebettet die aufeinanderfolgenden rot markierten Quadrate aller Primzahlen ≥ 5 .

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Lateral 2

Untersuchen Sie weitere,

analog zu den Gln (5), (7) und (8) mittels geschachtelter systematisch aufgebauter Basisfolgen

generierte infinite Folgen natürlicher Zahlen Gl. (1) bezüglich

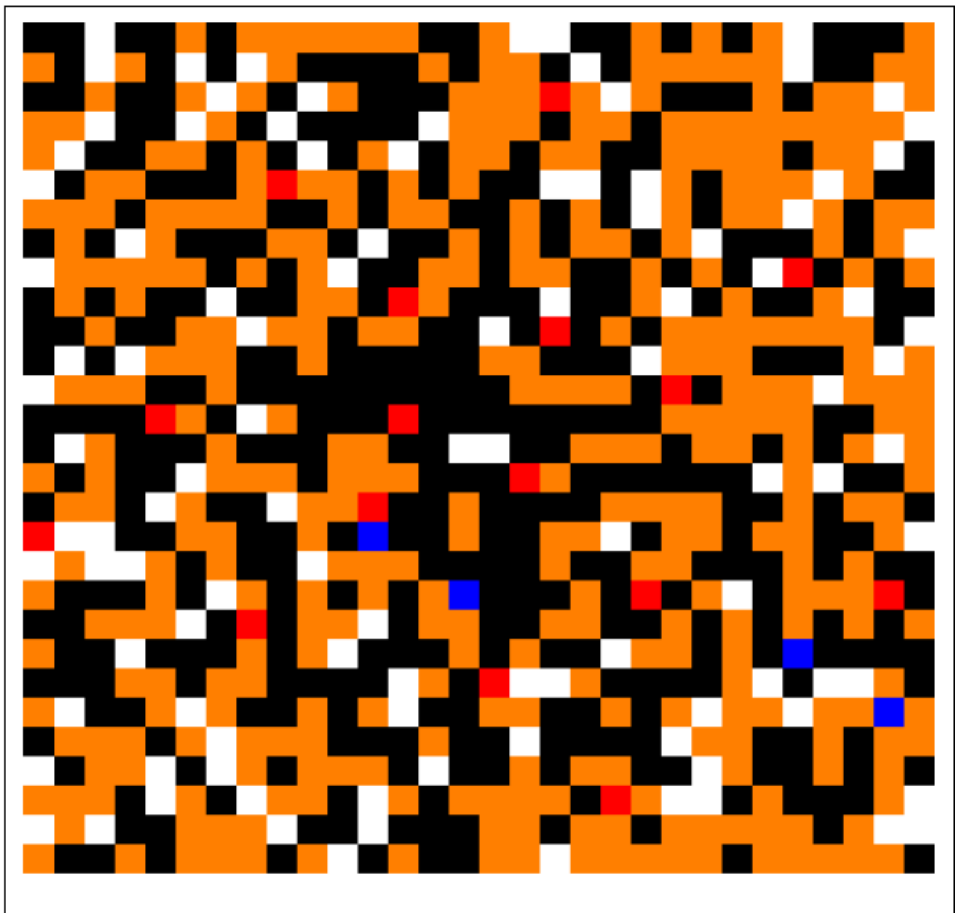
** Anwendungen,

** Interpretation als Kettenbruchelemente,

** Interpretation als Elemente von infinite

nested expressions [4],
** Interpretation als Elemente von systematisch aufgebauten Determinanten (vgl. Units 6, 7, 19, 20, aber auch [5]),
** Interpretation als Elemente von systematisch aufgebauten Matrix-Kettenprodukten (vgl. Unit 6)
** Darstellung als Ulam-Spirale (vgl. Ch 21, Unit 990, aber auch [6])
** Inputfolge für AsSis-Graphiken (vgl. Unit 3).

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxexcitinglikeanarchaeologicalexcacationxxxxxxxxxxxxxx



Ulam-Spirale von **a**Gl.(5)
Primzahlen schwarz, PZQuadrate rot,
PZKuben blau, Semiprimzahlen orange,

sonstige weiß.

