Unit 902

Aus der „Schülerinformatik`` vor 20 Jahren
Damaliges Modul 39

e = 2, 71828 18284 59045 23536 02874 71352 66249 77572 47093 69995
95749 66967 62772 40766 30353 54759 45713 82178 52516 64274
27466 39193 20030 59921 81741 35966 29043 57290 03342 95260
59563 07381 32328 62794 34907 63233 82988 07531 95251 01901 ...

Darstellung (und zugleich Berechnungsvorschrift) von e		als
$e = \boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \;;\; n \in \mathbb{N}}$	(1)	Grenzwert einer unendlichen Folge DACModul 1, DACModul 6
$e = \boxed{\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}}$	(2)	unendliche Reihe
$e = 1 + \frac{1}{1}\,(1 + \frac{1}{2}\,(1 + \frac{1}{3}\,(1 + \frac{1}{4}\,(1 + \ldots$	(3)	infinitely nested expression $\longrightarrow$ Spigot–Algorithmen [1], Abschn. 3
$e = 2 + \cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\ddots}}} = 2 + \frac{2\,\vert}{\vert\,2} + \frac{3\,\vert}{\vert\,3} + \frac{4\,\vert}{\vert\,4} + \ldots$	(4)	unendlicher Kettenbruch [1], Abschn. 3; DACModul 16
$\frac{e}{2} = \left(2^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{1}\right)^{\frac{1}{1}}\left(2^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\left(2^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{3\cdot4}{5\cdot7}\right)^{\frac{7}{4}}\left(2^{\frac{7}{2}}\cdot\frac{5\cdot6\cdot7\cdot8}{9\cdot11\cdot13\cdot15}\right)^{\frac{15}{8}}\ldots$ $\begin{pmatrix} a(n) & A(n) \\ b(n) & B(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} 2n & 2n+1 \\ 2n+1 & 2n+2 \end{pmatrix}$	(5)	unendliches Produkt [2]
$e = \lim_{n\to\infty}\frac{b(n)+B(n)}{a(n)+A(n)}$	(6)	unendliches Matrizenprodukt, vgl. [3], Abschn. 4
$e = \prod_{i=1}^{\infty}\frac{a_i+1}{a_i}$ mit $a_1 = 1\,;\; a_{i+1} = (i+1)(a_i+1)$	(7)	unendliches Produkt, Faktoren werden rekursiv berechnet [4]

39.1 "Ausloten" der numerischen Leistungsfähigkeit

der Folge < a_n > ; n = 1, 2, 3,... mit	dem Grenzwert
$a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$,	$\lim_{n\to\infty} a_n = e$

(8)

$\longrightarrow$ Wertetabelle der Folge < a_n > für $n = 2^t$:

n	a_n
2^0	2.0
2^1	2.25
2^2	2.44140625
2^3	2.56578451395

2^4	2.63792849737
2^5	2.67699012938
2^6	2.69734495257
2^7	2.70773901969
2^8	2.71299162425
2^9	2.71563200017
2^{10}	2.71695572947
2^{11}	2.71761848234

$\longrightarrow$ Schlechte Konvergenz!

1. Schritt (Versuch!) zur Konvergenzverbesserung:

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < e\,;\ \lim_{n\to\infty} a_n = e \tag{9}$$

$\longrightarrow$ Versuche eine bezüglich e zu $< a_n > \approx$„spiegelbildliche`` Folge $< b_n >$ zu konstruieren.

$\longrightarrow$ Ansatz: $b_n = a_{-n} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n}{n-1} \right)^n > e\,;\ \lim_{n\to\infty} b_n = e\,.$ (10)

$\longrightarrow$ Wertetabelle von $< a_n >$ und $< b_n >$ für $n = 2^t$:

n	a_n	b_n	$\frac{b_n - b_{2n}}{a_{2n} - a_n}$
2^0	2.0	∞	
2^1	2.25	4.0	
2^2	2.44140625	3.16049382716	
2^3	2.56578451395	2.91028536805	
2^4	2.63792849737	2.80840396558	
2^5	2.67699012938	2.76200908998	
2^6	2.69734495257	2.73982718149	
2^7	2.70773901969	2.72897673069	
2^8	2.71299162425	2.72361005442	1.010800133
2^9	2.71563200017	2.72094116209	1.00538555
2^{10}	2.71695572947	2.71961030378	1.00268916
2^{11}	2.71761848234	2.71894576866	

$\longrightarrow$ a_n und b_n konvergieren von unten bzw. von oben her schlecht gegen e, der Verlauf von a_n und b_n ist in etwa spiegelbildlich (und zwar umso besser, je größer n ist), der die Folgen verbindende Differenzenquotient konvergiert gegen den ganzzahligen Grenzwert 1:

$$\lim_{n\to\infty} = \frac{b_n - b_{2n}}{a_{2n} - a_n} = 1\,. \tag{11}$$

$\longrightarrow$ Konvergenzverbesserung ist also durch eine einfache Mittelwertbildung möglich:

- arithmetisches Mittel

$$a(a_n, b_n) = \tfrac{1}{2}(a_n + b_n)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\left(\frac{n+1}{n} \right)^n + \left(\frac{n}{n-1} \right)^n \right) \quad \text{„ sperriger`` Formelausdruck} \tag{12}$$

- geometrisches Mittel

$$g(a_n, b_n) =$$

$$\sqrt{a_n b_n}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^n}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}} \quad \text{„ kompakterer`` Formelausdruck} \tag{13}$$

⟶ Gewählt wird

$$c_n = g(a_n, b_n) = \sqrt{a_n b_n} = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}} \tag{14}$$

⟶ Wertetabelle der Folgen < a_n >, < b_n > und < c_n >für $n = 2^t$:

n	a_n	b_n	c_n
2^0	2.0	∞	∞
2^1	2.25	4.0	3.0
2^2	2.44140625	3.16049382716	2.77777777778
2^3	2.56578451395	2.91028536805	2.73261141191
2^4	2.63792849737	2.80840396558	2.72183189285
2^5	2.67699012938	2.76200908998	2.71916734886
2^6	2.69734495257	2.73982718149	2.71850308421
2^7	2.70773901969	2.72897673069	2.71833713463
2^8	2.71299162425	2.72361005442	2.71829565452
2^9	2.71563200017	2.72094116209	2.71828528494
2^{10}	2.71695572947	2.71961030378	2.71828269258
2^{11}	2.71761848234	2.71894576866	2.71828204449

⟶ c_n konvergiert verglichen mit a_n und $b_n$wesentlich besser gegen e.

