Unit n°70

Alumni-Seminar der Roland Berger Stiftung

Leipzig, 09.-10. Mai 2015
Workshop zum Internetprojekt
„Math for Seals and Nerds only”
www.algorithmicschannel-dresden-guilin.net

Im Mittelpunkt dieses Internetprojektes steht das Anheizen kreativen Denkens als Basis innovativen Machens - des Aufbruchs zu neuen Ufern - in den Naturwissenschaften, im Engineering und in der Wirtschaft.

Fragen wir Google nach „Kreativität lernen“, erhalten wir „Ungefähr 11.800 Ergebnisse (0,35 Sekunden)“. Eigentlich entmutigend, noch ein Pfund auf die Waage zu legen. Dennoch, „Math for Seals and Nerds only” versucht’s. Wie, will dieser Workshop skizzieren und Sie vielleicht als ständigen Visitor (ACDG.net will anregen, nicht lehren), vielleicht sogar als Contributor (ACDG.net möchte weiter wachsen) gewinnen.

Wer sind wir und was wollen wir:

Math for Seals and Nerds only
www.algorithmicschannel-dresden-guilin.net

Aufbauend auf breiten, soliden, anwendungs- und algorithmus-orientierten Mathematikkenntnissen ist es Anliegen dieses interaktiv angelegten Präsenz- und Internetkurses anhand von Beispielen

- formale Problemlösungstechniken, heuristische Werkzeuge und Herangehensweisen zu vermitteln und zu trainieren, die so nicht in klassischen Mathematiklehrbüchern zu finden sind und zu „neuen Ufern“ führen können,
- das volle und konzentrierte Ausschöpfen des naturgegebenen Denkvermögens anzuregen und zu fördern (Shaolin),
- zu trainieren logisch, analytisch, flexibel, dialektisch, strukturiert, kritisch, outside the box, kreativ, „mehrere Züge im voraus“, komplex und vernetzt zu denken, als eine Grundlage für ein späteres nachhaltiges und beständiges naturwissenschaftliches oder ingenieurwissenschaftliches Studium.

Im Detail geht es zunächst um

- kreatives Ausschöpfen von Formeln (insbes. der Grundregeln der Arithmetik und Algebra), Fakten und Ideen,
- kreative Formelmanipulation,
- Suche nach problemlösungsvereinfachenden Symmetrien, Invarianten, Analogien und Ähnlichkeiten,
- Fakten, Ideen, Methoden und Lösungstechniken breitbandig (d.h., aus verschiedenen Bereichen der Mathematik, von Naturwissenschaften, Engineering und Grauzonen) intuitionsgeleitet vorurteilsfrei und produktiv zu neuen Fragestellungen und Lösungen zusammenzuführen,
- Erkennen von „offenen Flanken“,
- Scoutics (How we can find and use a low situated simple pass way through extremely high problem solving mountains?).

Der Kurs ist beispielbasiert konzipiert. Er ist nicht eine systematisch aufgebaute, sondern eine subjektiv-punktuelle methodisch- und dialogorientierte Mathematikpräsentation mit Nähe zur experimentellen Mathematik und zur Informatik, speziell zur Algorithmenkonstruktion, er will werkliches, aber auch mentales Kreativpotenzial vermitteln – Math for Seals and Nerds only.

In medias res!
Konkretisierung des Mission Statements.

Ein Kapitel aus **Computational Geometry** als
mathematische Basis der Bildverarbeitung

Ein problemorientiertes 2D/3D Notierungssystem für Anwendungen in Computational Geometry

** Berechnung der Kenngrößen (Fläche, Umfang, Winkel, Schwerpunkt, Trägheitsmoment) von 2D Vielecken, die durch die kartesischen Koordinaten ihrer Eckpunkte gegeben sind,

Mechanik, Informatik etc.:

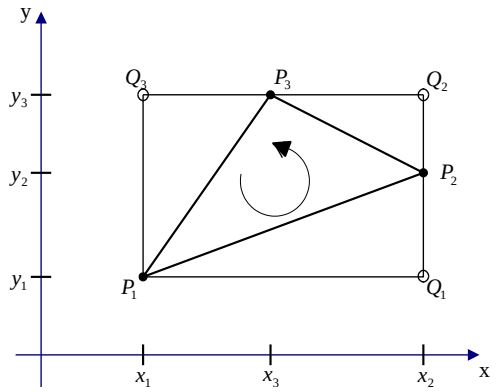
2D verkürzte Determinante + 3D Datenzylinder

Vorausgesetzte Grundkenntnisse:

** Analytische Geometrie der Ebene
** Trigonometrische Funktionen, Trigonometrie
** Lineare Algebra: lineare Gleichungssysteme, Matrizen, Determinanten
** Komplexe Zahlen
** Differential- und Integralrechnung

70.1 Einführung

Wir starten mit einem einfachen geometrischen Problem.



Gegeben ist ein Dreieck $\triangle P_1P_2P_3$ durch die kartesischen Koordinaten seiner Eckpunkte $P_i = (x_i, y_i);\ i = 1,2,3$, die einfachste Interaktion zwischen diesen drei Punkten P_1, P_2 und P_3.

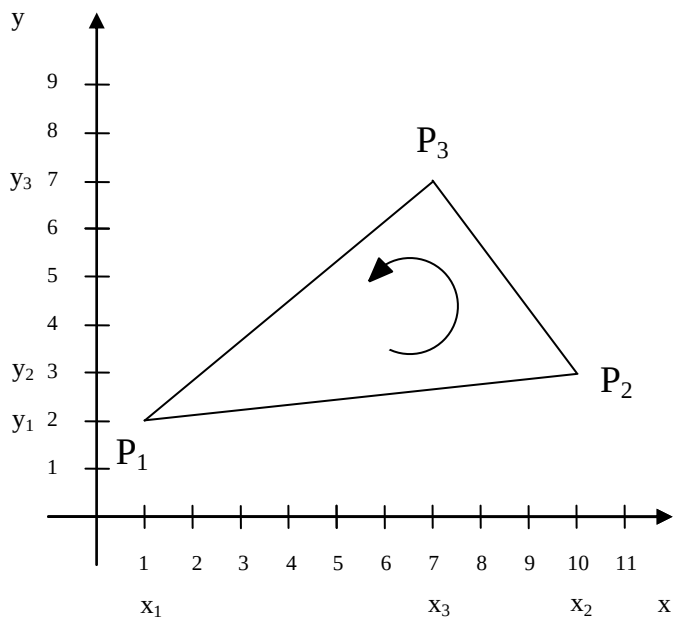
Gesucht ist ein Formelausdruck für den Flächeninhalt von $\triangle P_1P_2P_3$ in Funktion der Koordinaten x_i und y_i. Zu seiner Herleitung soll der einfachste und kürzeste Weg beschritten werden.