Konstruieren Sie die Ulam-Spiralen von **s(a)**, **a*** , **jred.** und **s(jred.)**. Vergleich.

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

Weitere Beispiele zu Gl. (1)

** Summieren Sie für k=1,2,3,4,5,… und

a_i → Gln (2) bis (8) und mehr :

$$\varphi_1(k) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i^k} \qquad (9.1)$$

$$\varphi_1 (\text{für } a_i=i,\ k=2) = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \ [7] \qquad (9.1.1)$$

$$\varphi_2(k) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{a_i^k} \qquad (9.2)$$

$$\varphi_2 (\text{für } a_i=i,\ k=2) = \frac{1}{2}\zeta(2) = \frac{\pi^2}{12} \qquad (9.2.1)$$

$$\varphi_3(k) = [0; a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots] \qquad (9.3)$$

$$\varphi_3 (\text{für } a_i=i) = \frac{I_1(2)}{I_0(2)} = C_1 = 0.697774658\ldots$$

Continued fraction constant [8,9] (9.3.1)

$$\varphi_4(k) = [0, a_1^k, a_2^k, a_3^k, a_4^k, a_5^k, \ldots] \qquad (9.4)$$

$$\varphi_5(k) = \prod_{i=2}^{\infty} \frac{a_i^k}{a_i^k - 1} \qquad (9.5)$$

$$\varphi_5 (\text{für } a_i=i,\ k=2) = 2 \qquad (9.5.1)$$

$$\varphi_6(k) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{a_i^k + 1}{a_i^k} \qquad (9.6)$$

$$\varphi_6 \text{ (für } a_i=i,\ k=2) = \frac{\sinh(\pi)}{2\pi} \qquad (9.6.1)$$

$$\varphi_7 (k) = \prod_{i=2}^{\infty} \frac{a_i^k+1}{a_i^k-1} \qquad (9.7)$$

$$\varphi_7 \text{ (für } a_i=i,\ k=2) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \qquad (9.7.1)$$

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Besun: $$\prod_{i=2}^{\infty} \frac{i^3+1}{i^3-1} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{p_i^2+1}{p_i^2-1} = \frac{3}{2} \qquad (10)$$

** Interpretieren Sie diese Gleichung.
** Schreiben Sie eine Kurzgeschichte (vgl. (Unit15, part 78.4, S. 20-21), in der Gl. (10) kongenial kodiert ist.
** Untersuchen Sie mögliche Erweiterungen von Gl. (10), z.B.
** Vermutung:
Es existieren natürliche Zahlen m und n, so dass

$$\frac{\prod_{i=2}^{\infty} \frac{i^m+1}{i^m-1}}{\prod_{i=2}^{\infty} \frac{p_i^n+1}{p_i^n-1}} = \frac{a}{b}\ ;\ a,b\in\mathbb{N}\ ,\ ggt(a,b) = 1 \qquad (11)$$

Beispiel: m=3, n=2, a=b=1
Check more.
Im Positivfalle: Herleitung und Beweis.
** $\pi(i)$ – Primzahlfunktion := Anzahl der Primzahlen, die nicht größer als die natürliche Zahl i sind. →

ππ(i) := Anzahl der Primzahlen in **a**Gl.(5), die nicht größer als a_i sind.
Vergleichen Sie die Graphen von π(i) und ππ(i)..
Finden Sie eine Approximationsformel fuer ππ(i), analog zu $\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$ (vgl. [2,3]).