Nichlineare Korrektur! ; so nicht wiederholbar, da $c_{-n} = c_n$.

Aufgabe 39.1.1

Untersuchen Sie die Leistungsfähigkeit anderer Mittelwertbildungen zur Konvergenzverbesserung, vgl. [5], Abschn. 2.1.

2. Schritt (Versuch!) zur weiteren Konvergenzverbesserung:

Start mit

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}} \; ; \; n \in \mathbb{N} , \tag{15}$$

⟶ „bereinigte`` Formeldarstellung

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{n} \; ; \; n \in \mathbb{N} , \tag{16}$$

⟶ mit $\boxed{n = 2^t}$ ⟶

$$e = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{2^{t+1}+1}{2^{t+1}-1}\right)^{2^t} \; ; \; t \in \mathbb{N} . \tag{17}$$

⟶ 39.2 Ausloten von

(18)

$y(t) = \left(\frac{2^{t+1}+1}{2^{t+1}-1} \right)^{2^t}$; $t = 0, 1, 2, \ldots$

$\longrightarrow$ Wertetabelle von $y(t)$

$dy(t) = \frac{y(t)-y(t+1)}{y(t+1)-y(t+2)}$ - Differenzenquotient von $y(t)$ (19)

t	$y(t)$	$dy(t)$	$y1(t) = \frac{4}{3}y(t+1) - \frac{1}{3}y(t)$	$dy1(t)$
0	3.0	4.9200	2.70370370370370	20.2885
1	2.7777777778	4.1900	2.71755595662301	16.8801
2	2.7326114119	4.0455	2.71823871982357	16.2106
3	2.7218318928	4.0113	2.71827916753477	16.0521
4	2.7191673489	4.0028	2.71828166266553	16.0130
5	2.7185030842	4.0007	2.71828181810496	16.0032
6	2.7183371346	4.0002	2.71828182781204	16.0008
7	2.7182956545	4.0000	2.71828182841861	16.0002
8	2.7182852849	4.0000	2.71828182845652	16.0000
9	2.7182826926	4.0000	2.71828182845889	16.0000
10	2.7182820445	4.0000	2.71828182845904	16.0000

t	$y2(t) = \frac{16}{15}y1(t+1) - \frac{1}{15}y1(t)$	$dy2(t)$
0	2.718479440150965904 1243	82.2488
1	2.718284237370273069 4390	67.7293
2	2.718281864048844990 0855	64.8918
3	2.718281829007582294 0376	64.2206
4	2.718281828467587036 8452	64.0550
5	2.718281828459178587 7759	64.0137
6	2.718281828459047318 5499	64.0137
7	2.718281828459045267 9084	64.0034
8	2.718281828459045235 8688	64.0008
9	2.718281828459045235 3682	64.0002
10	2.718281828459045235 3604	64.0001

$\longrightarrow$ Differenzenquotient konvergiert gegen natürliche Zahl $\longrightarrow$ lineare Korrektur; meist beliebig oft wiederholbar.

Aufgabe 39.1.2

Verifizieren Sie die Korrekturformeln $y1(t)$ und $y2(t)$ unter Benutzung von Methoden der Differenzenrechnung, vgl. [6]-[10] und DACModul 1.
Führen Sie weitere lineare Korrekturschritte aus: $y3(t)$, $y4(t)$, ...

Lösung Aufgabe 39.1.2

- $\frac{y(t)-y(t+1)}{y(t+1)-y(t+2)} \underset{t \gg 1}{\approx} 4 \longrightarrow \overset{!}{=} 4$ (20)

$\longrightarrow y(t+2) = -\frac{1}{4}y(t) + \frac{5}{4}y(t+1)$ (21)

genauerer Wert $y(t+2)$ aus $y(t)$ und Nachfolger $y(t+1)$berechenbar!

$$\longrightarrow\ y(t+3) = -\frac{1}{4}y(t+1) + \frac{5}{4}y(t+2)$$

$$= -\frac{1}{4}y(t+1) + \frac{5}{4}\left(-\frac{1}{4}y(t) + \frac{5}{4}y(t+1) \right)$$

$$= -\frac{5}{16}y(t) + \frac{21}{16}y(t+1) \tag{22}$$

noch genauere Näherung aus $y(t)$ und $y(t+1)$ berechenbar!

$$\longrightarrow\ y(t+4) = -\frac{5}{16}y(t+1) + \frac{21}{16}y(t+2)$$

$$= -\frac{5}{16}y(t+1) + \frac{21}{16}\left(-\frac{1}{4}y(t) + \frac{5}{4}y(t+1) \right)$$

$$= -\frac{21}{64}y(t) + \frac{85}{64}y(t+1) \tag{23}$$

$$\vdots$$

$$\longrightarrow y(t+\infty) = \underline{\underline{-\frac{1}{3}y(t) + \frac{4}{3}y(t+1) = y1(t)}} \tag{24}$$

$$y2(t) = -\frac{1}{15}y1(t) + \frac{16}{15}y1(t+1) \tag{25}$$

$$= -\frac{1}{15}\left(-\frac{1}{3}y(t) + \frac{4}{3}y(t+1) \right) + \frac{16}{15}\left(-\frac{1}{3}y(t+1) + \frac{4}{3}y(t+2) \right)$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{15}y(t) - \left(\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{15} + \frac{1}{3}\cdot\frac{16}{15} \right)y(t+1) + \frac{4}{3}\cdot\frac{16}{15}y(t+2)$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{15}y(t) - \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}y(t+1) + \frac{4}{3}\cdot\frac{16}{15}y(t+2) \tag{26}$$

$$y3(t) = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{63}y(t) + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{15}\cdot\frac{4}{3}y(t+1)$$
$$-\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{16}{15}y(t+2) + \frac{4}{3}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{64}{63}y(t+3) \tag{27}$$

$$y4(t) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{63}\cdot\frac{1}{255}y(t) - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{63}\cdot\frac{4}{3}y(t+1)$$
$$+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{15}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{16}{15}y(t+2) - \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{64}{63}y(t+3)$$
$$+\frac{4}{3}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{64}{63}\cdot\frac{256}{255}y(t+4) \tag{28}$$

$$\vdots$$

allgemein:

$$y(k+1)(t) = \frac{4^k}{4^k-1}yk(t+1) - \frac{1}{4^k-1}yk(t)\ ;\ \ k = 1, 2, 3,... \tag{29}$$

