Unit n° 900

Feigenbaum-Automat

– Aus der „Schülerinformatik“ vor 20 Jahren -
Modul 24
Feigenbaum-Automat
Nichtlinearer deterministischer Automat, der für bestimmte Parameterbereiche Bifurkations- bzw. chaotisches Verhalten zeigt

Der Begriff "**deterministischer Automat**" (dA) ist entstanden als abstraktes Modell realer diskontinuierlich (zeitdiskret, getaktet) und determiniert arbeitender informationeller Systeme mit Eingabe-, Ausgabe-, Verknüpfungs- und Speicherelementen als Träger informationeller Prozesse.

Der dA ist zugleich aber auch ein Notierungssystem mit integrativem, konstruktivem und heuristischem Charakter für eine beträchtliche Anzahl von Algorithmen.

Die Einbettung von Algorithmen in das mathematische Modell dA ist ein nützliches Werkzeug für systematische Erweiterungen, Verallgemeinerungen, Kombinationen, ... von Algorithmen unter Einvernahme des theoretischen und ingenieurmäßig-pragmatischen Methodeninventars für die Analyse und Synthese von Automaten (Schaltbilddenken, Einfügen zusätzlicher Rückkopplungen, Zusammenschaltungen, Zustandskopplungen; vgl. [1], Abschn. 4 und [2], Abschn. 2.3). Vielfach ergibt sich dabei zwanglos die Hinzunahme eines zunächst nicht vorhandenen Schalt- ($x \in \{0,1\}$) bzw. Steuereingangs
($x \in R$) (Analogie: Diode $\rightarrow$ Transistor).
Ein dA wird durch nachstehendes Blockschema Bild 1 symbolisiert.

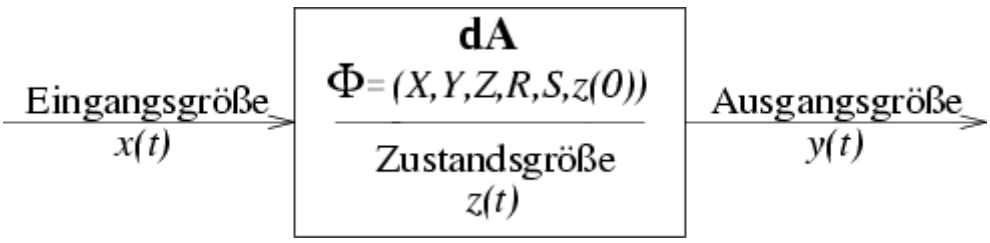


Bild 1: Blockschaltbild des dA Φ

Hierbei ist

$x \in X$ - Eingangsvariable ∈ Eingangsmenge/Eingabealphabet (1)

$y \in Y$ - Ausgangsvariable ∈ Ausgangsmenge/Ausgabealphabet (2)

$z \in Z$ - Zustandsvariable ∈ Zustandsmenge/internes Alphabet (3)

$t \in T = \mathbb{N}_0$ - Taktzeitpunkt ∈ {0,1,2,….} (4)

$R : X \times Z \rightarrow Y$ - (eindeutige)- Ergebnisabbildung, (5)

Elementnotation $y = r(x, z)$

$S : X \times Z \rightarrow Z$ - (eindeutige) Folgezustandsabbildung, (6)

Elementnotation $z' = s(x, z)$

$z(0) \in Z$ - Anfangszustand. (7)

Φ beschreibt die sequentielle, äquidistant getaktete und deterministische Umformung einer Eingangsfolge (eines Eingabewortes)

$$wx(t) = x(0), x(1), \ldots, x(t) \in X^* \tag{8}$$

in eine Ausgangsfolge (ein Ausgabewort)

$$wy(t) = y(0), y(1), \ldots, y(t) \in Y^*. \tag{9}$$

Dabei wird in jedem Taktzeitpunkt $\tau \in N_0$ (fester aber beliebiger Zeitwert) aus dem einlaufenden Eingangswert $x(\tau) \in X$ und dem im Zeitintervall $(\tau - 1, \tau]$ "im dA gespeicherten" Zustandswert $z(\tau) \in Z$

- der Ausgangswert $y(\tau) = r(x(\tau), z(\tau))$ gebildet und unmittelbar ausgegeben,

der neue Zustandswert $z(\tau + 1) = s(x(\tau), z(\tau))$ gebildet und der alte Zustandswert $z(\tau)$ mit $z(\tau + 1)$ "überschrieben". $z(\tau + 1)$ bleibt danach im Intervall $(\tau, \tau + 1]$ im dA gespeichert, Bild 2.

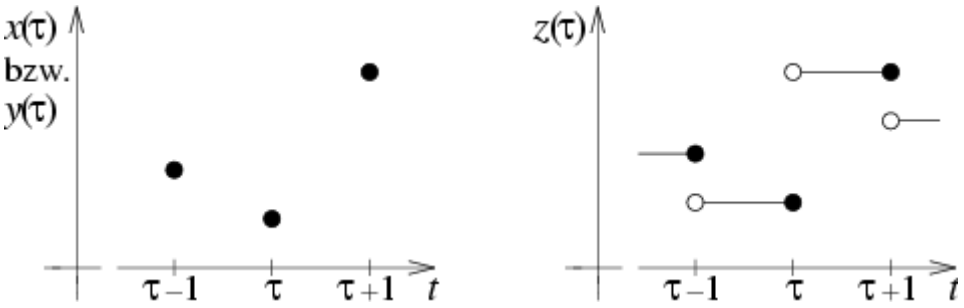


Bild 2: Arbeitsregime des dA Φ

Beispiel:

Verzögerungselement erster Ordnung (D1), Bild 3

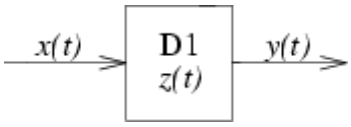


Bild 3: Verzögerungselement erster Ordnung

$X = Y = Z$ (10)

$y = r\,(x, z) = z$ (11)

$z' = s\,(x, z) = x$ (12)

Jeder Eingangswert $x(\tau)$ erscheint um einen Takt verzögert als $y(\tau + 1)$am Ausgang, er wird als Zustandswert $z(\tau)$ für einen Takt in D1 gespeichert, $x(\tau)$ und $y(\tau)$ sind dabei vollständig entkoppelt.

Die Einbettung der von M.J. Feigenbaum 1975 erstmalig numerisch ausschöpfend untersuchten logistischen Iterationsgleichung [3,4,5,6,7,8]

$$x_{i+1} = 4\,a\,x_i\,(1 - x_i) \tag{13}$$

mit

$$a,\ x_0 \in \mathbb{R}\,[0, 1] \tag{14}$$

in das mathematische Modell dA gemäß Tabelle 1 führt zu dem in Bild 4 dargestellten Feigenbaum-Automaten.

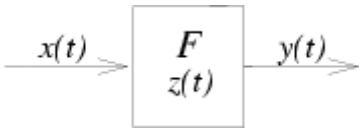


Bild 4: Feigenbaum-Automat

$$F = (X, Y, Z, R, S, z(0)) \tag{15}$$

mit

$$X = Y = Z = \mathbb{R}\,[0,1] \tag{16}$$

$$y = r(x,z) = \frac{z}{x} \tag{17}$$

$$z' = s(x,z) = x\,f(z) \tag{18}$$

$$f(z) = 4\,z\,(1-z)\,. \tag{19}$$

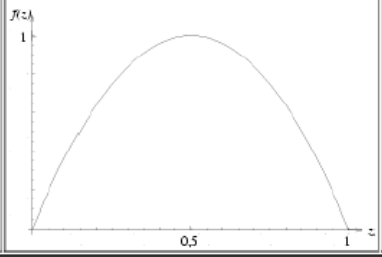
Logistische Iterationsgleichung	i	$a \in \mathbb{R}[0,1]$	$x_0 \in \mathbb{R}[0,1]$	$x_i \in \mathbb{R}[0,1]$	$x_{i+1} = 4\,a\,x_i\,(1-x_i)$	
dA	t	$x(t) \in \mathbb{R}[0,1]$	$z(0) \in \mathbb{R}[0,1]$	$z(t) \in \mathbb{R}[0,1]$	$z(t+1) = s(x(t), z(t))$ $= x(t)\,f(z(t))$ mit $f(z) = 4\,z\,(1-z)$ 	$y(t) = r(x(t), z(t))$ $= \frac{z(t)}{x(t)}$ $y(t) \in \mathbb{R}[0,1]$

Tabelle 1: Automateneinbettung der logistischen Iterationsgleichung

Bei konstanter Eingabe

$$x(t) = a \tag{20}$$

und der Initialisierung

$$z(0) \neq 0\,;\ 1 \tag{21}$$

zeigt der Feigenbaum-Automat folgendes Verhaltensmuster:

- **F**ür $0 \leq a \leq \frac{3}{4}$ wird
  - nach einem i.a. kurzen Einschwingvorgang, dessen Dauer von a und in geringem Maße auch von $z(0)$ abhängt
  - und bei $a = a_0 = \frac{1}{4}$ ein scharf ausgeprägtes lokales Maximum, bei $a = a_1 = \frac{3}{4}$ eine scharf ausgeprägte Polstelle (?) besitzt,
  - stationär ein konstanter Wert $y_{stat.}$ ausgegeben, der nur von a und nicht von $z(0)$ abhängt.
- **D**a im stationären Fall hier

$$y(t+1) = y(t) \tag{22}$$

- und wegen Gl. (17) und (20) auch

$$z(t+1) = z(t) \tag{23}$$

- ist, folgt aus den Gln. (18), (19) und (20) sofort eine Bestimmungsgleichung für $z(t)$ (im folgenden kurz mit z bezeichnet)

$$z^2 + \left(\frac{1}{4\,a} - 1\right)\ z = 0 \tag{24}$$

- und mit Gl. (17) auch für $y(t)$ (im folgenden kurz mit y bezeichnet)

$$y^2 + \frac{1}{a}\left(\frac{1}{4\,a} - 1\right)\ y = 0\,. \tag{25}$$

- Die quadratische Gleichung (25) besitzt die Lösungen

$$y_1 = 0\,;\ y_2 = \frac{1}{a} - \frac{1}{4\,a^2} = \frac{4\,a - 1}{4\,a^2}\,; \tag{26}$$

- davon wird y_2 im Intervall $0 \leq a \leq \frac{1}{4}$ (hier ist $y_2 \leq 0$) und y_2 im Intervall $\frac{1}{4} \leq a \leq \frac{3}{4}$ (hier ist $y_2 \geq 0$) durch F realisiert.
- **F**ür die stationäre Ausgabe erhält man damit

$$y_{stat.}(a) = \begin{cases} 0 & 0 \leq a \leq \frac{1}{4} \\ \text{für} & \\ \frac{1}{a} - \frac{1}{4a^2} & \frac{1}{4} \leq a \leq \frac{3}{4} \end{cases} . \tag{27}$$

- **A**us Gl. (27) folgt sofort: $y_{stat.}(a)$ besitzt
  - ein Maximum bei

$$a_{max} = m_0 = \frac{1}{2} \tag{28}$$

  - mit

$$y_{stat.}(m_0) = 1 , \tag{29}$$

  - einen Wendepunkt

$$a_{wp} = a_1 = \frac{3}{4} \tag{30}$$

  - mit

$$y_{stat.}(a_1) = \frac{8}{9} . \tag{31}$$

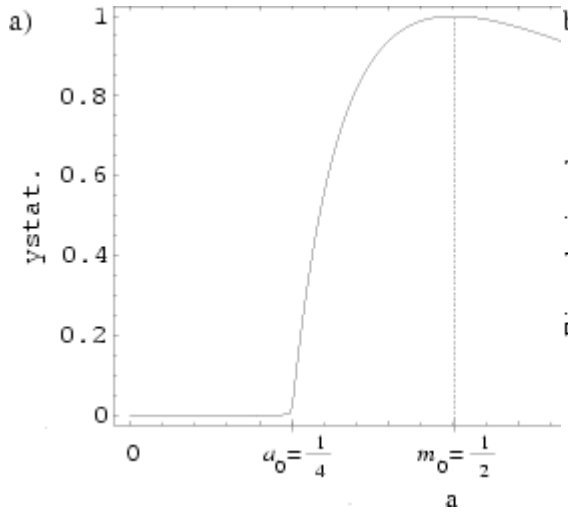
- **B**ild 5 zeigt den Verlauf von $y_{stat.}(a)$ gemäß Gl. (27), dazu ist der zugehörige experimentell ermittelte Verlauf der Einschwingdauer[1] in Abhängigkeit von a dargestellt.

---

[1] Einschwingdauer: Taktnummer, bei der

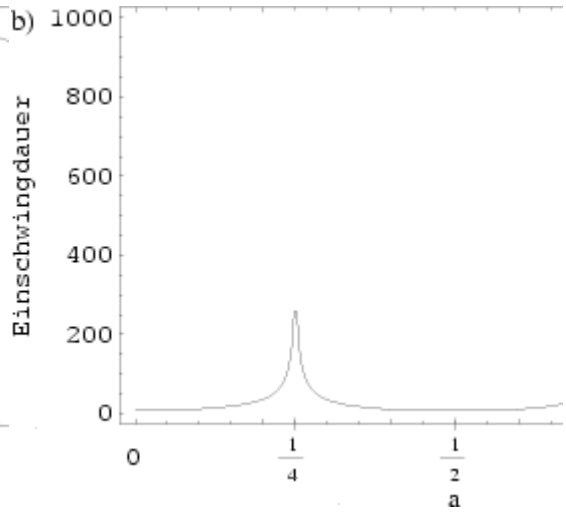
$$y_0(t,a) = (1-10^{-k})\, y_0(\infty,a) = (1-10^{-k})\, y_{stat.0}(a)$$

erstmalig ist.
Hier wurde $k = 5$ gewählt.

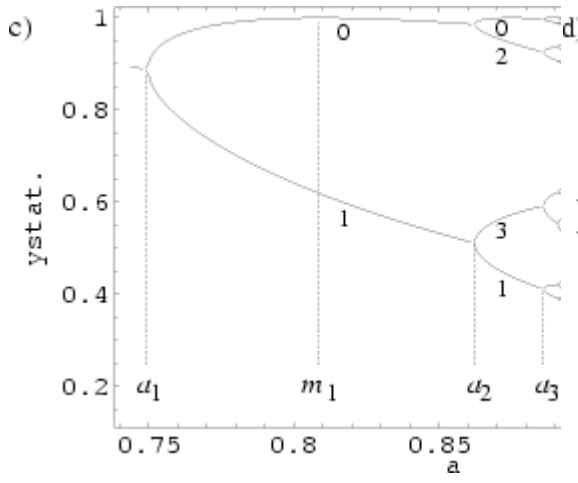


Stationäre Ausgabe

$y_{stat.}(a)\colon\ 0 \le a \le 1$

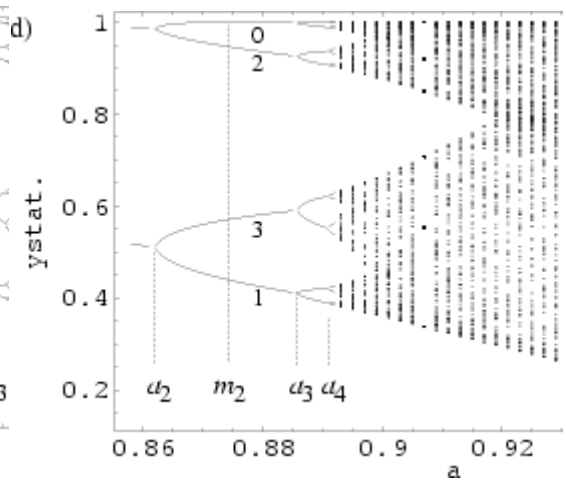


Zugehöriger Verlauf der Einschwingdauer



Stationäre Ausgabe

$y_{stat.}(a)\colon\ \frac{3}{4} \le a$



Stationäre Ausgabe

$y_{stat.}(a)\colon\ 0.862 \le a$

Bild 5

- **M**an erkennt: F kann für den „Nutzbereich``$0 \leq a \leq \frac{3}{4}$ als iterativer Gleichungslöser für die quadratische Gleichung (25) interpretiert werden.
- **B**ei weiterer Erhöhung von a über $a_1 = \frac{3}{4}$ hinaus werden
  - nach einem Einschwingvorgang, dessen Dauer wie in Bild 5b) dargestellt potentialtopfartig von a und nur in ganz geringem Maße von $z(0)$ abhängt
  - stationär zwei periodisch aufeinanderfolgende Werte $y_{stat.0}$ und $y_{stat.1}$ mit

$$y_{stat.0} \geq y_{stat.1} \tag{32}$$

  ausgegeben, die nur von a und nicht von $z(0)$ abhängen.

- **H**ier ist also im stationären Fall

$$y(t+2) = y(t) \tag{33}$$

- und wegen Gl. (17) und Gl. (20) auch

$$z(t+2) = z(t)\,. \tag{34}$$

- Andererseits folgt aus den Gln. (18), (19) und (20)

$$z(t+1) = 4\,a\,z(t)\,(1 - z(t)) \tag{35}$$

$$z(t+2) = 4\,a\,z(t+1)\,(1 - z(t+1))\,. \tag{36}$$

- **D**amit lassen sich nun $y_{stat.0}(a)$ und $y_{stat.1}(a)$ berechnen. Man erhält nach Umformung (Aufgabe 24.1)

$$\begin{aligned} y_{stat.0;1}(a) &= \frac{1}{2\,a} + \frac{1}{8\,a^2} \pm \frac{1}{4\,a^2}\sqrt{\left(\frac{4\,a-1}{2}\right)^2 - 1} \\ &= \frac{1}{8\,a^2}\left((4\,a+1) \pm \sqrt{(4\,a-1)^2 - 4}\right)\,. \end{aligned} \tag{37}$$

- **A**us Gl. (37) folgt (Aufgabe 24.1):
  - Für

$$a = a_1 = \frac{3}{4} \tag{38}$$

ist

$$y_{stat.0}(a_1) = y_{stat.1}(a_1) = \frac{8}{9}. \tag{39}$$

Mit Gl. (31) ist damit gezeigt: $y_{stat.}(a)$ besitzt bei $a = a_1$

einen Tripelpunkt, den ersten Bifurkationspunkt (vgl. Bild 5a)).