Lösung durch Einbettung von $\triangle P_1P_2P_3$ in das kleinste, umschließende, achsparallele Rechteck $\square P_1Q_1Q_2Q_3$:

$$
\begin{aligned}
area\Delta P_1P_2P_3 = \quad & area\square P_1Q_1Q_2Q_3 - area\Delta P_1Q_1P_2 - area\Delta P_2Q_2P_3 \\
& - area\Delta P_3Q_3P_1 \\
= \quad & (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) - \\
& \frac{1}{2}(x_2 - x_3)(y_3 - y_2) - \frac{1}{2}(x_3 - x_1)(y_3 - y_1) \\
= \quad & \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

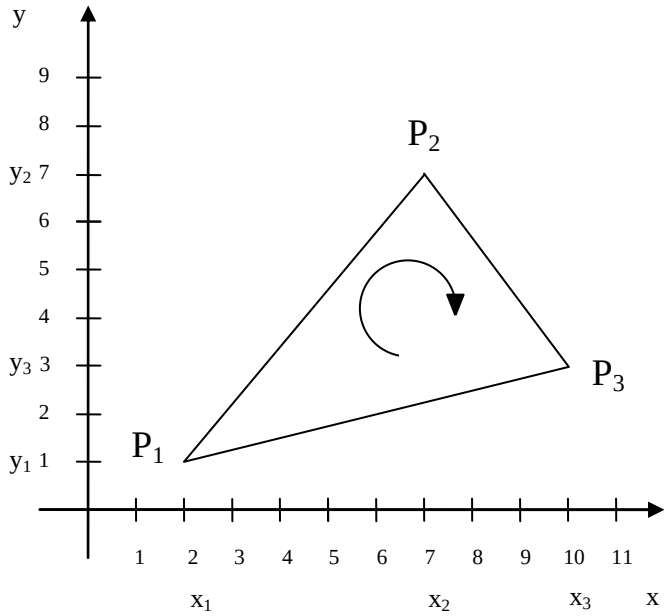
1D Zeichenkettennotation, man beachte die hochgradige innere Symmetrie in letzterem Ausdruck!

Nun testen wir Gl. (1) mit zwei numerischen Beispielen:



$P_1 = (1,2);\ P_2 = (10,3);\ P_3 = (7,7)$

$area_{\triangle} P_1 P_2 P_3 = 19,5$



$P_1 = (2,1);\ P_2 = (7,7);\ P_3 = (10,3)$

$area_{\triangle} P_1 P_2 P_3 = -19$!

Diese Beispiele zeigen:

Gl.(1) liefert neben dem Absolutwert des Flächeninhalts (der ja nach Definition immer positiv ist), noch zusätzlich ein Vorzeichen, das den Umlaufsinn $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3$ charakterisiert:

positiver math. Drehsinn $\rightarrow$ +

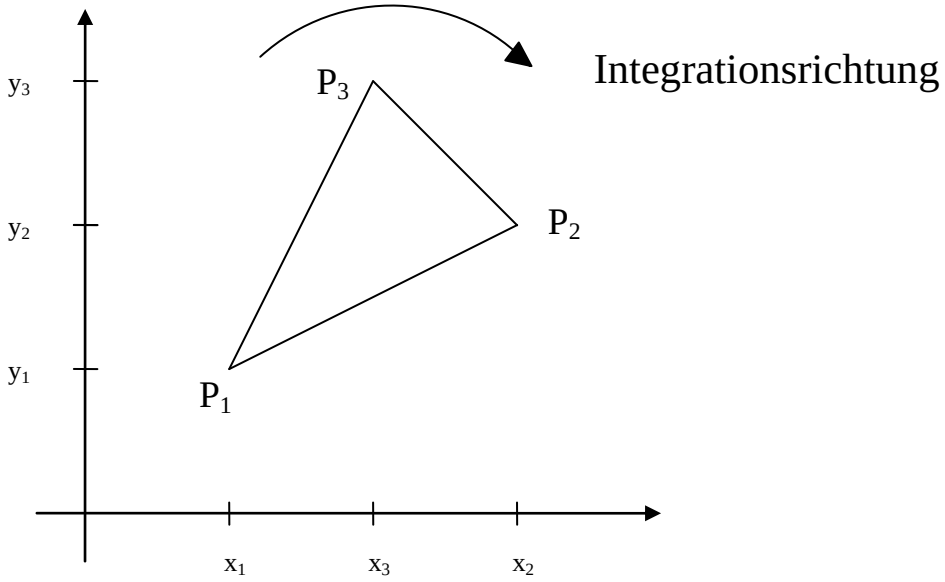
negativer math. Drehsinn $\rightarrow$ –

** Erklären Sie anhand der Herleitung von Gl. (1), woher dieses Vorzeichen kommt.

** Und die Engineering-orientierte Frage ist, wie kann man dieses gar nicht erwartete Geschenk produktiv nutzen?

Zum Vergleich!

Berechnung von $area\Delta P_1P_2P_3$ mittels Integralrechnung



$$area\Delta P_1P_2P_3 = \oint_{\Delta P_1P_2P_3} dx\,dy$$

$$= \oint_{\Delta P_1P_2P_3} y(x)\,dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_3}\left(y_1 + \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}(x - x_1)\right)dx + \int_{x_3}^{x_2}\left(y_3 + \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}(x - x_3)\right)dx +$$

$$\int_{x_2}^{x_1}\left(y_2 + \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_2)\right)dx$$

Substitution:

$$z = y_1 + \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}(x - x_1) \rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \rightarrow dx = \frac{x_3 - x_1}{y_3 - y_1}dz$$

$x = x_1 \rightarrow z = y_1$;

$x = x_3 \rightarrow z = y_3$

etc.