□

$\longrightarrow$Matrizendarstellung der beliebig oft wiederholten linearen Korrektur:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y0(t) \\ y1(t) \\ y2(t) \\ y3(t) \\ y4(t) \\ \vdots \end{pmatrix}}_{\vec{y}_{korr.}(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & +\frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 \\ +\frac{1}{3}\frac{1}{15} & -\frac{1}{3}\frac{4}{3} & +\frac{4}{3}\frac{16}{15} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3}\frac{1}{15}\frac{1}{63} & +\frac{1}{3}\frac{1}{15}\frac{4}{3} & -\frac{1}{3}\frac{4}{3}\frac{16}{15} & +\frac{4}{3}\frac{16}{15}\frac{64}{63} & 0 \\ +\frac{1}{3}\frac{1}{15}\frac{1}{63}\frac{1}{255} & -\frac{1}{3}\frac{1}{15}\frac{1}{63}\frac{4}{3} & +\frac{1}{3}\frac{1}{15}\frac{4}{3}\frac{16}{15} & -\frac{1}{3}\frac{4}{3}\frac{16}{15}\frac{64}{63} & +\frac{4}{3}\frac{16}{15}\frac{64}{63}\frac{256}{255} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t+1) \\ y(t+2) \\ y(t+3) \\ y(t+4) \\ \vdots \end{pmatrix}}_{\vec{y}(t)} \tag{30}$$

$$\underbrace{\text{korrigierte Werte}}_{\text{Korrekturmatrix } (\widehat{=} \text{ lineares Filter zur Rauschunterdrückung})}\ \text{Basiswerte}$$

$$\text{Korrekturgleichung } \vec{y}_{korr.}(t) = \underline{A}\,\vec{y}\,(t) \tag{31}$$

Die Korrekturmatrix $\underline{A}$ besitzt nachstehendes Bildungsgesetz

$$\underline{A} = (A_{ij})_{i=0,j=0} \tag{32}$$

$$A_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i-j}\left(\prod_{k=1}^{i-j}\frac{1}{4^k-1}\right)\left(\prod_{l=1}^{j}\frac{4^l}{4^l-1}\right) & i-j \geq 0 \\ \text{für} & \\ 0 & i-j < 0 \end{cases} . \tag{33}$$

Ihre Elemente A_{ij} haben folgende interessante Eigenschaften:

$$(\forall i)\sum_{j=0}^{\infty} A_{ij} = 1 \tag{34}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} A_{i0} = \lim_{i\to\infty} A_{ii}^{-1} \tag{35}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} A_{i0} = 1 - \tfrac{1}{3}\left(1 - \tfrac{1}{15}\left(1 - \tfrac{1}{63}\left(1 - \tfrac{1}{255}\left(1 - \ldots\right.\right.\right.\right. \tag{36}$$

$$= \tfrac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{15\cdot 63}\left(31 + \frac{1}{255\cdot 1023}\left(511 + \frac{1}{4095\cdot 16383}\left(8191 + \ldots\right.\right.\right.\right. \tag{37}$$

$$= \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{1\,|}{|\,2} + \frac{3\,|}{|\,14} + \frac{15\,|}{|\,62} + \frac{63\,|}{|\,254} + \frac{255\,|}{|\,1022} + \frac{1023\,|}{|\,4094} + \ldots \tag{38}$$

$$= 0.68853\ 75371\ 20339\ 71545\ 65143\ldots\ . \tag{39}$$

Aufgabe 39.1.3

Leiten Sie diese „ultimative`` lineare Korrekturgleichung her, vgl. DACModul 1 .

Lösung Aufgabe 39.1.3

$$y0(t) = y(t) \tag{40}$$

$$y1(t) = -\tfrac{1}{3}y(t) + \tfrac{4}{3}y(t+1) \tag{24}$$

$$y2(t) = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{15}y(t) - \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{4}{3}y(t+1) + \tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{16}{15}y(t+2) \tag{26}$$

$$y3(t) = -\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{15}\cdot\tfrac{1}{63}y(t) + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{15}\cdot\tfrac{4}{3}y(t+1) - \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{16}{15}y(t+2) + \tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{16}{15}\cdot\tfrac{64}{63}y(t+3) \tag{27}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} y0(t) \\ y1(t) \\ y2(t) \\ y3(t) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -\frac{1}{3} & +\frac{4}{3} & 0 & 0 & \cdots \\ +\frac{1}{3}\frac{1}{15} & -\frac{1}{3}\frac{4}{3} & +\frac{4}{3}\frac{16}{15} & 0 & \cdots \\ -\frac{1}{3}\frac{1}{15}\frac{1}{63} & +\frac{1}{3}\frac{1}{15}\frac{4}{3} & -\frac{1}{3}\frac{4}{3}\frac{16}{15} & +\frac{4}{3}\frac{16}{15}\frac{64}{63} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t+1) \\ y(t+2) \\ y(t+3) \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{41}$$

□

Aufgabe 39.1.4

Geben Sie Modelle zur Veranschaulichung der Korrekturgleichungen (38), (24), (26), (27), (28) an.

Lösung Aufgabe 39.1.4

- Balkenwaagenmodell (Archimedes) der linearen Korrekturgleichung

$$y1(t) = \frac{4}{3}y(t+1) - \frac{1}{3}y(t) \quad (24)$$

$$\longrightarrow \quad 3\,y1(t) + y(t) = 4\,y(t+1) \quad (42)$$

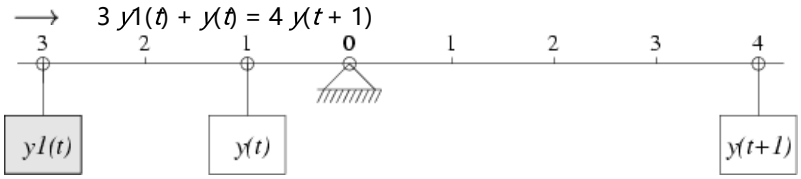


Bild 1: Balkenwaagenmodell

- In Analogie zu [5], Abschn. 2.3.2: „ Schaltbild-Modell`` in Form eines deterministischen Automaten (vgl. DACModul 3und 19)