[2] http://mathworld.wolfram.com/PrimeNumberTheorem.html
[3] https://de.wikipedia.org/wiki/Primzahlsatz

** Untersuchen Sie die Häufigkeitsverteilung der letzten Ziffer ∈{1,3,5,7,9} in **a**Gl.(5) (vgl. Unit 11) und vergleichen Sie sie mit der Häufigkeitsverteilung der letzten Ziffer ∈ {1,3,7,9} in der Primzahlfolge (vgl. auch mit [ ])

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Die vorliegende Ulam-Spirale ist nicht das „Letzt-Errungene“. Betten Sie die a_i in die Ulam-Spirale der natürlichen Zahlen ein, also in die zugehörige Sequenz

1,2,3,4,**5**,6,**7**,8,9,10,**11**,12,**13**,14,15,16,**17**,18,**19**,20,21,22,**23**,24,**25**,26,27,28,**29**,30,**31**,32,33,34,**35**,36,**37**,38,39,40,**41**,42,**43**,44,45,46,**47**,48,**49**,50,51,52,**53**,54,**55**,56,57,58,**59**,60,**61**,62,63,64,**65**,66,**67**,68,69,…

Fett - a_i , **Fett** - a_i prime

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Erweiterung

Führen Sie eine analoge Analyse für Primzahlpolynome [10], insbesondere das Eulersche Primzahlpolynom $x^2 + x + 41$ [11] durch.

$x^2 + x + 41$ generiert für x=0(1)… die nicht alle **Primzahlen** enthaltende Folge

41,43,47,53,61,71,83,97,113,131,151,173,197,223,251,
281,313,347,383,421,461,503,547,593,641,691,743,
797,853,911,971,1033,1097,1163,1231,1301,1373,
1447,1523,1601,1681,1763,**1847,1933**,2021,**2111,2203**,
2297,2393,2491,**2591,2693,2797,2903,3011,3121**,
3233,**3347,3463,3581,3701,3823,3947,4073,4201**,4331,
4463,4597,4733,4871,5011,5153,5297,5443,5591,5741,
5893,**6047,6203,6361,6521**,6683,6847,**7013**,7181,**7351**,
7523,7697,**7873**,8051,**8231**,8413,**8597,8783,8971,9161**,
9353,**9547,9743,9941,10141**,…

Vermutung:

Bei den Primzahlen in dieser Folge treten

** die letzten Ziffern 1/3/7/9 im Verhältnis 2:2:1:0,

** nur Paare aufeinanderfolgender Primzahlen mit gleichen Endziffern 1, nicht aber 3 oder 7

auf (vgl. Unit 11 und [a]).

Erklärung? Beweis?

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Zusammenhang

** **a**Gl.(5) und

** von x^2+x+41 generierte Folge (**prime** – **rot**, **nonprime** - **blue**)

0, 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, 37, **41**, **43**, **47**, 49, 53, 55, 59, **61**, 65,
67, **71**, 73, 77, 79, **83**, 85, 89, 91, 95, **97**, 101, 103, 107, 109, **113**, 115, 119, 121,
125, 127, **131**, 133, 137, 139, 143, 145, 149, **151**, 155, 157, 161, 163, 167, 169, **173**,
175, 179, 181, 185, 187, 191, 193, **197**, 199, 203, 205, 209, 211, 215, 217, 221, 223,
227, 229, **233**, 235, 239, 241, 245, 247, **251**, 253, 257, 259, 263, 265, 269, 271, 275,