Damit hat man

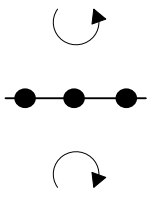
$$
\begin{aligned}
area\Delta P_1P_2P_3 &= \frac{x_3-x_1}{y_3-y_1}\int_{y_1}^{y_3} z\,dz + \frac{x_2-x_3}{y_2-y_3}\int_{y_3}^{y_2} z\,dz + \frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}\int_{y_2}^{y_1} z\,dz \\
&= \frac{x_3-x_1}{y_3-y_1}\cdot\frac{1}{2}\left(y_3{}^2-y_1{}^2\right)+\frac{x_2-x_3}{y_2-y_3}\cdot\frac{1}{2}\left(y_2{}^2-y_3{}^2\right)+ \\
&\quad \frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}\cdot\frac{1}{2}\left(y_1{}^2-y_2{}^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(x_3-x_1\right)\left(y_3+y_1\right)+\left(x_1-x_2\right)\left(y_2+y_3\right)+\left(x_1-x_2\right)\left(y_1+y_2\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\begin{array}{l} x_3y_3+x_3y_1-x_1y_3-x_1y_1+x_2y_2+x_2y_3- \\ x_3y_2-x_3y_3+x_1y_1+x_1y_2-x_2y_1-x_2y_2 \end{array}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_2y_1-x_3y_2-x_1y_3\right)
\end{aligned}
$$

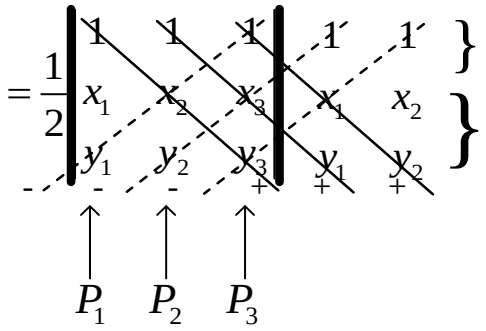
Diskussion!

“Parturient montes, nascetur ridiculus mus.”
Horaz, Ars poetica

Die klassische 2D Determinantennotation von Gl. (1) wiederspiegelt das gegebene geometrische Objekt weit überzeugender:

$$
area_{\triangle}P_1P_2P_3 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} >0 \\ =0 \\ <0 \end{array} \quad \text{iff}
$$





(2)

Ein sehr wichtiges Ingenieurprinzip lautet:

Beseitige unnötige Redundanz in deiner Konstruktion.

Wir folgen diesem Prinzip, entfernen die Redundanz in Gl. (2) und erhalten so die „verkürzte 2x3 Determinanten“- Darstellung (Sarrusregel; Array + Navigation + Operation a±b*c)

$$area_{\triangle P_1P_2P_3} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} \begin{matrix} >0 \\ =0 \\ <0 \end{matrix} \quad \text{iff} \quad \circlearrowleft\!\!-\!\!\circ\!\!-\!\!\circlearrowright \qquad (3.1)$$

Formeldesign entsprechend dem Prinzip “kreative visuelle Resonanz”. Das genannte „Vorzeichengeschenk“, das von Gl.(1) auf Gl. (2) übergeht und auch durch die Determinantenverkürzung zu Gl. (3.1) nicht verloren geht, werden wir später in Abschn. 70.4.1 zur Konstruktion eines Positionscodes $\triangle ABC - Punkt\ P$ in einem kartesischen Koordinatensystem produktiv nutzen.

Dabei werden wir erkennen, dass dieses Geschenk nur in einem Ensemble miteinander verbundener Dreiecke seine Wirkung entfaltet!

Zielgerichtetes Ausschöpfen aller potentiellen Möglichkeiten, „formula engineering“.

Einwurf des numerischen advocatus diaboli:

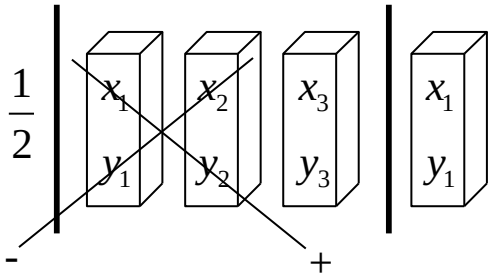
$$\underbrace{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}}_{\text{hier 6 Multiplikationen,}} = \underbrace{\begin{vmatrix} (x_1 - x_2) & (x_1 - x_3) \\ (y_1 - y_2) & (y_1 - y_3) \end{vmatrix}}_{\text{hier nur 2!}} \qquad (3.2)$$

Diskussion!
Geometrische Interpretation!

Nun zwei Kommentare:

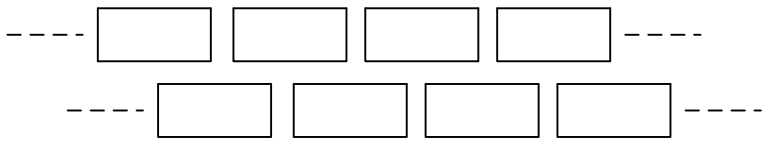
1. In meiner Bauwesen-inspirierten Imagination besteht die “verkürzte Determinanten” Gl.(3) aus 3 „Ziegelsteinen“ in Grenadierschicht, jeder Ziegelstein entspricht einem Eckpunkt des $\triangle P_1P_2P_3$:

$$\text{area}_{\triangle P_1P_2P_3} = \frac{1}{2}$$



(4)

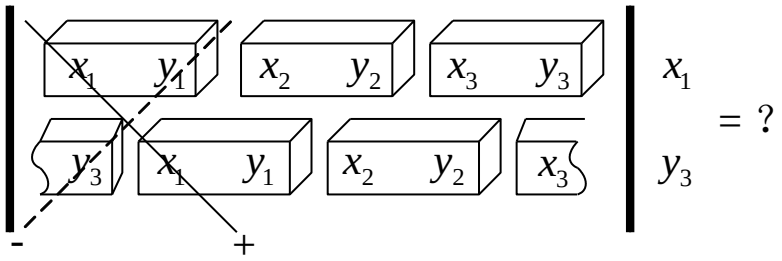
Diese Assoziation impliziert unmittelbar die Bauingenieur-, nicht Mathematik-geborene Frage: Wie ist es mit anderen Ziegelverbänden, z.B.: dem Läuferverband



,

in Bezug auf das $\triangle P_1P_2P_3$, mit anderen Werten ist die “Ziegelidee” eine produktiv ausbaubare Idee?