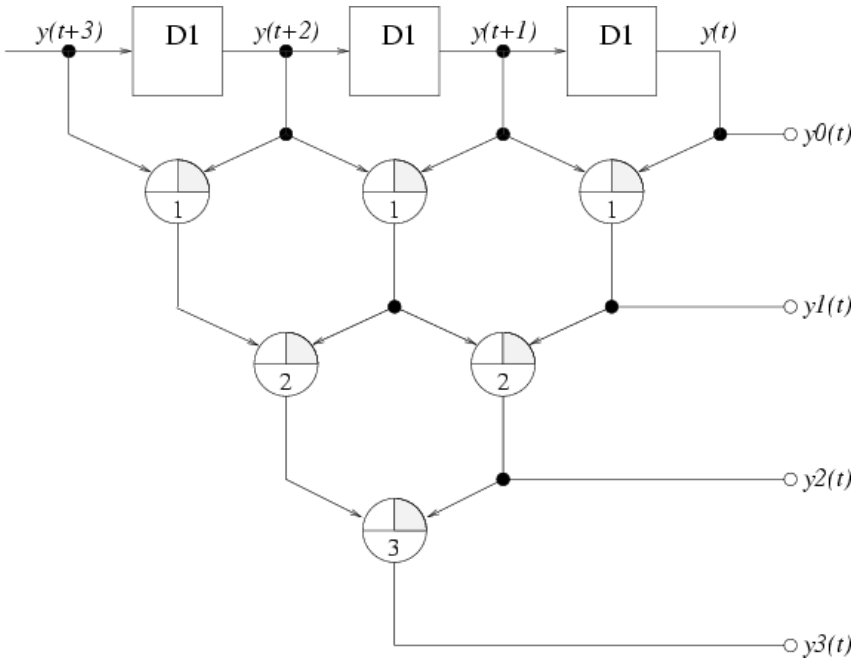


Bild 2: Lineares Korrekturmodell für $k = 1, 2, 3$

Dieser Automat besteht aus einer Schiebekette mit einem angeschalteten Netzwerk aus Verknüpfungselementen gemäß Bild 3. Die Basiswerte laufen sequentiell in die Schiebekette ein und stehen so an den Eingangsknoten des Netzwerkes zeitlich parallel zur Verfügung. Die korrigierten Werte der 1., 2., 3., ... Stufe sind, ebenfalls zeitlich parallel, an den Ausgangsknoten des Netzwerkes abgreifbar.

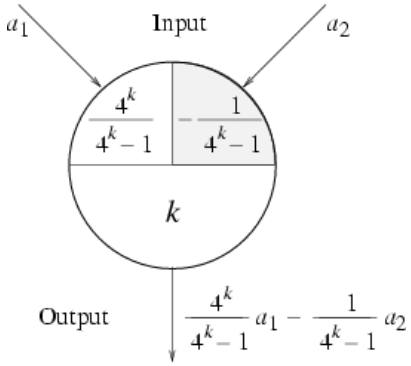


Bild 3: Verknüpfungselement des linearen Korrekturmodells Bild 2;
$a_1, a_2 \in \mathbb{R}$; $k = 1, 2, 3,...$

□

Anmerkung 1:
Die Korrekturgleichung (30) läßt sich wie folgt interpretieren: In $yk(t)$ erscheinen durch Korrektur mittels Gl. (30)

rechtsbündig gültige Stellen, die in den Basiswerten $y(t)$, $y(t+1)$, $y(t+2)$,..., $y(t+k)$ gemäß Gl. (17) nicht „ sichtbar``, wohl aber „potentiell enthalten`` sind, sie werden mittels Gl. (30) gewissermaßen aus den „ algorithmisch verrauschten`` unkorrigierten Basiswerten durch lineare Mittelung extrahiert (Trennung Signal-Rauschen durch lineares Filter).

Anmerkung 2:
Eine Folge konstanter Basiswerte

$$y(t) = y(t+1) = y(t+2) = \ldots \tag{43}$$

passiert das Filter unverändert, in diesem Falle ist

$$\vec{y}_{korr.}(t) = \vec{y}(t)\,. \tag{44}$$

Anmerkung 3:
Wenn

$$\vec{y}_{korr.}(t) = \underline{A}\,\vec{y}(t) \tag{30}$$

als Korrekturgleichung interpretiert wird, dann ist die formale Umkehrung

$$\vec{y}(t) = \underline{A}^{-1}\,\vec{y}_{korr.}(t) \tag{45}$$

als „Störungsgleichung`` interpretierbar. Für die Störungsmatrix $\underline{A}^{-1}$ hat man dann

$$\underline{A}^{-1} = \underline{B} = (B_{ij})_{i=0,j=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & \ldots \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{4}\frac{15}{16} & \frac{3}{4}\frac{15}{16} & 0 & \ldots \\ \frac{1}{64} & \frac{1}{16}\frac{63}{64} & \frac{1}{4}\frac{15}{16}\frac{63}{64} & \frac{3}{4}\frac{15}{16}\frac{63}{64} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{46}$$

$$B_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{4^{i-j}} \prod_{l=i-j+1}^{i} \frac{4^l-1}{4^l} & i-j \geq 0 \\ \text{für} & \\ 0 & i-j < 0 \end{cases}\,. \tag{47}$$

Es läßt sich damit in Analogie zu Bild 2 auch das zugehörige „ Störungsnetzwerk`` Bild 4 konstruieren:

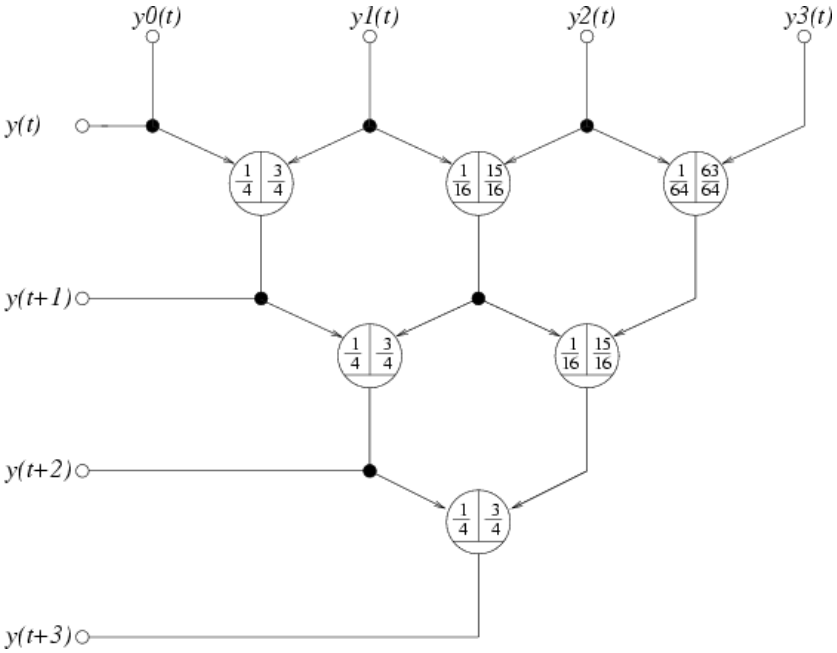


Bild 4: Störungsnetzwerk, $k = 1, 2, 3$

Aufgabe 39.1.5

Beschreiben Sie auf der Grundlage der Anmerkungen 1, 2 und 3 den hier vorliegenden „algorithmischen Störungsprozeß`` durch ein detailliertes Modell auf „ Bitebene`` (vgl. DACModul 24).