  - $y_{stat.0}(a)$ besitzt ein lokales Maximum bei

$$a_{max} = m_1 = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5}+1\right) \tag{40}$$

mit

$$y_{stat.0}(m_1) = 1\,. \tag{41}$$

Hierfür ist

$$y_{stat.1}(m_1) = \frac{1}{2\,m_1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\,, \tag{42}$$

d.h. $y_{stat.1}(m_1)$ teilt $y_{stat.0}(m_1)$ nach dem Goldenen Schnitt [9,10,11].

- Bild 5c) zeigt den Verlauf von $y_{stat.0}$(a) gemäß Gl. (37).

Aufgabe 24.1
◦ Leiten Sie Gl. (37) aus den Gln. (32) bis (36) her. ◦ Berechnen Sie das Maximum von $y_{stat.0}$(a) (Gln.(40) und (41)) aus Gl.(37).

- Entwickeln Sie

$$y_{stat.0;1}(a) = \frac{1}{8\,a^2}\left((4\,a+1) \pm \sqrt{(4\,a-1)^2}\,\text{-}\right. \tag{43}$$

an der Stelle $a = m_1$ in eine Taylor-Reihe.

- Vergleichen Sie diese Reihe mit der Taylor-Reihe von

$$y_{stat.}(a) = \frac{4\,a-1}{4\,a^2}\,;\; a_0 \leq a \leq a_1 \tag{44}$$

für den Entwicklungspunkt $a = m_0$

- **B**ei

$$a_2 = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+1\right) \tag{45}$$

beginnt eine weitere Aufspaltung von $y_{stat.}$(a) :

- nach einem Einschwingvorgang, dessen Dauer wiederum potentialtopfartig von a (Bild 5b)) und nur in ganz geringem Maße von $z(0)$ abhängt
- werden stationär vier periodisch aufeinanderfolgende Werte $y_{stat.0}$, $y_{stat.1}$, $y_{stat.2}$ und $y_{stat.3}$ mit

$$y_{stat.0} > y_{stat.2} > y_{stat.3} > y_{stat.1} \tag{46}$$

(vgl. Bild 5c)) ausgegeben, die nur von a und nicht von $z(0)$abhängen.

- **I**m stationären Fall ist hier also

$$y(t+4) = y(t) \tag{47}$$

- und wegen Gl. (17) und Gl. (20) auch

$$z(t+4) = z(t)\,. \tag{48}$$

- Für die dazwischenliegenden Takte gelten die Rekursionsgleichungen

$$z(t+1) = 4\,a\,z(t)\,(1-z(t)) \tag{49}$$

$$z(t+2) = 4\,a\,z(t+1)\,(1-z(t+1)) \tag{50}$$

$$z(t+3) = 4\,a\,z(t+2)\,(1-z(t+2)) \tag{51}$$

$$z(t+4) = 4\,a\,z(t+3)\,(1-z(t+3))\,. \tag{52}$$

Aufgabe 24.2

- Generieren Sie aus den Gln. (47) bis (52) in Analogie zu Aufgabe 24.1 Formelausdrücke für

$$y_{stat.0;1;2;3}(a)\,:\; a_2 \le a \le a_3\,. \tag{53}$$

- Berechnen bzw. verifizieren Sie damit a_2 gemäß Gl. (45).

- **E**s zeigt sich, daß eine formelmäßige Berechnung des lokalen Maximums von $y_{stat.0}(a)$ im Bereich $a_2 < a < a_3$ praktisch nicht möglich ist.
- **Z**u seiner iterativen Berechnung wird folgender plausibler Ansatz gemacht:
  - Maximum bei

$$a_{max} = m_2 \tag{54}$$

  - mit

$$y_{stat.0}(m_2) = 1 \qquad \text{(vgl. Bild 5a) und Bild 5c)).} \tag{55}$$

  - Die Gln. (17), (20), (47) bis (52) und (55) generieren das Iterationsgleichungssystem

$$y_0 = 1 \tag{56}$$

$$y_1 = 4\,a\,y_0\,(1-a\,y_0) \tag{57}$$

$$y_2 = 4\,a\,y_1\,(1 - a\,y_1) \tag{58}$$

$$y_3 = 4\,a\,y_2\,(1 - a\,y_2) \tag{59}$$

$$y_0 = 4\,a\,y_3\,(1 - a\,y_3)\,. \tag{60}$$

- Hieraus folgt mit Gl. (46) bei Einführung der Abkürzungen

$$A = 2\,a - 1 \tag{61}$$

$$B = 2\,a = A + 1 \tag{62}$$

- die gestaffelte Kettenwurzeldarstellung [6,12,13,14,15]

$$y_0 = 1 \tag{63}$$

$$y_3 = \frac{1}{B} \tag{64}$$

$$y_2 = \frac{1}{B}\left(1 + \sqrt{\frac{A}{B}}\right) \tag{65}$$

$$y_1 = \frac{1}{B}\left(1 - \sqrt{\frac{A}{B} - \frac{1}{B}\sqrt{\frac{A}{B}}}\right) \tag{66}$$

$$A = \sqrt{\frac{A}{B} + \frac{1}{B}\sqrt{\frac{A}{B} - \frac{1}{B}\sqrt{\frac{A}{B}}}} = \left(\frac{A}{B} + \frac{1}{B}\left(\frac{A}{B} - \frac{1}{B}\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{67}$$

- Gl. (67) wird nun als Schleifenkörper für die iterative Berechnung von m_2 interpretiert, danach erfolgt die Berechnung von $y_{stat.i}(m_2)$: $i = 0(1)3$ mittels Gl. (63) bis (66): (A1).

Eingabe: $m_{2\,start}$; ε
$x := 0$; $z := 2\,m_{2\,start} - 1$
$\lvert x - z \rvert > \varepsilon$
$x := z$; $y := z + 1$
$z := \sqrt{\frac{x}{y} + \frac{1}{y}\sqrt{\frac{x}{y} - \frac{1}{y}\sqrt{\frac{x}{y}}}}$
$m_2 := \frac{1}{2}\,y$
$y_{stat.0}(m_2) := 1$
$y_{stat.3}(m_2) := \frac{1}{y}$
$y_{stat.2}(m_2) := \frac{1}{y}\left(1 + \sqrt{\frac{x}{y}}\right)$
$y_{stat.1}(m_2) := \frac{1}{y}\left(1 - \sqrt{\frac{x}{y} - \frac{1}{y}\sqrt{\frac{x}{y}}}\right)$

Algorithmus (A1): Iterative Berechnung von m_2 ; Berechnung von $y_{stat.i}(m_2)$: $i = 0(1)3$

- **M**ittels (A1) erhält man

$$m_2 = 0.8746\,0424\,8319\,25\,3\ldots \tag{68}$$

$$y_{stat.0}(m_2) = 1 \tag{69}$$

$$y_{stat.3}(m_2) = 0.5716\,6349\,2567\,339\,5\ldots \tag{70}$$

$$y_{stat.2}(m_2) = 0.9458\,0251\,2185\,464\,6\ldots \tag{71}$$

$$y_{stat.1}(m_2) = 0.4385\,7\,8208\,3\,2701\,8\ \ldots\,. \tag{72}$$

Aufgabe 24.3

- Führen Sie die vorstehend nur skizzierte Herleitung des Algorithmus (A1) mit allen Einzelschritten durch.

- Untersuchen Sie experimentell das Konvergenzverhalten von (A1) bei plausiblen Startwerten m_{2start} :

$$\sqrt{\frac{x}{y} + \frac{1}{y}\sqrt{\frac{x}{y} - \frac{1}{y}\sqrt{\frac{x}{y}}}}$$

t	$z(t)$	$z_\beta(t)$	$z_\alpha(t)$	$dz(t) = \frac{z(t)-z(t+1)}{z(t+1)-z(t+2)}$	$dz_\beta(t)$	$dz_\alpha(t)$
0	$2\,m_{2start} - 1$					
1						

Durchlaufnummer in (A1)
$t = 0$: Initialisierung

- Formulieren Sie darauf basierend Vorschläge zur Konvergenzverbesserung von (A1). Testen Sie diese Verfahren experimentell.
- Interpretieren Sie die geschachtelten Wurzelausdrücke in (A1) geometrisch.

Aufgabe 24.4

- Lassen sich aus den Gln. (63) bis (67) Gruppeneigenschaften in $\{y_{stat.0}(m_2), y_{stat.1}(m_2), y_{stat.2}(m_2), y_{stat.3}(m_2)\}$ erkennen?
- Zeigen Sie, daß sich die Gln. (64) bis (67) auch implizit als Kettenpotenzen [14] notieren lassen:

$$(1 - B\,y_3)^2 = 0 \tag{73}$$

$$\left(A - B\,(1 - B\,y_2)^2\right)^2 = 0 \tag{74}$$

$$\left(A - B\left(A - B\,(1 - B\,y_1)^2\right)^2\right)^2 = 0 \tag{75}$$

$$\left(A - B\left(A - B\left(A - B(A)^2\right)^2\right)^2\right)^2 = 0\,. \tag{76}$$

- Interpretieren Sie diese Gleichungen.
- Geben Sie basierend auf den Gln. (63) bis (67) bzw. (73) bis (76) möglichst einfache Zusammenhänge zwischen den $y_{stat.i}(m_2): i = 0(1)3$ (und m_2) an.