277, **281**, 283, 287, 289, 293, 295, 299, 301, 305, 307, 311, **313**, 317, 319, 323, 325,
329, 331, 335, 337, 341, 343, **347**, 349, 353, 355, 359, 361, 365, 367, 371, 373, 377,
379, **383**, 385, 389, 391, 395, 397, 401, 403, 407, 409, 413, 415, 419, **421**, 425, 427,
431, 433, 437, 439, 443, 445, 449, 451, 455, 457, **461**, 463, 467, 469, 473, 475, 479,
481, 485, 487, 491, 493, 497, 499, **503**, 505, 509, 511, 515, 517, 521, 523, 527, 529,
533, 535, 539, 541, 545, **547**, 551, 553, 557, 559, 563, 565, 569, 571, 575, 577, 581,
583, 587, 589, **593**, 595, 599, 601, 605, 607, 611, 613, 617, 619, 623, 625, 629, 631,
635, 637, **641**, 643, 647, 649, 653, 655, 659, 661, 665, 667, 671, 673, 677, 679, 683,
685, 689, **691**, 695, 697, 701, 703, 707, 709, 713, 715, 719, 721, 725, 727, 731, 733,
737, 739, **743**, 745, 749, 751, 755, 757, 761, 763, 767, 769, 773, 775, 779, 781, 785,
787, 791, 793, **797**, 799, 803, 805, 809, 811, 815, 817, 821, 823, 827, 829, 833, 835,
839, 841, 845, 847, 851, **853**, 857, 859, 863, 865, 869, 871, 875, 877, 881, 883, 887,
889, 893, 895, 899, 901, 905, 907, **911**, 913, 917, 919, 923, 925, 929, 931, 935, 937,
941, 943, 947, 949, 953, 955, 959, 961, 965, 967, **971**, 973, 977, 979, 983, 985, 989,
991, 995, 997, 1001, 1003, 1007, 1009, 1013, 1015, 1019, 1021, 1025, 1027, 1031,
1033, 1037, 1039, 1043, 1045, 1049, 1051, 1055, 1057, 1061, 1063, 1067, 1069, 1073,
1075, 1079, 1081, 1085, 1087, 1091, 1093, **1097**, 1099, 1103, 1105, 1109, 1111, 1115,
1117, 1121, 1123, 1127, 1129, 1133, 1135, 1139, 1141, 1145, 1147, 1151, 1153, 1157,
1159, **1163**, 1165, 1169, 1171, 1175, 1177, 1181, 1183, 1187, 1189, 1193, 1195, 1199,
1201, 1205, 1207, 1211, 1213, 1217, 1219, 1223, 1225, 1229, **1231**, 1235, 1237, 1241,
1243, 1247, 1249, 1253, 1255, 1259, 1261, 1265, 1267, 1271, 1273, 1277, 1279, 1283,
1285, 1289, 1291, 1295, 1297, **1301**, 1303, 1307, 1309, 1313, 1315, 1319, 1321, 1325,
1327, 1331, 1333, 1337, 1339, 1343, 1345, 1349, 1351, 1355, 1357, 1361, 1363, 1367,
1369, **1373**, 1375, 1379, 1381, 1385, 1387, 1391, 1393, 1397, 1399, 1403, 1405, 1409,
1411, 1415, 1417, 1421, 1423, 1427, 1429, 1433, 1435, 1439, 1441, 1445, **1447**, 1451,
1453, 1457, 1459, 1463, 1465, 1469, 1471, 1475, 1477, 1481, 1483, 1487, 1489, 1493,
1495, 1499, 1501, 1505, 1507, 1511, 1513, 1517, 1519, **1523**, 1525, 1529, 1531, 1535,
1537, 1541, 1543, 1547, 1549, 1553, 1555, 1559, 1561, 1565, 1567, 1571, 1573, 1577,
1579, 1583, 1585, 1589, 1591, 1595, 1597, **1601**, 1603, 1607, 1609, 1613, 1615, 1619,
1621, 1625, 1627, 1631, 1633, 1637, 1639, 1643, 1645, 1649, 1651, 1655, 1657, 1661,
1663, 1667, 1669, 1673, 1675, 1679, **1681**, 1685, 1687, 1691, 1693, 1697, 1699, 1703,
1705, 1709, 1711, 1715, 1717, 1721, 1723, 1727, 1729, 1733, 1735, 1739, 1741, 1745,
1747, 1751, 1753, 1757, 1759, 1763, 1765, 1769, 1771, 1775, 1777, 1781, 1783, 1787,
1789, 1793, 1795, 1799, 1801, 1805, 1807, 1811, 1813, 1817, 1819, 1823, 1825, 1829,
1831, 1835, 1837, 1841, 1843, 1847, 1849, 1853, 1855, 1859, 1861, 1865, 1867, 1871,
1873, 1877, 1879, 1883, 1885, 1889, 1891, 1895, 1897, 1901, 1903, 1907, 1909, 1913,
1915, 1919, 1921, 1925, 1927, 1931, 1933, 1937, 1939, 1943, 1945, 1949, 1951, 1955,
1957, 1961, 1963, 1967, 1969, 1973, 1975, 1979, 1981, 1985, 1987, 1991, 1993, 1997,
1999, 2003, 2005, 2009, 2011, 2015, 2017, 2021, 2023, 2027, 2029, 2033, 2035, 2039,
2041, 2045, 2047, 2051, 2053, 2057, 2059, 2063, 2065, 2069, 2071, 2075, 2077, 2081,
2083, 2087, 2089, 2093, 2095, 2099, 2101, 2105, 2107, 2111, 2113, 2117, 2119, 2123,
2125, 2129, 2131, 2135, 2137, 2141, 2143, 2147, 2149, 2153, 2155, 2159, 2161, 2165,
2167, 2171, 2173, 2177, 2179, 2183, 2185, 2189, 2191, 2195, 2197, 2201, 2203, 2207,
2209, 2213, 2215, 2219, 2221, 2225, 2227, 2231, 2233, 2237, 2239, 2243, 2245, 2249,
2251, 2255, 2257, 2261, 2263, 2267, 2269, 2273, 2275, 2279, 2281, 2285, 2287, 2291,
2293, 2297, 2299, 2303, 2305, 2309, 2311, 2315, 2317, 2321, 2323, 2327, 2329, 2333,
2335, 2339, 2341, 2345, 2347, 2351, 2353, 2357, 2359, 2363, 2365, 2369, 2371, 2375,
2377, 2381, 2383, 2387, 2389, 2393, 2395, 2399, 2401, 2405, 2407, 2411, 2413, 2417,
2419, 2423, 2425, 2429, 2431, 2435, 2437, 2441, 2443, 2447, 2449, 2453, 2455, 2459,
2461, 2465, 2467, 2471, 2473, 2477, 2479, 2483, 2485, 2489, 2491, 2495, 2497, 2501,
2503, 2507, 2509, 2513, 2515, 2519, 2521, 2525, 2527, 2531, 2533, 2537, 2539,
2543, 2545, 2549, 2551, 2555, 2557, 2561, 2563, 2567, 2569, 2573, 2575, 2579,
2581, 2585, 2587, 2591, 2593, 2597, 2599, 2603, 2605, 2609, 2611, 2615, 2617,
2621, 2623, 2627, 2629, 2633, 2635, 2639, 2641, 2645, 2647, 2651, 2653, 2657,
2659, 2663, 2665, 2669, 2671, 2675, 2677, 2681, 2683, 2687, 2689, 2693, 2695□