Aufgabe 39.1.6

Sind die Korrekturmatrix $\underline{A}$ bzw. die Störungsmatrix $\underline{B}$ „elementar`` oder weiter aufspaltbar (z.B. als Produkt darstellbar)?

Aufgabe 39.1.7

Sind die hier benutzte lineare Korrektur und die vorliegende *e*-Berechnung mittels der Basisgleichung (18) zu einem kompakten, gut konvergierenden Algorithmus zur *e*-Berechnung integrierbar?

Aufgabe 39.1.8

Zeigen Sie, daß die hier benutzte lineare Korrektur auch für nachstehenden Basisalgorithmus (A1) optimal ist (vgl. [5], S. 82).

$x := a \in \mathbb{R}_+ \,;\; y := b \in \mathbb{R}_+$
$x := \frac{1}{2}(x+y)$
$y := \sqrt{x\,y}$
$\lvert x-y\rvert \le \varepsilon$
$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\operatorname{arcosh}\left(\frac{a}{b}\right)} :\approx y$

(A1)

Aufgabe 39.1.9

Zeigen Sie, daß sich der eingangs beschriebene erste Schritt zur nichtlinearen Konvergenzverbesserung

$a_n \to b_n = a_{-n} \to c_n = \sqrt{a_n\,b_n} = \sqrt{a_n\,a_{-n}}$ mit $c_{-n} = c_n$ (48)

für

$n = 2^t \,;\; t = 0, 1, 2, \ldots$ (49)

in abgewandelter Form mit $a_n < e$ und $c_n > e$ weiterführen läßt.
Untersuchen Sie die dabei erzielbare Konvergenzverbesserung.

Lösung Aufgabe 39.1.9
Aus der Wertetabelle erhält man für den Differenzenquotienten von a_n und c_n bzgl. *e*

n	$a_n < e$	$b_n > e$	$c_n = \sqrt{a_n\,b_n} > e$	$\frac{e-a_n}{c_n-e}$
2^0	2.0	∞	∞	
2^1	2.25	4.0	3.0	
2^2	2.44140625	3.16049382716	2.77777777778	
2^3	2.56578451395	2.91028536805	2.73261141191	10.642131713913023
2^4	2.63792849737	2.80840396558	2.72183189285	22.634330632623397
2^5	2.67699012938	2.76200908998	2.71916734886	46.629867500454763
2^6	2.69734495257	2.73982718149	2.71850308421	94.627485850660803
2^7	2.70773901969	2.72897673069	2.71833713463	190.62625615699269
2^8	2.71299162425	2.72361005442	2.71829565452	382.62563141303137
2^9	2.71563200017	2.72094116209	2.71828528494	766.62531654352803
2^{10}	2.71695572947	2.71961030378	2.71828269258	1534.6251584814427
2^{11}	2.71761848234	2.71894576866	2.71828204449	3070.6250792931944

$$\frac{e-a_n}{c_n-e} \approx \tfrac{3}{2}\,(n-1)\,. \qquad (50)$$

Damit hat man für den hiermit korrigierten Wert (gewichtetes geometrisches Mittel)

$$d_n = c_n^{\frac{\frac{3}{2}(n-1)}{\frac{3}{2}(n-1)+1}} \cdot a_n^{\frac{1}{\frac{3}{2}(n-1)+1}} = c_n^{\frac{3n-3}{3n-1}} \cdot a_n^{\frac{2}{3n-1}}$$

$$= a_n^{\frac{1}{2}\cdot\frac{3n-3}{3n-1}} \cdot b_n^{\frac{1}{2}\cdot\frac{3n-3}{3n-1}} \cdot a_n^{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3n-1}} = a_n^{\frac{1}{2}\cdot\frac{3n+1}{3n-1}} \cdot b_n^{\frac{1}{2}\cdot\frac{3n-3}{3n-1}}$$

$$= c_n \left(\frac{a_n}{b_n} \right)^{\frac{1}{3n-1}} . \tag{51}$$

Die zugehörige Wertetabelle zeigt:

- d_n konvergiert verglichen mit c_n wesentlich besser gegen e.
- $d_n < e$.
- Der Differenzenquotient von d_n konvergiert gegen 8.
- Das „Spiegelbild`` von d_n bzgl. e

$$d_{-n} = c_n \left(\frac{a_n}{b_n} \right)^{\frac{1}{3n-1}} \tag{52}$$

konvergiert mit gleicher Annäherungsgüte von oben her gegen e.

Es liegt nun nahe, den Schritt (48) zu wiederholen:

$$d_n \to d_{-n} \to f_n \sqrt{d_n\, d_{-n}} \text{ mit } f_{-n} = f_n \tag{53}$$

(siehe folgende Tabelle).
Mit Gl. (51) und Gl. (52) erhält man dann die Konvergenzverbesserung

$$f_n = \sqrt{d_n\, d_{-n}} = c_n \left(\frac{a_n}{b_n} \right)^{\frac{3n}{9n^2-1}} . \tag{54}$$

Der Werteverlauf von f_n zeigt:

- f_n konvergiert verglichen mit d_n wesentlich besser gegen e, gegenüber c_n liefert f_n mehr als die doppelte Anzahl gültiger Stellen.
- $f_n < e$.
- Der Differenzenquotient von f_n konvergiert gegen 16.