- **W**ie in den Bildern 5a), 5c) und 5d) dargestellt, folgen bei weiterer Erhöhung von a in immer kürzeren Abständen ad infinitum weitere Periodenverdoppelungen; im Intervall
$a_n < a \leq a_{n+1} : n = 3,4,\ldots,$

$$\begin{aligned} a_n &\approx a_\infty - K\,\delta^{-n} \\ & a_\infty = 0.8924\ldots \\ & K = 0.6592\ldots \\ & \delta = 4.6692\ldots \quad [8]\,, \end{aligned} \tag{77}$$

- werden stationär 2^n periodisch aufeinanderfolgende Werte $y_{stat.0}, y_{stat.1}, \ldots . y_{stat.2^n-1}$ ausgegeben, die nur von a und nicht von $z(0)$ abhängen.
- **B**ild 6 zeigt schematisch die dabei zu beobachtende Wertestaffelung.

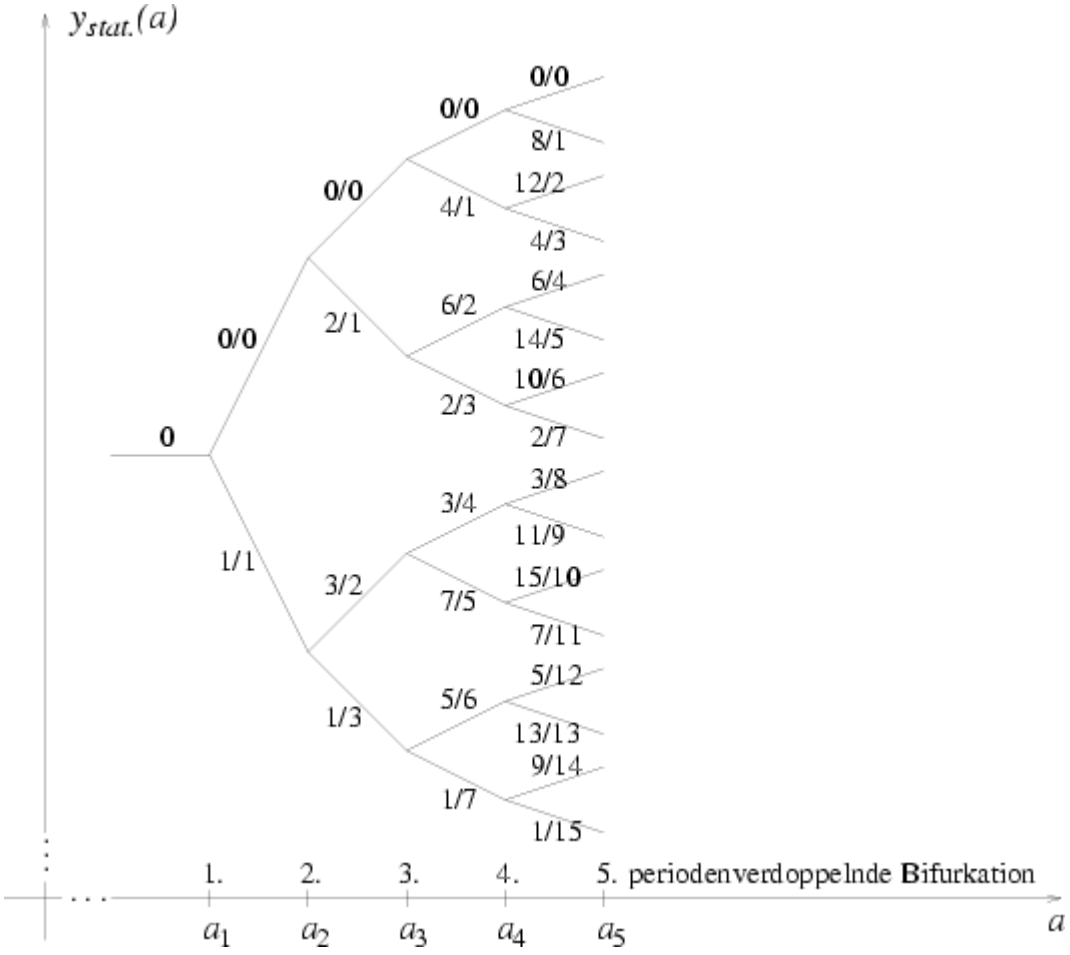


Bild 6: Ausgabereihenfolge und Wertestaffelung im Bifurkationsbereich
Kantenbewertung: Ausgabenummer i /Werteplatznummer w

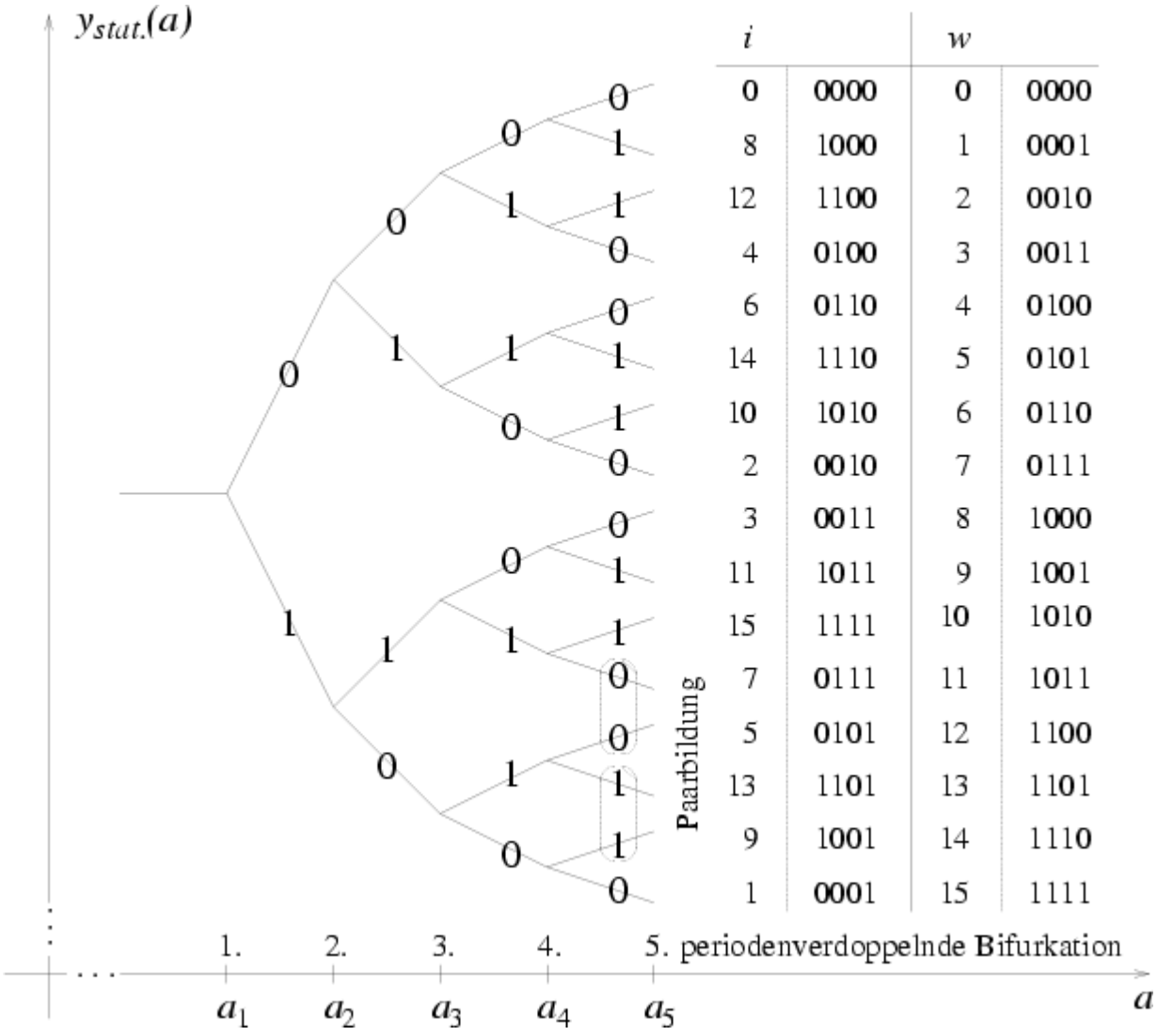
- **S**o hat man in Intervall $a_3 < a \leq a_4$ die stationär aufeinanderfolgende 2^3-periodische Ausgabe

Ausgabe-nummer i	0	1	2	3	4	5	6	7
stationäre Ausgabe	$y_{stat.0}(a)$	$y_{stat.1}(a)$	$y_{stat.2}(a)$	$y_{stat.3}(a)$	$y_{stat.4}(a)$	$y_{stat.5}(a)$	$y_{stat.6}(a)$	$y_{stat.7}(a)$

mit der Wertestaffelung

Werteplatz-nummer w im Bifurka-tionsbaum (Bild 6)	0	1	2	3	4	5	6	7
Werte-staffelung	$y_{stat.0}(a) > y_{stat.4}(a) > y_{stat.6}(a) > y_{stat.2}(a) > y_{stat.3}(a) > y_{stat.7}(a) > y_{stat.5}(a) > y_{stat.1}(a)$							