Werfen wir dazu einen Blick auf die nachstehende verkürzte 2x6 Determinante:



(5.1)

Die Sarrusregel ergibt hier nach Umformung:

$$
\begin{aligned}
? &= x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + x_3^2 + y_3^2 - x_1x_3 - y_1y_3 \\
&\quad - x_1x_2 - y_1y_2 - x_2x_3 - y_2y_3 \\
&= \frac{1}{2}((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 \\
&\quad + (y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2)
\end{aligned}
$$

$$
= \frac{1}{2}(\overline{P_1P_2}^2 + \overline{P_2P_3}^2 + \overline{P_3P_1}^2) \text{ von } \triangle P_1P_2P_3 ! \qquad (5.2)
$$

Ein erster Hinweis: vielleicht sind wir auf einen Erzgang gestoßen! Später mehr.

Literatur zu Ziegelverbänden:

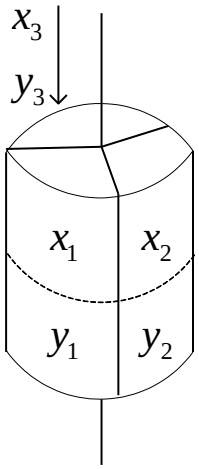
** R. Field. Geometric Patterns from Tiles and Brickworks. Targuin Publications 2004.

** http://en.wikipedia.org/wiki/Brickwork

** http://www.bswals.at/wrl-m/ziegel/grundl.htm4

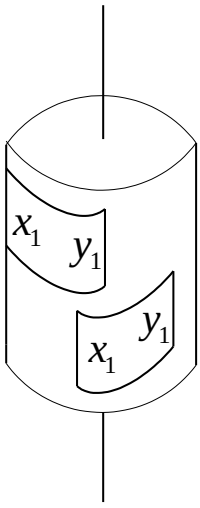
2. Zurück zum Ausgangspunkt.
   Eine andere, Mechanik- nicht Mathematikgeborene Interpretation von Gl.(3):

   Die 2D “verkürzte Determinante” ist eine 2D Abwicklung eines 3D Datenzylinders, im Falle der Grenadierschicht:



Dz. mit 2 Spuren und 3 Segmenten (korrespondierend zu den 2 Zeilen und 3 Spalten der verkürzten 2x3 Determinante, die Ziegeln der Grenadierschichte entsprechen den Zylindersegmenten)

Im Falle des Läuferverbandes:



Dz. mit 2 Spuren und 6 Segmenten

(6.1,2)

Abwicklungen (•):

x_1	x_2	x_3
y_1	y_2	y_3

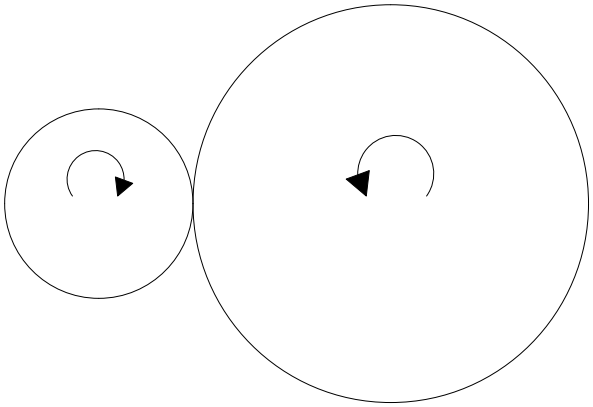
;

x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3
y_3	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3

(7, 8)

Das “mechanische Modell” Datenzylinder impliziert interessante Erweiterungen:

** Datenzylindergetriebe



** Möbius-Datenband
vgl. http://de.wikipedia.org/wiki/Möbiusband

Anmerkung:
Der historisch erste Datenzylinder war das Mesopotamische Rollsiegel.
http://en.wikipedia.org/wiki/Cylinder_seal

70.2

70.2. Eine erste Erweiterung: vom Dreieck zum Viereck

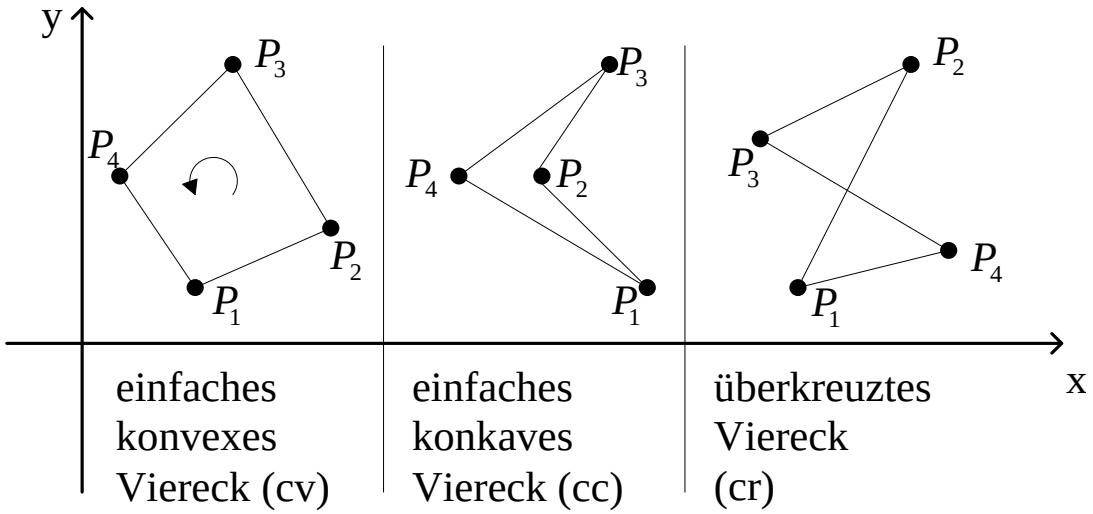
Die Hauptfrage ist hier zunächst: erweisen sich die beim Dreieck eingeführten Werkzeuge/ Denkmodelle

** verkürzte Determinante
** Ziegelverbände
** Datenzylinder

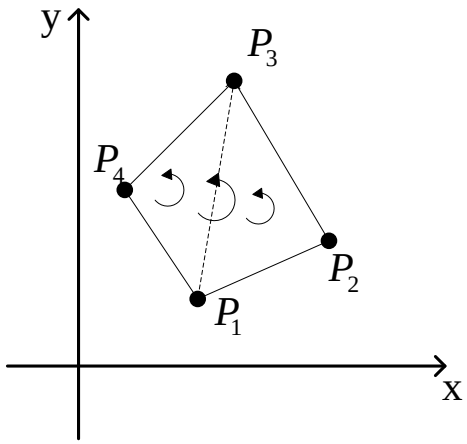
auch beim Viereck (und später beim n-Eck) als genau so tragfähig?
Testen wir es!