Die nochmalige Wiederholung von (48) liefert schließlich eine weitere Konvergenzverbesserung mit

$$h_n = c_n \left(\frac{a_n}{b_n} \right)^{\frac{1}{9n^2-1}\left(3n - \frac{1}{900n^2-1}(30n)\right)} . \tag{55}$$

n	$c_n = \sqrt{a_n\, a_{-n}} > e$	$d_n = c_n \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{\frac{1}{3n-1}} < e$	$\frac{d_n - d_{n+1}}{d_{n+1} - d_{n+2}}$	$d_{-n} = c_n \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{\frac{1}{3n+1}} > e$	$\frac{d_{-n} - d_{-n+1}}{d_{-n+1} - d_{-n+2}}$	$f_n = \sqrt{d_n\, d_{n-1}} < e$	$\frac{f_n - f_{n+1}}{f_{n+1} - f_{n+2}}$
2^0	∞						
2^1	3.0	2.67390368695	9.093264	2.76327732209	9.360768	2.718223210039534	
2^2	2.77777777778	2.71334636563	8.280557	2.72316073618	8.248913	2.718249121499412	13.736135
2^3	2.73261141191	2.71768393676	8.079571	2.71887512802	8.048553	2.718279467139236	15.496706
2^4	2.72183189285	2.71820776274	8.024528	2.71835559191	8.007250	2.718281676322580	15.877745
2^5	2.71916734886	2.71827259613	8.008393	2.71829104166	7.999536	2.718281818880829	15.969654
2^6	2.71850308421	2.71828067553	8.003218	2.71828298019	7.998763	2.718281827859324	15.992427
2^7	2.71833713463	2.71828168440	8.001363	2.71828197245	7.999132	2.718281828421546	15.998108
2^8	2.71829565452	2.71828181045	8.000620	2.71828184646	7.999504	2.718281828456701	15.999527
2^9	2.71828528494	2.71828182621	8.000294	2.71828183071	7.999736	2.718281828458899	15.999882
2^10	2.71828269258	2.71828182818	8.000143	2.71828182874	7.999864	2.718281828459036	15.999970
2^{11}	2.71828204449	2.71828182842	8.000071	2.71828182849	7.999931	2.718281828459044	15.999993

Nachstehende Wertetabelle gibt einen vergleichenden Überblick über die bisher erhaltenen Ergebnisse.

n	c_n, Gl. (48)	f_n, Gl. (54)	h_n, Gl. (55)
2^1	3.0	2.718223210039534222	2.71896826581008920693688236
2^2	2.77777777778	2.718249121499411624	2.71829001783549004249251 38

2^3	2.73261141191	2.718279467139236098	2.71828194883188213910926 30
2^4	2.72183189285	2.718281676322580372	2.71828183031197515759134 71
2^5	2.71916734886	2.718281818880828954	2.71828182848788989610741 24
2^6	2.71850308421	2.718281827859323501	2.71828182845949551531108 02
2^7	2.71833713463	2.718281828421545724	2.71828182845905226935369 71
2^8	2.71829565452	2.718281828456701251	2.71828182845904534526006 56
2^9	2.71828528494	2.718281828458898732	2.71828182845904523707744 66
2^10	2.71828269258	2.718281828459036079	2.71828182845904523538711 80
2^{11}	2.71828204449	2.718281828459044663	2.71828182845904523536070 67
2^{12}	2.71828188247	2.718281828459045200	2.71828182845904523536029 40
2^{13}	2.71828184196	2.718281828459045233	2.71828182845904523536028 76
Diff.qu.	4	16	64
		Verdopplung der Anzahl der gültigen Stellen gegenüber c_n	Verdreifachung der Anzahl der gültigen Stellen gegenüber c_n

Führen Sie diese Untersuchung fort. □

Ausloten der numerischen Leistungsfähigkeit der unendlichen Reihe

$$e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \approx e_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \; ; \; i! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot i \tag{56}$$

Gesucht:

Möglichst effiziente Berechnung von e_n (Anzahl der arithmetischen Operationen $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $\frac{a}{b} \rightarrow$ Minimum!).

e_n - Berechnung „vorwärts``

$$e_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \quad \text{Reihe} \longrightarrow \tag{57}$$

$$\left.\begin{array}{l} e_n = e_{n-1} + \frac{1}{n!}; \; n = 1, 2, 3, \ldots ; \; e_0 = 1 \\ \frac{1}{n!} = \frac{\frac{1}{(n-1)!}}{n} \; ; \; ; n = 1, 2, 3, \ldots ; \; \frac{1}{0!} = 1 \end{array}\right\} \text{Rekursion vorwärts} \longrightarrow \tag{58}$$

$i := 0 \,;\; x := 1 \,;\; y := 1$
$i < n$
$i := i + 1$
$x := \frac{x}{i}$
$y := y + x$
$e_n := y$

(A2)

$\longrightarrow$ Wertetabelle:

i	x	y	$\frac{y_i - y_{i+1}}{y_{i+1} - y_{i+2}} = i + 2$
0	1	1	2

1	1	2	3
2	$\frac{1}{2}$ =0.5	2.5	4
3	$\frac{1}{6}$ = 0.1$\overline{6}$	2.$\overline{6}$	5
4	0.041$\overline{6}$	2.708$\overline{3}$	6
5	0.008$\overline{3}$	2.71$\overline{6}$	7
6	0.0013$\overline{8}$	2.7180$\overline{5}$	8
7	0.000198413	2.718253968	9
8	0.000024802	2.71827877	10
9	0.000002756	2.718281526	
10	0.000000276	2.718281802 = e_{10}	

Aufgabe 39.2.1

Untersuchen Sie, ob sich auf Grundlage des Differenzenquotienten

$$dy_i = \frac{y_i - y_{i+1}}{y_{i+1} - y_{i+2}} = i + 2 \qquad (59)$$

in Analogie zu Abschn. 39.1 für (A2) ein lineares Korrekturverfahren zur Konvergenzverbesserung konstruieren läßt.

Lösungshinweis Aufgabe 39.2.1

Ansatz 1

$$y_i \longrightarrow y(t)\ ,\quad dy_i \longrightarrow dy(t)\ . \qquad (60)$$

Mit

$$dy(t) = t + 2 \qquad (61)$$

erhält man einen verbesserten Werteverlauf für

$$y1(t) = \frac{t+2}{t+1} y(t+1) - \frac{1}{t+1} y(t)\ . \qquad (62)$$

Diese lineare Korrektur läßt sich, ähnlich wie in Abschn. 39.1 gezeigt, beliebig oft wiederholen:

$$dyk(t) \approx t + 3k + 2\ ;\ k = 1, 2, 3,... \longrightarrow \qquad (63)$$

$$y(k+1)(t) = \frac{t+3k+2}{t+3k+1} yk(t+1) - \frac{1}{t+3k+1} yk(t)\ ;\ k = 1, 2, 3,...; \qquad (64)$$

man erhält allerdings pro Korrekturstufe im Mittel nur einen Zuwachs von 3 gültigen Stellen.
Wie kann das gravierend verbessert werden? □

e_n - Berechnung „rückwärts``

$$e_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} \quad \text{Reihe} \longrightarrow \qquad (65)$$

$$= 1 + \frac{1}{1}\Bigg(1 + \frac{1}{2}\Bigg(1 + \frac{1}{3}\Bigg(1 + \ldots \frac{1}{n}\Big(\underbrace{1}_{e(n,n)=1}\Big)\cdots\Bigg)\Bigg)\Bigg) \quad \text{nested expression} \rightarrow \qquad (66)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{e(n,0)=e_n}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{e(n,1)}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{e(n,2)}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{e(n,n-1)}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{e(n,n)=1}$$