- **D**er Zusammenhang zwischen Ausgabenummer $i = 0(1)2^n - 1$ und zugehöriger Werteplatznummer w im Bifurkationsbaum Bild 6 für das Intervall $a_n < a \leq a_{n+1}$ läßt sich besonders einfach in Binärnotation darstellen (vgl. [16]). In Bild 7 wird hierzu exemplarisch der Fall $n = 4$ betrachtet.



i		w	
0	0000	0	0000
8	1000	1	0001
12	1100	2	0010
4	0100	3	0011
6	0110	4	0100
14	1110	5	0101
10	1010	6	0110
2	0010	7	0111
3	0011	8	1000
11	1011	9	1001
15	1111	10	1010
7	0111	11	1011
5	0101	12	1100
13	1101	13	1101
9	1001	14	1110
1	0001	15	1111

Bild 7: Zusammenhang zwischen i und w für $n = 4$

- **D**em Bifurkationsbaum aus Bild 6 ist hier ein binärer Kodebaum (Kantenbewertung ∈ {0,1}) so überlagert, daß sich die Binärdarstellungen aller i mit dem niederwertigsten Bit beginnend top-down (vom Quellknoten des Baumes zum zugehörigen Blattknoten fortschreibend) als Kantenbewertungsfolge aus diesem Kodebaum auslesen lassen. Es gibt dann genau ein Konstruktionsprinzip für die Kantenbewertungen des Kodebaumes, mit dem das kongenial realisierbar ist: die in Bild 7 eingetragene ,,Paarbildung`` ($\rightarrow$ Quanteneffekt?); diese **(0-0) bzw. (1-1) Paarbildung** ist in vorstehendem Kontext als Grundprinzip der Ausgabesteuerung $i = s(w)$ des Feigenbaum-Automaten im Bifurkationsbereich zu interpretieren!
- **I**n Zusammenhang damit erkennt man aus der i | w -Tabelle in Bild 7 sofort:
  Die Binärdarstellung von i ist das Spiegelwort der Gray-Codierten der Binärdarstellung von w,

$$i = \mathrm{s}(w) = \mathrm{g}(w)^{R} \quad {}^{2}. \tag{78}$$

- ---

[2] Für

$$a = a_m a_{m-1} \ldots a_2 a_1 a_0 \in \{0,1\}^{m+1} \tag{79}$$

$$b = b_m b_{m-1} \ldots b_2 b_1 b_0 \in \{0,1\}^{m+1} \tag{80}$$

ist

- $b = \mathrm{g}(a)$ - Gray-Code

mit

$$b_i = a_{i+1} \oplus a_i;\ i = 0,1,\ldots,m-1$$

$$b_m = a_m \tag{81}$$

$$a^R = a_0 a_1 a_2 \ldots a_{m-1} a_m \quad - \text{ Spiegelwort zu } a. \tag{82}$$

- ---

Aufgabe 24.5

Beweisen Sie Gl. (78) für beliebiges n.

- **D**as Generieren von praktikablen expliziten Formelausdrücken für $y_{stat.0;1;2;\ldots;2^n-1}(a)$ in den Intervallen $a_n < a \leq a_{n+1}: n = 3,4,\ldots$

  (vgl. Gl. (27), Gl. (37), Aufgabe 24.1 und Aufgabe 24.2) ist nicht möglich. Statt dessen lassen sich jedoch in völliger Analogie zum Intervall $a_2 < a \leq a_3$ und damit zu (A1) gestaffelte Kettenwurzelausdrücke zur iterativen Berechnung des lokalen Maximums von $y_{stat.0}(a)$ (oberer Zweig von $y_{stat.}(a)$ in $a_n < a \leq a_{n+1}$ angeben. So erhält

man für $n = 3$ (Aufgabe 24.6) schließlich den Algorithmus (A2) zur iterativen Berechnung der Maximumsabszisse
$a_{max} = m_3$ und zur darauf basierenden Berechnung der zugehörigen Ordinatenwerte $y_{stat.i}(m_3)$: $i = 0(1)7$.

Eingabe: $m_{3\,start}\,;\ \varepsilon$

$x := 0\,;\ z := 2\,m_{3\,start} - 1$

$|x - z| > \varepsilon$

$x := z\,;\ y := z + 1$

$$z := \sqrt{\frac{x}{y} + \frac{1}{y}\sqrt{\frac{x}{y} - \frac{1}{y}\sqrt{\frac{x}{y} - \frac{1}{y}\sqrt{\frac{x}{y} - \frac{1}{y}\sqrt{\frac{x}{y} + \frac{1}{y}\sqrt{\frac{x}{y} - \frac{1}{y}\sqrt{\frac{x}{y}}}}}}}}$$

$$= \left(\frac{x}{y} + \frac{1}{y}\left(\frac{x}{y} - \frac{1}{y}\left(\frac{x}{y} - \frac{1}{y}\left(\frac{x}{y} - \frac{1}{y}\left(\frac{x}{y} + \frac{1}{y}\left(\frac{x}{y} - \frac{1}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$m_3 := \frac{1}{2}\,y$

$y_{stat.0}(m_3) := 1$

$y_{stat.7}(m_3) := \frac{1}{y}$

$$y_{stat.6}(m_3) := \frac{1}{y}\left(1 + \sqrt{\frac{x}{y}}\right)$$

$$y_{stat.5}(m_3) := \frac{1}{y}\left(1 - \sqrt{\frac{x}{y} - \frac{1}{y}\sqrt{\frac{x}{y}}}\right)$$

$$y_{stat.4}(m_3) := \frac{1}{y}\left(1 + \sqrt{\frac{x}{y} + \frac{1}{y}\sqrt{\frac{x}{y} - \frac{1}{y}\sqrt{\frac{x}{y}}}}\right)$$

$$y_{stat.3}(m_3) := \frac{1}{y}\left(1 + \sqrt{\frac{x}{y} - \frac{1}{y}\sqrt{\frac{x}{y} + \frac{1}{y}\sqrt{\frac{x}{y} - \frac{1}{y}\sqrt{\frac{x}{y}}}}}\right)$$

$$y_{stat.2}(m_3) := \frac{1}{y}\left(1 + \sqrt{\frac{x}{y} - \frac{1}{y}\sqrt{\frac{x}{y} - \frac{1}{y}\sqrt{\frac{x}{y} + \frac{1}{y}\sqrt{\frac{x}{y} - \frac{1}{y}\sqrt{\frac{x}{y}}}}}}\right)$$

$$y_{stat.1}(m_3) := \frac{1}{y}\left(1 - \sqrt{\frac{x}{y} - \frac{1}{y}\sqrt{\frac{x}{y} - \frac{1}{y}\sqrt{\frac{x}{y} - \frac{1}{y}\sqrt{\frac{x}{y} + \frac{1}{y}\sqrt{\frac{x}{y} - \frac{1}{y}\sqrt{\frac{x}{y}}}}}}}\right)$$

Algorithmus (A2): Iterative Berechnung von m_3; Berechnung von $y_{stat.i}(m_3): i = 0(1)7$

Mittels (A2) erhält man

$$m_3 = 0.88866\,02156\,92206\,3\ldots \tag{83}$$

$$y_{stat.0}(m_3) = 1 \tag{84}$$

$$y_{stat.7}(m_3) = 0.56264\,47444\,93860\,1\ldots \tag{85}$$

$$y_{stat.6}(m_3) = 0.93473\,76943\,54829\,6\ldots \tag{86}$$

$$y_{stat.5}(m_3) = 0.41890\,87715\,53283\,2\ldots \tag{87}$$

$$y_{stat.4}(m_3) = 0.99154\,51200\,47857\ldots \tag{88}$$

$$y_{stat.3}(m_3) = 0.61438\,01657\,15493\,7\ldots \tag{89}$$

$$y_{stat.2}(m_3) = 0.91203\,75423\,04424\,6\ldots \tag{90}$$

$$y_{stat.1}(m_3) = 0.39577\,29469\,52351\,2\ldots\ . \tag{91}$$

Aufgabe 24.6

- Führen Sie die Herleitung des Algorithmus (A2) mit allen Einzelschritten durch (vgl. Aufgabe 24.3).
- Untersuchen Sie experimentell das Konvergenzverhalten von (A2) bei plausiblen Startwerten m_{3start}.
- Formulieren Sie darauf basierend Vorschläge zur Konvergenzverbesserung von (A2). Testen Sie diese Korrekturverfahren experimentell.
- Zeigen Sie, daß sich die für m_3 und die zugehörigen stationären Ausgabewerte $y_{stat.i}(m_3): i = 0(1)7$ gemäß (A2) bestehenden Zusammenhänge auch implizit als Kettenpotenzen notieren lassen:

$$A = 2\,m_3 - 1\,;\;\; B = 2\,m_3 \tag{92}$$

$$\left(A - B\left(A - B\left(A - B\left(A - B\left(A - B\left(A - B\,(A - B\,(A)^2)^2\right)^2\right)^2\right)^2\right)^2\right)^2\right)^2 = 0 \tag{93}$$

$$y_{stat.0}(m_3) = 1 \tag{94}$$

$$(1 - B\,y_{stat.7}(m_3))^2 = 0 \tag{95}$$

$$\left(A - B\,(1 - B\,y_{stat.6}(m_3))^2\right)^2 = 0 \tag{96}$$

$$\left(A - B\,(A - B\,(1 - B\,y_{stat.5}(m_3))^2)^2\right)^2 = 0 \tag{97}$$

$$\left(A - B\left(A - B\,(A - B\,(1 - B\,y_{stat.4}(m_3))^2)^2\right)^2\right)^2 = 0 \tag{98}$$

$$\left(A - B\left(A - B\left(A - B\,(A - B\,(1 - B\,y_{stat.3}(m_3))^2)^2\right)^2\right)^2\right)^2 = 0 \tag{99}$$

$$\left(A - B\left(A - B\left(A - B\left(A - B\,(A - B\,(1 - B\,y_{stat.2}(m_3))^2)^2\right)^2\right)^2\right)^2\right)^2 = 0 \tag{100}$$

$$\left(A - B\left(A - B\left(A - B\left(A - B\left(A - B\,(A - B\,(1 - B\,y_{stat.1}(m_3))^2)^2\right)^2\right)^2\right)^2\right)^2\right)^2 = 0\,. \tag{101}$$