References

[1] http://mathworld.wolfram.com/PrimeNumberTheorem.html

[2] https://de.wikipedia.org/wiki/Primzahlsatz
https://en.wikipedia.org/wiki/Prime_number_theorem

[3] http://oeis.org/search?q=1%2C2%2C5%2C7%2C12%2C15%2C22%2C35%2C40%2C&language=ge

[4] E.P. Stoschek. Abenteuer Algorithmus. Teil 2
Dresden University Press 1997,
ISBN 3-931828-58-1

[5] B. Eynard. Zufallsmatrizen. Neue universelle Gesetze.
Spektrum der Wissenschaft Kompakt 06.19, S. 138-211

[6] https://www.spektrum.de/pdf/spektrum-kompakt-mathematisches-parkett/1686080?utm_source=SDW&utm_medium=BA&utm_content=news&utm_campaign=Inline-Ad

[7] https://de.wikipedia.org/wiki/Riemannsche_Zeta-Funktion

https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_zeta_function

[8] Weisstein, Eric W. "Continued Fraction Constants." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/ContinuedFractionConstants.html

[9] https://www.wolframalpha.com/input/?i=continued+fraction+constant

[10] Weisstein, Eric W. "Prime-Generating Polynomial." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/Prime-GeneratingPolynomial.html

[11] www.theissenonline.de › Mathematik › UlamsPrimzahlSpirale

[12] R.J. Lemke Oliver, Kannan Soundararajan. Unexpected biases in the distribution of consecutive primes. arXiv:1603.03720

17.03.2020 EPSalg DScalc