$e(n, i-1) = 1 + \frac{e(n,i)}{i}$; $i = n, n-1, \ldots, 1$; $e(n, n) = 1$ (67)

Rekursion rückwärts $\longrightarrow$

$i := n\,;\ x := 1$
$i > 0$
$x := 1 + \frac{x}{i}$
$i := i - 1$
$e_n := x$

(A3)

$\longrightarrow$ Wertetabelle:

i	x	$\frac{x_i - x_{i+1}}{x_{i+1} - x_{i+2}}$	$\longrightarrow$?
10	1	4.5	
9	1.1	1.230769256	
8	1.1 $\overline{2}$	0.798245576	
7	1.1402 $\overline{7}$		
6	1.162896825		
5	1.193816138		
4	1.238763228		
3	1.30960807	0.450353565	
2	1.436563602	0.281718199	
1	1.718282801		
0	2.718281801 = e_{10}		

Aufgabe 39.2.2

Vergleichen Sie die Algorithmen (A2) und (A3).

Aufgabe 39.2.3

Versuchen Sie die Algorithmen (A2) und (A3) so zu „ koppeln``, daß ein besser konvergierender Algorithmus zur Berechnung von e_n entsteht!

Aufgabe 39.2.4

Vergleichen Sie die Werteverläufe und Differenzenquotienten von

$e_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$ (56)

und

$e_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i + 1}{a_i}$ mit $a_1 = 1$, $a_{i+1} = (i+1)(a_i + 1)$. (68)

Diskutieren Sie die erhaltenen Ergebnisse.

Anmerkung 4:
Näherungsweise Berechnung von $g(x, y)$ mittels $a(x, y)$ und $h(x, y)$ (harmonisches Mittel):

Regel	Bedingung	Aktion	Verbundaktion
1		$(x, y) := (a, b)$	
2			stop

(A4)

	$\lvert x - y \rvert \leq \varepsilon$	$\sqrt{a\,b} := x$	
3		$(x, y) := \left(\frac{x+y}{2}, \frac{2\,x\,y}{x+y} \right)$	goto *r*2

Anmerkung 5:
Literatur zu *e*: [4], [7], [11] - [21]

Anmerkung 6:
Aus [5], Abschn. 2
Mit freundlicher Genehmigung des Verlages Dresden University Press.

1 Mittelwerte und Mittelwert-Algorithmen, historische Reflexionen

1.1 Babylon

Bereits die babylonischen (mesopothamischen) Mathematiker (ca. 2000 - 300 v. Chr.) befaßten sich mit dem Problemkreis Mittelwertbildung [1,2,3]. So fand die Bildung des arithmetischen Mittels bei der numerischen Berechnung von $\sqrt{2}$ Anwendung (vgl. [4], Baustein 2).

1.2 Griechenland

Basierend auf diesen Kenntnissen wurden von den Altpythagoräern (2. Hälfte des 6. Jh. bis Mitte des 5. Jh. v. Chr.) die Begriffe

arithmetisches Mittel $$\boxed{a(x,y) = \frac{x+y}{2}} \tag{1}$$

geometrisches Mittel $$\boxed{g(x,y) = \sqrt{x\,y}} \tag{2}$$

$$= (x \cdot y)^{\frac{1}{2}} = \exp\left(\frac{\ln x + \ln y}{2} \right)$$

$$= \exp\left(a(\ln x, \ln y) \right) \quad \text{und} \tag{3}$$

harmonisches Mittel $$\boxed{h(x,y) = \frac{2\,x\,y}{x+y}} \tag{4}$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}(x^{-1} + y^{-1}) \right)^{-1}$$

$$= \left(a(x^{-1}, y^{-1}) \right)^{-1} \tag{5}$$

$$= \frac{(g(x,y))^2}{a(x,y)} \tag{6}$$

in die griechische Mathematik eingeführt [1].

Aufgabe 1

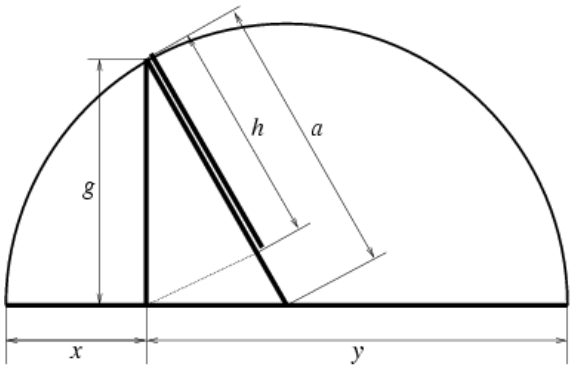
(a)
Geben Sie eine simultane Veranschaulichung von $a(x, y)$, $g(x, y)$und $h(x, y)$ an.

Lösung 1:

$a(x, y) = \frac{x+y}{2}$ - Radius eines Thaleskreises (1)

$(g(x, y))^2 = x \cdot y$ (7)

$$\frac{h(x,y)}{g(x,y)} = \frac{g(x,y)}{a(x,y)} \quad (8)$$



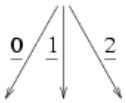


Bild 1: Simultane geometrische Veranschaulichung von $a(x, y) \geq g(x, y) \geq h(x, y)$

für $x < y$ nach Pappos von Alexandria (ca. 320 n. Chr.) [5]

Bild 1 besitzt folgende interessante Verallgemeinerung (Pappos-Leiter), die im Bild 2 dargestellt ist.