- Bearbeiten Sie die übrigen Fragestellungen von Aufgabe 24.4 sinngemäß für $n = 3$.

- **D**er Algorithmus (A2) läßt sich nun leicht zu dem Algorithmus (A3) verallgemeinern.

Eingabe: $n\,;\ m_{n\,start}\,;\ \varepsilon$

$x := 0\,;\ z := 2\,m_{n\,start} - 1$

$|x - z| > \varepsilon$

$x := z\,;\ y := z + 1$

$$z := \sqrt{\frac{x}{y} + (-1)^{b_{2^n-2}}\frac{1}{y}\sqrt{\frac{x}{y} + (-1)^{b_{2^n-3}}\frac{1}{y}\sqrt{\frac{x}{y} + \ldots + (-1)^{b_2}\frac{1}{y}\sqrt{\frac{x}{y} + (-1)^{b_1}\frac{1}{y}\sqrt{\frac{x}{y}}}}}}$$

$m_n := \frac{1}{2}\,y$

$y_{stat.0}(m_n) := 1$

$y_{stat.2^n-1}(m_n) := \frac{1}{y}$

$$y_{stat.2^n-2}(m_n) := \frac{1}{y}\left(1 - (-1)^{b_1}\sqrt{\frac{x}{y}}\right)$$

$$y_{stat.2^n-3}(m_n) := \frac{1}{y}\left(1 - (-1)^{b_2}\sqrt{\frac{x}{y} + (-1)^{b_1}\frac{1}{y}\sqrt{\frac{x}{y}}}\right)$$

$$y_{stat.2^n-4}(m_n) := \frac{1}{y}\left(1 - (-1)^{b_3}\sqrt{\frac{x}{y} + (-1)^{b_2}\frac{1}{y}\sqrt{\frac{x}{y} + (-1)^{b_1}\frac{1}{y}\sqrt{\frac{x}{y}}}}\right)$$

$\vdots$

$$y_{stat.2}(m_n) := \frac{1}{y}\left(1 - (-1)^{b_{2^n-3}}\sqrt{\frac{x}{y} + (-1)^{b_{2^n-4}}\frac{1}{y}\sqrt{\frac{x}{y} + \ldots + (-1)^{b_2}\frac{1}{y}\sqrt{\frac{x}{y} + (-1)^{b_1}\frac{1}{y}\sqrt{\frac{x}{y}}}}}\right)$$

$$y_{stat.1}(m_n) := \frac{1}{y}\left(1 - (-1)^{b_{2^n-2}}\sqrt{\frac{x}{y} + (-1)^{b_{2^n-3}}\frac{1}{y}\sqrt{\frac{x}{y} + \ldots + (-1)^{b_2}\frac{1}{y}\sqrt{\frac{x}{y} + (-1)^{b_1}\frac{1}{y}\sqrt{\frac{x}{y}}}}}\right)$$

Algorithmus (A3): Iterative Berechnung der Maximumsabszisse m_n von $y_{stat.0}(\mathrm{a})$ im Intervall $a_n < a \leq a_{n+1}$; Berechnung der zugehörigen Ordinatenwerte $y_{stat.i}(m_n) : i = 0(1)2^n - 1 : n = 2{,}3{,}4{,}\ldots$

- Hierbei ist

$$b_j = \begin{cases} 0 \quad \text{wenn} \quad (\exists k)\,\mathrm{rest}(j, 2\cdot 4^k) = 0 \quad \underline{\text{and}} \quad \mathrm{div}(j, 2\cdot 4^k) \quad \text{ungerade}\,; \\ \qquad\qquad k \in \mathbb{N}\ \left[0, \lfloor \frac{\lfloor \mathrm{ld}\, j \rfloor - 1}{2} \rfloor\right] \\ 1 \quad \text{sonst}\,. \end{cases} \tag{102}$$

- Für das Binärwort

$$b = \ldots b_3 b_2 b_1 \in \{0,1\}^* \qquad (\text{vgl. } [16],\ \text{Abschn. } 2.1) \tag{103}$$

- hat man dann

$$b = \ldots 01110101011101110101011101\,. \tag{104}$$

- **M**ittels (A3) erhält man

$$m_2 = 0.87464\,04248\,31925\,3\ldots \tag{105}$$

$$m_3 = 0.88866\,02156\,92206\,3\ldots \tag{106}$$

$$m_4 = 0.89166\,68449\,64067\,3\ldots \tag{107}$$

$$m_5 = 0.89231\,08829\,09277\,6\ldots \tag{108}$$

$$m_6 = 0.89244\,88234\,37486\,6\ldots \tag{109}$$

$$m_7 = 0.89247\,83663\,55587\,3\ldots \tag{110}$$

$$m_8 = 0.89248\,46935\,58327\,5\ldots \tag{111}$$

$$m_9 = 0.89248\,60486\,52017\,1\ldots \tag{112}$$

$$m_{10} = 0.89248\,63388\,71618\,8\ldots \tag{113}$$

$$m_{11} = 0.89248\,64010\,27770\,9\ldots \tag{114}$$

$$m_{12} = 0.89248\,64143\,39716\,2\ldots\,. \tag{115}$$

Aufgabe 24.7

Bearbeiten Sie die Fragestellungen von Aufgabe 24.6 sinngemäß für (A3).

Aufgabe 24.8

- Geben Sie für Gl. (102) eine vollständige Binärdarstellung an (vgl. [16], Abschn. 2.1).
- Stellen Sie das Binärwort b (Gln. (103) und (104)) unter Benutzung des zweidimensionalen Notierungsmodells „ Ulam-Spirale`` [17,18] mit

$$z(0) = b_1,\ z(1) = b_2,\ z(2) = b_3,\ z(3) = b_4, \ldots \tag{116}$$

- als Schwarz-Weiß-Muster dar (vgl. [16], Abschn. 2.3):

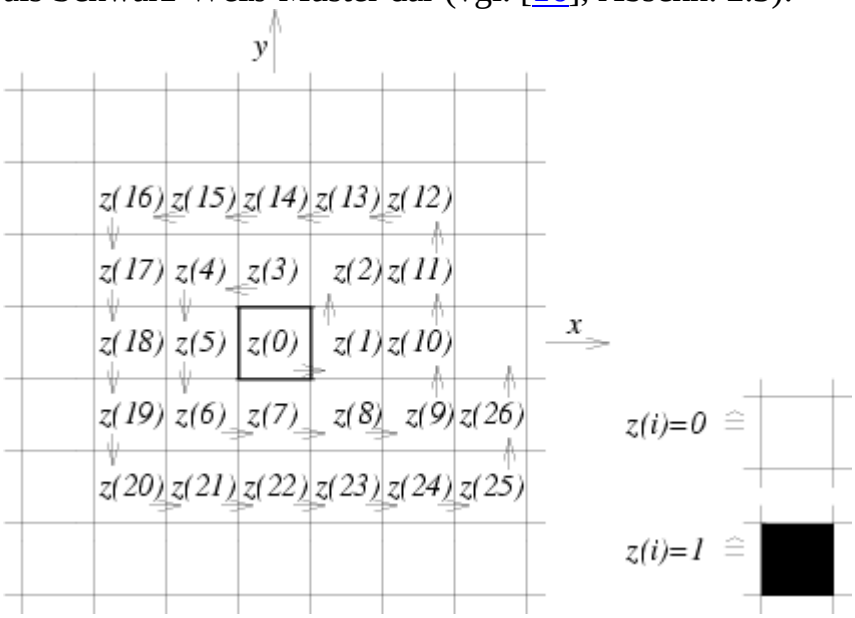


Bild 8: Ulam-Spirale

- Berechnen Sie den Wert r des dem Binärwort Gl. (104), in Kompaktnotation

$$b = \ldots 0^{a_9}\, 1^{a_8}\, 0^{a_7}\, 1^{a_6}\, 0^{a_5}\, 1^{a_4}\, 0^{a_3}\, 1^{a_2}\, 0^{a_1}\, 1^{a_0} \tag{117)}$$

- mit

$$a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 3, a_4 = 1, a_5 = 1, a_6 = 1, a_7 = 1, a_8 = 1, a_9 = 3, \ldots, \tag{118)}$$

- zugeordneten regelmäßigen Kettenbruchs (vgl. Modul 16)

$$r = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}} = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots] \qquad (119))$$

- Interpretieren Sie r.
  Experimentieren Sie in diesem Zusammenhang auch mit anderen in Modul 16 beschriebenen speziellen Kettenbrüchen.