70.2.1. Flächeninhalt und Summe der Seitenquadrate

Erster Erweiterungsschritt vom Dreieck mit den Gln.(1 bis 6) zum ebenen Viereck.



Wir starten mit dem einfachen konvexen Viereck



$$area_{\square}P_1P_2P_3P_4 = area_{\triangle}P_1P_2P_3 + area_{\triangle}P_1P_3P_4 \tag{9}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} >0 \\ =0 \\ <0 \end{matrix} \quad \text{iff} \quad \text{& ?}$$

\- - + - + + +

Eine überzeugende Erweiterung!

Unmittelbar erweiterbar auf das konvexe n-Eck in 2D!

Vgl. auch

** Weisstein, Eric W. “Polygon Area.” From Mathworld—A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/Polygonarea.html

Zum Vergleich: in klassischer Determinantennotation haben wir

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \} \text{ Redundanz} \\ \\ \} \text{ Information} \end{matrix} \qquad (10)$$

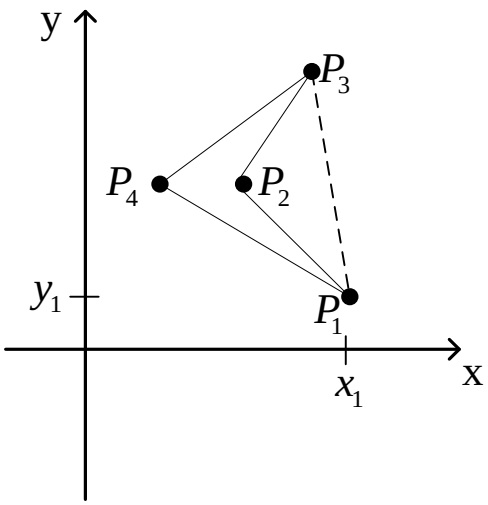
Versuchen Sie, basierend auf den Gln.(2) und (10), ähnliche klassische Determinantendarstellungen für den Flächeninhalt eines einfachen konvexen 2D Fünfeck, Sechseck, … zu finden.

In ähnlicher Weise wie in Gl.(9) finden wir für die Summe der Seitenquadrate des einfachen konvexen 2D Viereck:

$$\overline{P_1P_2}^2 + \overline{P_2P_3}^2 + \overline{P_3P_4}^2 + \overline{P_4P_1}^2 = 2 \begin{array}{|cc|cc|cc|cc|} \hline x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & x_3 & y_3 & x_4 & y_4 \\ \hline y_4 & x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & x_3 & y_3 & x_4 \\ \hline \end{array} \qquad (11)$$

Auch hier eine überzeugende Erweiterung, gültig auch für cc und cr.
Und unmittelbar auf das 2D n-Eck erweiterbar.

Nun aber zum einfachen konkaven Rechteck in 2D:



$$area_{\square}P_1P_2P_3P_4 = area_{\triangle}P_1P_3P_4 - area_{\triangle}P_1P_3P_2$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_3 & y_4 \end{vmatrix} - \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_2 \\ y_1 & y_3 & y_2 \end{vmatrix} \qquad (12)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}$$

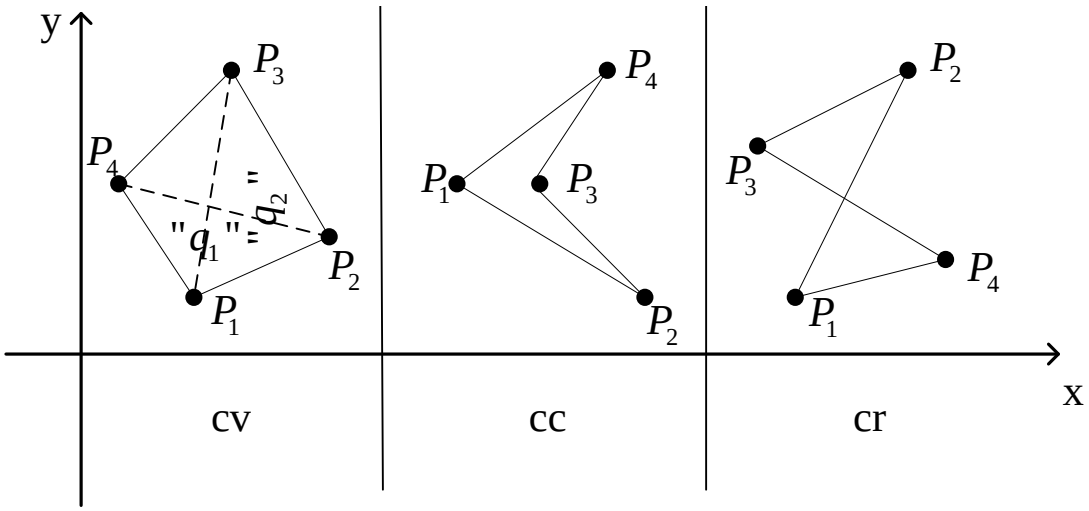
Die Ergebnisse Gln.(10) und (12) sind identisch, die Flächeninhaltsformel Gl.(10) gilt also für cv und cc!
Wie steht es mit cr?

Jetzt zu einem komplizierteren Problem.

70.2.2. Ein Viereck-Klassifikator

Gegeben ist ein 2D Viereck $\square P_1P_2P_3P_4$ durch die kartesischen Koordinaten seiner Eckpunkte $P_i = (x_i, y_i);\ i = 1,2,3,4.$

Gesucht ist ein Klassifikator, der allein durch Rechnung (ohne graphische Darstellung) den Viereckstyp cv, cc oder cr bestimmt.



Mit den Diskriminatoren:

$$q_1 = \frac{2\,area_{\triangle} P_1P_2P_4}{2\,area_{\square} P_1P_2P_3P_4} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}} \qquad (13.1)$$

$$q_2 = \frac{2\,area_{\triangle} P_1P_2P_3}{2\,area_{\square} P_1P_2P_3P_4} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}} \qquad (13.2)$$

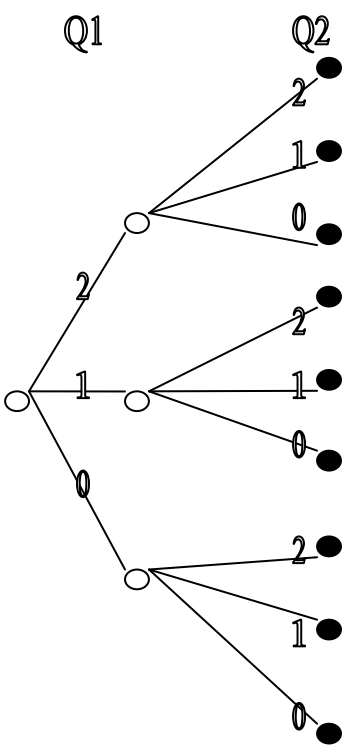
und der Quantifizierungsfunktion

$$Q_i = \begin{cases} 0 & q_i < 0 \\ 1 \quad \text{if} & 0 < q_i < 1 \\ 2 & 1 < q_i \end{cases} \tag{13.3}$$

erhalten wir einen sehr systematisch aufgebauten und aussagekräftigen Viereckklassifikator.