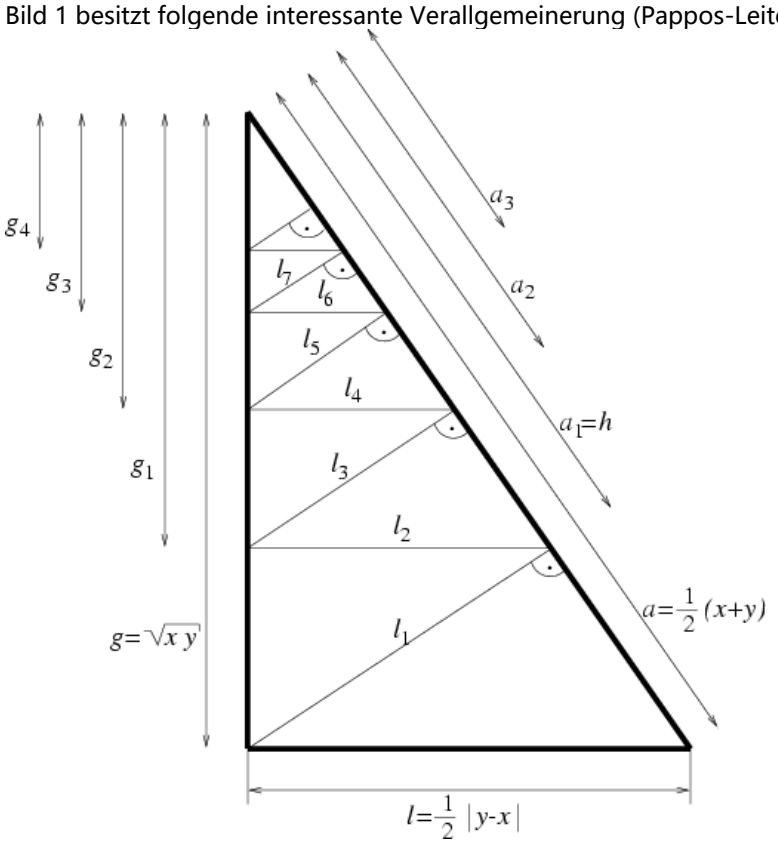


Bild 2: Pappos-Leiter

Hierbei hat man:

$$l_i = l \cdot \left(\frac{g}{a}\right)^i ;\ i = 1, 2, 3,... \quad (9)$$

$$a_i = a \cdot \left(\frac{g}{a}\right)^{2i} ;\ i = 1, 2, 3,... \quad (10)$$

$$g_i = g \cdot \left(\frac{g}{a}\right)^{2i} ;\ i = 1, 2, 3,... \quad (11)$$

Lösung 2:

$$\left.\begin{array}{l} a(x,y) \\ g(x,y) \\ h(x,y) \end{array}\right\} \text{ ist Lösung } z \text{ der Verhältnisgleichung } \quad \frac{z-x}{y-z} = \left\{\begin{array}{l} \frac{x}{x} = 1 \\ \frac{x}{z} \\ \frac{x}{y} \end{array}\right. . \tag{12}$$

Lösung 3:
$a(x, y)$, $g(x, y)$ und $h(x, y)$ sind Spezialfälle des quasiarithmetischen Mittels (arithmetisches Mittel bzgl. der Funktion $f(z)$ mit der Umkehrfunktion inv $f(z)$)

$$qa_f(x, y) = \text{inv } f\left(\frac{f(x)+f(y)}{2} \right), \tag{13}$$

vgl. Tabelle 1 [6,7].

$f(z)$	inv $f(z)$	$qa_f(x, y)$
z	z	$a(x, y)$
ln z	e^z	$g(x, y)$
z^{-1}	z^{-1}	$h(x, y)$
z^2	$z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{z}$	$\sqrt{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$
		quadratisches Mittel
z^p	$z^{\frac{1}{p}}$	$\sqrt[p]{\frac{1}{2}(x^p+y^p)}$
		p-tes Potenzmittel
z^p $p \to +\infty$ / $p \to -\infty$ z^p		max(x, y) / min(x, y)

Tabelle 1: Spezielle $qa_f(x, y)$

(b)
Loten Sie die in (a) betrachteten Lösungen weiter aus.

(c)
Zeigen Sie, daß alle in Tabelle 1 angegebenen Spezialfälle des $qa_f(x, y)$ auf Spezialfälle von

$$f(z) = z^p \tag{14}$$

zurückgeführt werden können (vgl. [7]). Erweitern Sie Tabelle 1 durch Hinzunahme weiterer charakteristischer Funktionen $f(z)$. □

Literatur | Aufgaben und Lösungen
Die Module

Literatur:

[1] E.P. Stoschek. *Abenteuer Algorithmus. Teil2.* Dresden 1997
[2] S. Finch. *Infinite Product Representations involving e.* http://www.mathsoft.com/asolve/constant/e/infprd.html
[3] E.P. Stoschek. *Abenteuer Algorithmus. Teil1.* Dresden 1996
[4] E.W. Weisstein. *e.* http://www.astro.virginia.edu/~eww6n/math/math.html
[5] E.P. Stoschek. *Abenteuer Algorithmus. Teil 3.* Dresden 1998

[6] A.O. Gelfond. *Differenzenrechnung.* Berlin 1958
[7] L. Brand. *Differential and Difference Equations.* New York 1992
[8] H. Levy, F. Lessman. *Finite Difference Equations.* New York 1996
[9] S.N. Elyadi. *An Introduction to Difference Equations.* New York 1996
[10] G. Fulford, P. Forrester, A. Jones. *Modelling with Differential and Difference Equations.* New York 1997
[11] E. Maor. *e: The Story of a Number.* Princeton 1993
[12] S. Finch. *Favorite Mathematical Constants.*http://www.mathsoft.com/asolve/constant/constant.html
[13] S. Finch. *Favorite Mathematical Constants.* http://www.mathsoft.com/asolve/constant/table.html
[14] S. Plouffe. *Tables of Constants.* http://www.cecm.sfu.ca/projects/ISC/Id.html
[15] S. Plouffe. *Welcome to Plouffe's Inverter.* http://www.lacim.uqam.ca/pi/
[16] S. Plouffe. *Plouffe's Inverter. Tables of Constants.* http://www.lacim.uqam.ca/pi/table.html
[17] S. Finch. *The Natural Logarithmic Base.* http://www.mathsoft.com/asolve/constant/e/e.html
[18] S. Finch. *Continued Fraction Representations involving e.* http://www.mathsoft.com/asolve/constant/e/cntfrc.html
[19] I. Peterson. *Hunting e.* http://www.maa.org/mathland/mathtrek_11_9_98.html
[20] *e=2.718281828... .* http://duke.usask.ca/~fowlerr/e.html
[21] H.J. Brothers, J.A. Knox. *New closed-form Approximations to the Logarithmic Constant e.* Mathematical Intelligencer 20(1998)4, 25-29