Aufgabe 24.9

Konstruieren Sie einen Turing-Automaten (TA) mit zweidimensionalem Werteband (vgl. auch [1],Abschn. 3.3), der das in Aufgabe 24.8 erhaltene Schwarz-Weiß-Muster in Gänze oder charakteristische Teilmuster generiert.

Anregung: TA „Langtons Ameise`` [19,20,21,22], Bild 9.

- Aufbau

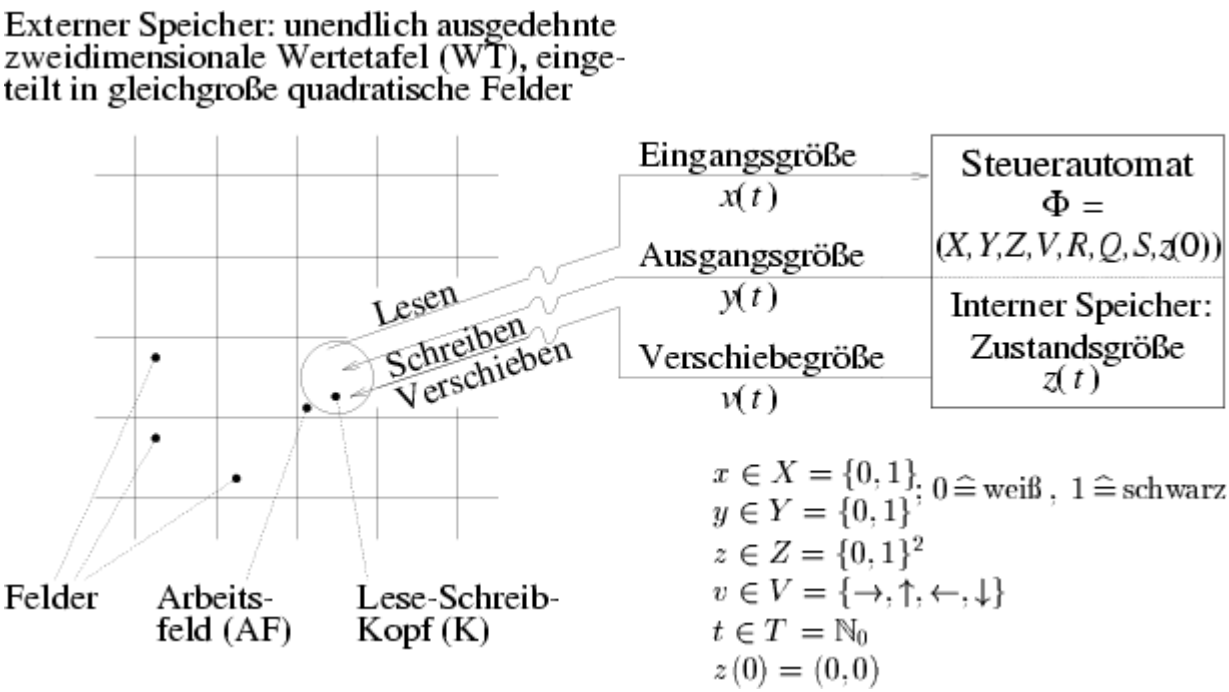


Bild 9: TA „Langtons Ameise``

Jedes Feld der WT ist entweder mit einer 0 oder einer 1 belegt. Bei $t = 0$ sind

alle Felder mit 0 belegt (Anfangsbelegung). K steht im Intervall $(t-1, t]$ auf AF,

wird in t gegenüber der feststehenden WT entweder um ein Feld nach rechts ($\rightarrow$),

oben ($\uparrow$), links ($\leftarrow$) oder unten ($\downarrow$)verschoben.

- Arbeitsweise
  In den aufeinanderfolgenden Taktzeitpunkten
  $t = 0,1,2,\ldots$ jeweils:
  - Auslesen von $<$ AF $(t) >= x(t)$ durch K.
  - Aus $x(t)$ und $z(t)$ werden in Φ
    - $y(t)$ gebildet und durch K auf AF (t) geschrieben

      (Überschreiben von $x(t)$)

    - $v(t)$ gebildet und durch K ausgeführt
    - $z(t+1)$ gebildet und $z(t)$ mit $z(t+1)$ überschrieben (bleibt im

      Intervall $(t, t+1]$ in Φ gespeichert).

Die Bildung von $y(t)$, $v(t)$ und $z(t+1)$ aus $x(t)$ und $z(t)$ wird beschrieben

durch die eindeutigen Abbildungen

$$
\begin{aligned}
R &: X \times Z \to Y\,,\ y = \mathrm{r}(x,z) && \text{– Ergebnisabbildung}\\
Q &: X \times Z \to V\,,\ v = \mathrm{q}(x,z) && \text{– Verschiebeabbildung}\\
S &: X \times Z \to Z\,,\ z' = \mathrm{s}(x,z) && \text{– Folgezustandsabbildung}\,.
\end{aligned}
$$

In vorliegendem Falle läßt sich die Verhaltensweise (R, Q, S) am anschaulichsten

durch den Zustandsgraphen beschreiben: Bild 10.

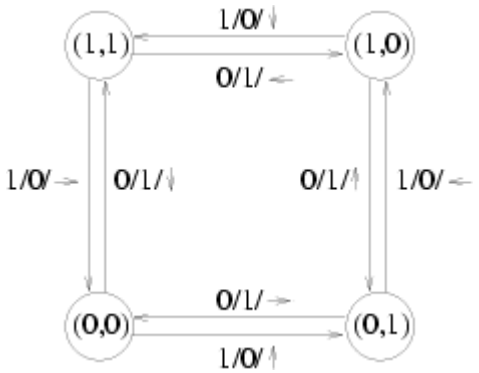


Bild 10: Zustandsgraph des TA „Langtons Ameise``

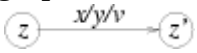
Element: 

Bild 11 zeigt das von dem TA „Langtons Ameise`` bis zum 11016. Takt generierte

Schwarz-Weiß-Muster. Man erkennt: der TA erzeugt auf seiner WT

- von Takt 0 bis Takt 9976 ein chaotisches („deterministisches Chaos``) und
- ab Takt 9977 ein völlig regelmäßig aufgebautes bandförmiges

  Schwarz-Weiß-Muster, das einer Binärfolge mit der Periode 104 entspricht.