Wenn		dann ist das Viereck $\square P_1P_2P_3P_4$:	
Q_1	Q_2		
1	1	konvex (cv)	
0	1	konkav (cc), die konkave Ecke ist beim Endpunkt	P_1
1	0		P_2
2	1		P_3
1	2		P_4
0	2	überkreuzt (cr), die sich kreuzenden Seiten sind	$\overline{P_1P_2}$ und $\overline{P_3P_4}$
2	0		
0	0		$\overline{P_1P_4}$ und $\overline{P_2P_3}$
2	2		

und zugehörigen ternären Kodebaum

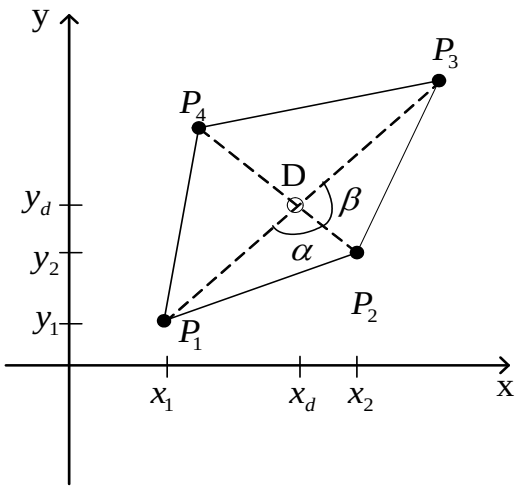


cr	$\overline{P_1P_4}$ und $\overline{P_2P_3}$
cc	P_3
cr	$\overline{P_1P_2}$ und $\overline{P_3P_4}$
cc	P_4
cv	
cc	P_2
cr	$\overline{P_1P_2}$ und $\overline{P_3P_4}$
cc	P_1
cr	$\overline{P_1P_4}$ und $\overline{P_2P_3}$

Beschreiben Sie den Lösungsweg vom Problem zum Ergebnis im Detail.
Anwendung: Kreuzungsdetektor in einer Folge von verbundenen Geraden-Segmente.

70.2.3. Winkel und Schnittpunkt der Diagonalen eines Vierecks

Gegeben ist ein 2D einfaches konvexes Viereck $\square P_1P_2P_3P_4$
durch die Koordinaten seiner Eckpunkte $P_i = (x_i, y_i)\ ;\ i = 1,2,3,4$



Gesucht sind verkürzte Determinanten Darstellungen für

1. die Winkel $\measuredangle P_4 \underline{P_1} P_2$, $\measuredangle P_1 \underline{P_2} P_3$, $\measuredangle P_2 \underline{P_3} P_4$, $\measuredangle P_3 \underline{P_4} P_1$,
2. die Koordinaten des Schnittpunktes der Diagonalen $D = (x_d, y_d)$
3. die Diagonalwinkel α und β.

Lösung 1

$$\tan \measuredangle P_4 \underline{P_1} P_2 = \frac{\begin{vmatrix} x_4 & x_1 & x_2 \\ y_4 & y_1 & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_4 & y_4 & x_1 & y_1 \\ y_1 & x_2 & y_2 & x_1 \end{vmatrix}} \tag{14}$$

Von $\tan \measuredangle P_4 \underline{P_1} P_2$ zu $\tan \measuredangle P_1 \underline{P_2} P_3$ etc. via zyklische Permutation.

$$\tan \measuredangle P_1 \underline{P_2} P_3 = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & x_2 & y_2 \\ y_2 & x_3 & y_3 & x_2 \end{vmatrix}} \tag{15}$$

$$\tan \measuredangle P_2 \underline{P_3} P_4 = \frac{\begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_4 \\ y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & x_3 & y_3 \\ y_3 & x_4 & y_4 & x_3 \end{vmatrix}} \tag{16}$$

$$\tan \measuredangle P_3 \underline{P_4} P_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_3 & x_4 & x_1 \\ y_3 & y_4 & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & x_4 & y_4 \\ y_4 & x_1 & y_1 & x_4 \end{vmatrix}} \qquad (17)$$

Beschreiben Sie den Lösungsweg im Detail.
Gelten die Gln.(14-17) auch für die Fälle cc und cr?

Lösung 2

Darstellung von D durch eine komplexe Zahl:

$$z_d = x_d + jy_d = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}} \qquad (18)$$

+ -

Erweiterung 3x4 verkürzte Determinante

2x4 verkürzte Determinante

Auch hier haben wir eine überzeugende Wiederspiegelung des gegebenen Vierecks, ganz im Gegensatz zu der nachstehenden unübersichtlichen 1D Zeichenkettendarstellung.

$$z_d = \frac{x_1 z_2 y_3 + x_2 z_3 y_4 + x_3 z_4 y_1 + x_4 z_1 y_2 - x_1 z_4 y_3 - x_2 z_1 y_4 - x_3 z_2 y_1 - x_4 z_3 y_2}{x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_4 + x_4 y_1 - x_1 y_4 - x_2 y_1 - x_3 y_2 - x_4 y_3} \tag{19}$$

Beschreiben Sie auch die Herleitung von Gl.(18) im Detail.
Finden Sie eine geometrische Interpretation für

$$\arg(z_d) = \arctan \frac{y_d}{x_d} \tag{20}$$

Gl.(18) ist gültig für cv und cc. Wie ist es aber für cr?