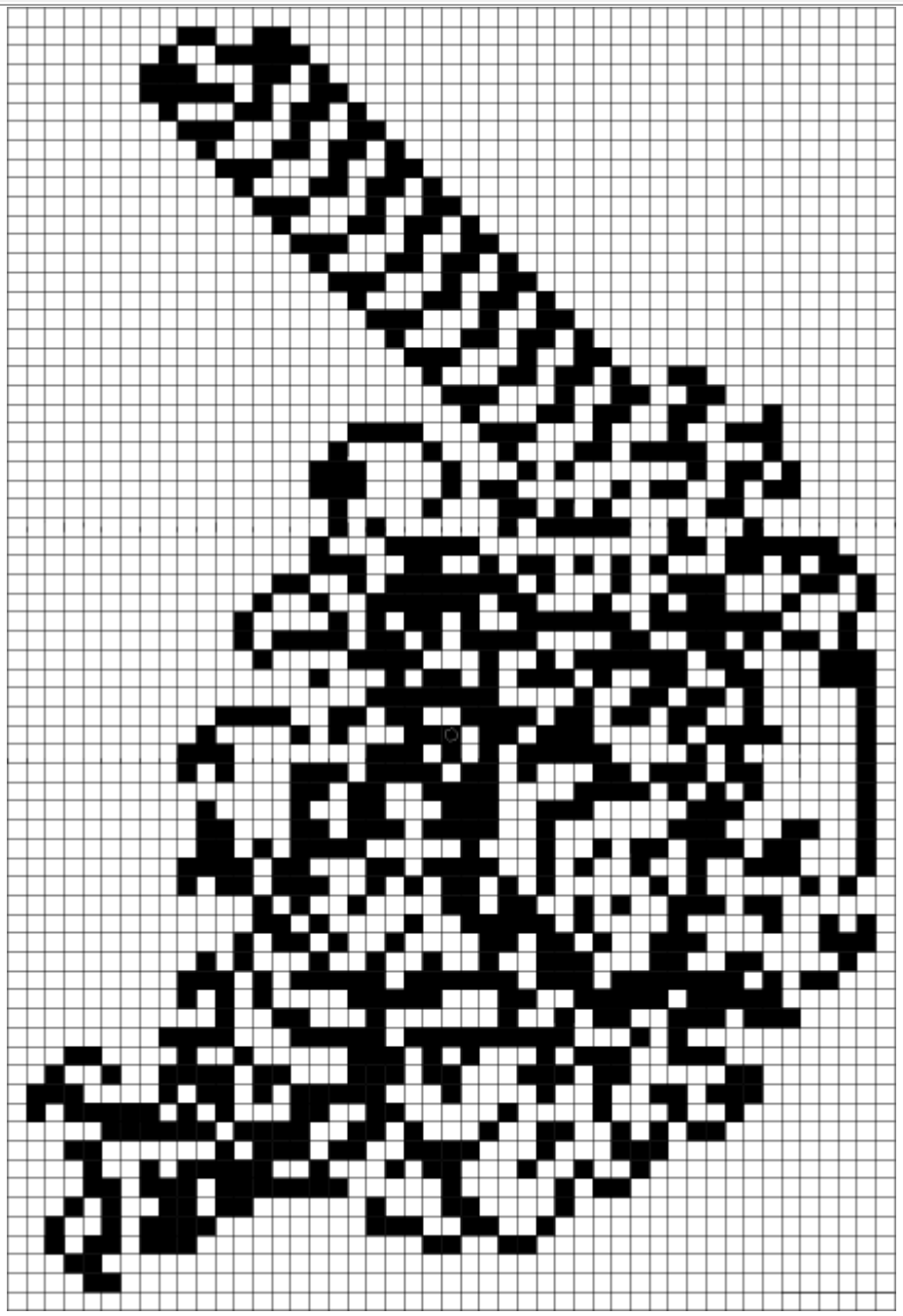


Bild 11: ,,Langtons Ameise``

-

Aufgabe 24.10

Untersuchen Sie, ob und wie sich der Algorithmus (A3) zur iterativen Berechnung der Bifurkationsabszissen a_n und/oder a_{n+1} und zur Berechnung der zugehörigen Ordinatenwerte modifizieren bzw. erweitern läßt.

-

Aufgabe 24.11

Die Einschwingdauer des Feigenbaum-Automaten besitzt den im Bild 5b) dargestellten bandstrukturförmigen Verlauf mit Polstellen (?) bei
$a = a_1, a_2, a_3, \ldots$.

- Bestimmen Sie diesen Verlauf experimentell für $0.7 \leq a \leq 0.9$ mit größerer Auflösung und stellen Sie ihn in geeigneter Weise graphisch dar.
- Untersuchen Sie dabei die Annäherung an die Bifurkationsstellen a_n mit möglichst hoher Auflösung.
- Formulieren Sie
  - auf der Basis des erhaltenen experimentellen Materials und
  - in Analogie zur Ausgabesteuerung $i = s(w)$ (Bild 7, Gl. (78))

  ein mathematisches Modell für die Einschwingdynamik des Feigenbaum-Automaten im Bifurkationsbereich.

Aufgabe 24.12

- Der Algorithmus (A3) mit b gemäß Gl. (104) besitzt Eingabewerte m_{start} ,

  für die die Initialisierung

$$z_{start} = 2\,m_{start} - 1 \;\rightarrow\; x_{start} = 2\,m_{start} - 1\,;\; y_{start} = 2\,m_{start} \tag{123}$$

- durch den Schleifenkörper keine Veränderung erfährt („ Wurmloch``, wormhole):

$$z := z_{start}\,; \tag{124}$$

  (A3) also bereits nach dem ersten Durchlauf terminiert.
  Es sind dies z.B.

$$m_{start} = m_0 = 1 \;\rightarrow\; z_{start} = x_{start} = 0\,;\; y_{start} = 1 \tag{125}$$

$$m_{start} = m_1 = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) \;\rightarrow\; z_{start} = x_{start} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) = \tau\,;\; y_{start} = \frac{1}{\tau}. \tag{126}$$

- Bestimmen Sie weitere Eingabewerte dieser Art.
- Starten Sie (A3) mit

$$m_{start} = 1 \;\rightarrow\; x_{start} = 1\,;\; y_{start} = 2 \tag{127}$$

und geben Sie für $n = 2(1)12$ die Näherungswerte von $m_n(l)$ nach l

Schleifendurchläufen aus.
Diskutieren Sie das erhaltene Ergebnis (Werteverlauf, Differenzenquotient, ⋯).

- Die stationäre Ausgabe $y_{stat.}(a)$ des Feigenbaum-Automaten im Bifurkationsbereich (Bild 5c) und 5d)) wird durch drei Kenngrößen beschrieben:
  - Feigenbaumkonstante δ

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+2} - a_{n+1}} = 4.66920\,16091\ \ldots \tag{128}$$

  - Feigenbaumkonstante α

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{y_{stat.2^{n-1}-1}(m_n) - y_{stat.2^{n}-1}(m_n)}{y_{stat.2^{n+1}-1}(m_{n+1}) - y_{stat.2^{n}-1}(m_{n+1})} = 2.50290\,78750\ \ldots \tag{129}$$

  - Bifurkationshäufungspunkt a_∞

$$a_\infty = \lim_{n\to\infty} a_n = 0.89248\,641\ldots\,. \tag{130}$$

- Wie in [5] gezeigt wird, läßt sich δ auch aus den numerisch wesentlich leichter berechenbaren m_n bestimmen:

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \frac{m_{n+1} - m_n}{m_{n+2} - m_{n+1}}\,. \tag{131}$$

- Da auch

$$a_\infty = \lim_{n\to\infty} m_n \tag{132}$$

- ist, lassen sich alle Bifurkationskenngrößen von F auch mittels (A3) berechnen.

Aufgabe 24.13

Wie ist die Verhaltensweise (R, S) des Feigenbaum-Automaten F zu modifizieren, damit

- bei vollständigem Binärbaum im Bifurkationsbereich beliebige vorgegebene Ausgabesteuerungen $i = s(w)$ (gegenüber der „natürlichen`` paarbildungsgesteuerten Ausgabe $i = g(w)^R$)
- im Bifurkationsbereich beliebig vorgegebene unvollständige Binärbäume (Huffman-Bäume) mit beliebig vorgegebenen Ausgabesteuerungen

realisierbar sind.

Aufgabe 24.14

Untersuchen Sie die Wirkung der Rückkopplungsbeschaltung des Feigenbaum-Automaten gemäß Bild 12 auf die stationäre Ausgabe
$y_{stat}(a)$ bei konstanter Eingabe $\mathrm{x(t)} = a$.
Unterscheiden Sie dabei die Fälle

$$0 < k \leq +1 \quad - \quad \text{Mitkopplung} \tag{133}$$

$$-1 \leq k < 0 \quad - \quad \text{Gegenkopplung}\,. \tag{134}$$

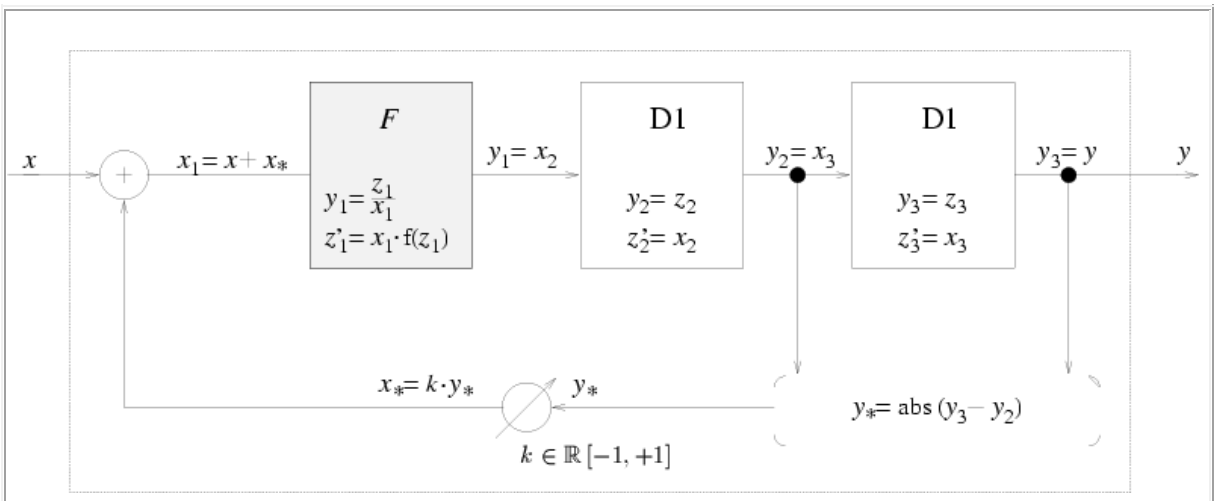


Bild 12: Feigenbaum-Automat mit Rückkopplungsschaltung

Aufgabe 24.15

Die Feigenbaumkonstante δ ist gemäß Gl. (131) als Differenzenquotient der Glieder der Folge der Maximalwerte m_n;n = 0, 1, 2,... (Gln. (18), (40), (105)-(115)) der stationären Ausgabe$y_{stat.}(a)$ von F bei konstanter Eingabe a im Bifurkationsbereich definiert:

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \frac{m_n - m_{n+1}}{m_{n+1} - m_{n+2}}. \qquad (135)$$

Geben Sie Folgen mit den Differenzenquotienten e bzw. π an.



Photo by Shen Li, Chongqing University “Feigenbaum roots”