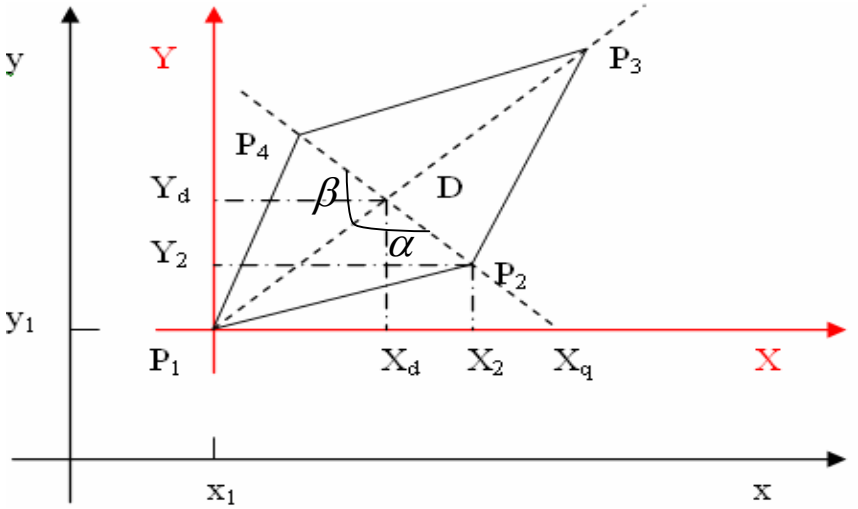
<u>Lösung 3</u>

$$\tan\alpha = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & x_3 & y_3 \\ y_4 & x_2 & y_2 & x_4 \end{vmatrix}} \tag{21}$$

$$\tan\beta = -\tan\alpha = \frac{\begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & x_4 & y_4 \\ x_1 & x_3 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}} \qquad (22)$$

Beschreiben Sie auch hier die Herleitung der Gln.(21,22) im Detail.

Herleitung:



We solve the given problem in the simplest way using a new coordinate system X – Y, connecting with the x-y-coordinate system by translation:

$$X = x - x_1$$
$$Y = y - y_1 \qquad (28)$$

That means: P_1 lies now in the origin of the new coordinate system, thus are all calculations simpler.

Angles in fig. $angle(P_3 P_1 Xaxis) = \lambda$; angle(P_1 Xaxis P_4)=μ (29)

$\triangle P_1 Xaxis D$: $\alpha + \lambda + \mu = \pi \rightarrow \alpha = \pi - (\lambda + \mu)$ (30)

Trig. funct.: $$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \cdot \tan y} \quad (31)$$

(30) and (31): $$\tan\alpha = \frac{\tan\pi - \tan(\lambda + \mu)}{1 + \tan\pi * \tan(\lambda + \mu)} \quad (32)$$

Trig. funct.: $$\tan\pi = 0 \quad (33)$$

(33), (32) and (31): $$\tan\alpha = -\tan(\lambda + \mu) = \frac{\tan\lambda + \tan\mu}{1 - \tan\lambda \cdot \tan\mu} \quad (34)$$

$\triangle P_3 P_1 Xaxis$: $$\tan\lambda = \frac{Y_3}{X_3} \quad (35)$$

$\triangle P_1 X asis P_4$: $$\tan\mu = \frac{Y_4 - Y_2}{X_2 - X_4} \quad (36)$$

(35), (36) and (34):

$$\begin{aligned}\tan\alpha &= -\frac{\frac{Y_3}{X_3} + \frac{Y_4 - Y_2}{X_2 - X_4}}{1 - \frac{Y_3}{X_3} * \frac{Y_4 - Y_2}{X_2 - X_4}} \\ &= \frac{(X_2 - X_4)Y_3 + X_3(Y_4 - Y_2)}{X_3(X_4 - X_2) + (Y_4 - Y_2)Y_3} \\ &= \frac{X_2Y_3 + X_3Y_4 - X_3Y_2 - X_4Y_3}{X_3X_4 - X_2X_3 + Y_3Y_4 - Y_2Y_3}\end{aligned} \quad (37)$$

(37) in shortened determinant notation:

$$\tan\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 0 & X_2 & X_3 & X_4 \\ 0 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & X_3 & Y_3 \\ Y_4 & X_2 & Y_2 & X_4 \end{vmatrix}} \qquad (38)$$

(28) in (38) (bdc cross word puzzle principle: here resubstitute (0,0) by P_1) →

$$\tan\alpha = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & x_3 & y_3 \\ y_4 & x_2 & y_2 & x_4 \end{vmatrix}} \qquad (39)$$

70.2.4. Schwerpunkt C eines Vierecks

Darstellung der Koordinaten des Schwerpunktes $C = (x_C, y_C)$ durch die komplexe Zahl $z_c = x_c + jy_c$

$$z_c = x_c + jy_c = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & x_2 & x_2 & x_3 & x_3 & x_4 & x_4 \\ z_1 & z_1 & z_2 & z_2 & z_3 & z_3 & z_4 & z_4 \\ y_1 & y_1 & y_2 & y_2 & y_3 & y_3 & y_4 & y_4 \end{vmatrix}}{3\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}} \qquad (42)$$

(+ / − diagonals; 3 by 8 verkürzte Determinante)

Man beachte: im allgemeinen ist $C \neq D$!
Gl.(42) ist eine überzeugende 2D Darstellung von z_c im Gegensatz zur korrespondierenden 1D Zeichenkettennotation vgl. die Gln.(18) und (19). Mit diesem motivierenden Rückenwind können Sie sich nun an die Mühsahl der Herleitung von Gl.(42) heranwagen.

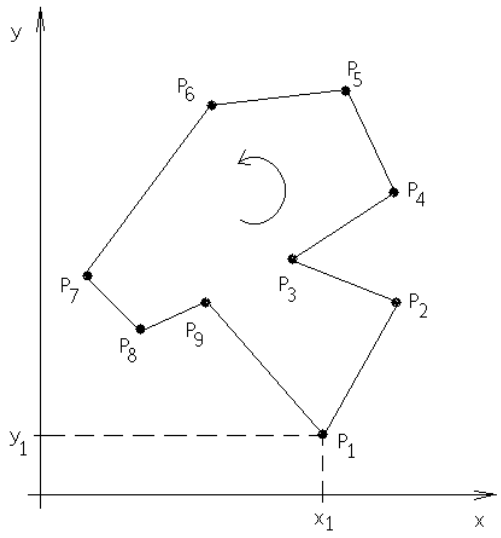
Man erkennt: Gl.(42) ist gültig für cv und cc, wie steht es mit cr?

Zusatzproblem:
Finden Sie eine Beziehung zwischen

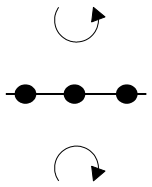
$$\arctan\frac{y_d}{x_d} \quad \text{und} \quad \arctan\frac{y_c}{x_c} \; .$$

70.3

70.3. Nun ein kurzer Ausflug vom Viereck zum einfachen non-cr 2D n-Eck



70.3.1. Flächeninhalt und Summe der Seitenquadrate

$$area\,\square P_1P_2P_3\cdots P_n = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & --- & x_n \\ y_1 & y_2 & y_3 & & y_n \end{vmatrix} \begin{matrix} >0 \\ =0 \\ <0 \end{matrix} \quad \text{iff} \quad \text{ & ?}$$

(57)

$$\overline{P_1P_2}^2 + \overline{P_2P_3}^2 + \overline{P_3P_4}^2 + \cdots + \overline{P_nP_1}^2 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & x_3 & y_3 & --- & x_n & y_n \\ y_n & x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & x_3 & y_3 & --- & x_n \end{vmatrix} \qquad (58)$$

70.3.2. Der Schwerpunkt $C = (x_C, y_C)$

$$z_c = \frac{1}{3}\frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & x_2 & x_2 & x_3 & x_3 & --- & --- & x_n & x_n \\ z_1 & z_1 & z_2 & z_2 & z_3 & z_3 & --- & --- & z_n & z_n \\ y_1 & y_1 & y_2 & y_2 & y_3 & y_3 & --- & --- & y_n & y_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & --- & x_n \\ y_1 & y_2 & y_3 & --- & y_n \end{vmatrix}} \qquad (61)$$

$$= \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3 \cdots + z_n) - \frac{1}{3}\frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & --- & x_n \\ z_1 & z_2 & z_3 & --- & z_n \\ y_1 & y_2 & y_3 & --- & y_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & --- & x_n \\ y_1 & y_2 & y_3 & --- & y_n \end{vmatrix}} \qquad (62)$$

Für den Spezialfall $n = 3$ ist

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{63.1}$$

$$z_c = \frac{1}{3}\left(z_1 + z_2 + z_3\right) \tag{63.2}$$

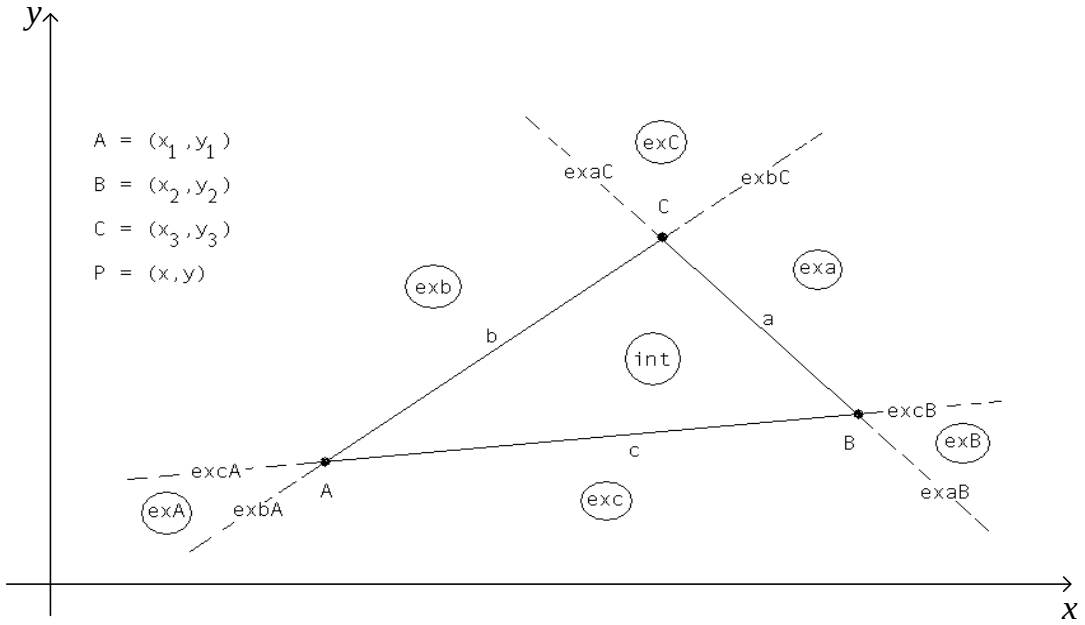
70.4

70.4. Zurück zum Dreieck

70.4.1. Ein Positionscode für die 2D Konstellation

** festes $\triangle ABC$
** beweglicher Punkt P

in einem kartesischen Koordinatensystem



Gegeben sind

** ein feststehendes $\triangle ABC$ durch die Koordinaten seiner Eckpunkte $A=(x_1,y_1),\ B=(x_2,y_2),\ C=(x_3,y_3)$

** und ein beweglicher Punkt $P=(x,y)$

in einem kartesischen Koordinatensystem.

Das $\triangle ABC$ definiert $19=3^3-2^2$ unterscheidbare Positionen für P.

Gesucht ist ein Positionscode $\triangle ABC$ - P unter Benutzung der verkürzten Determinantendarstellung basierend auf Gl.(3.1) (Vorzeichen des Flächeninhalts!).

Lösung

Codetabelle 1:

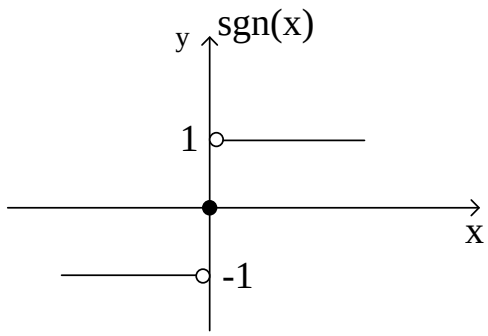
P=(x,y) is located at	if and only if $sgn(t_1)=$	$sgn(t_2)=$	$sgn(t_3)=$
int	+1	+1	+1
A	+1	0	0
B	0	+1	0
C	0	0	+1
a	0	+1	+1
b	+1	0	+1
c	+1	+1	0
exaB	0	+1	-1
exaC	0	-1	+1
exbA	+1	0	-1
exbC	-1	0	+1
excA	+1	-1	0
excB	-1	+1	0
exA	+1	-1	-1
exB	-1	+1	-1
exC	-1	-1	+1
exa	-1	+1	+1
exb	+1	-1	+1
exc	+1	+1	-1

$$t_1=\frac{\begin{vmatrix} x & x_2 & x_3 \\ y & y_2 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}} \qquad (65.1)$$

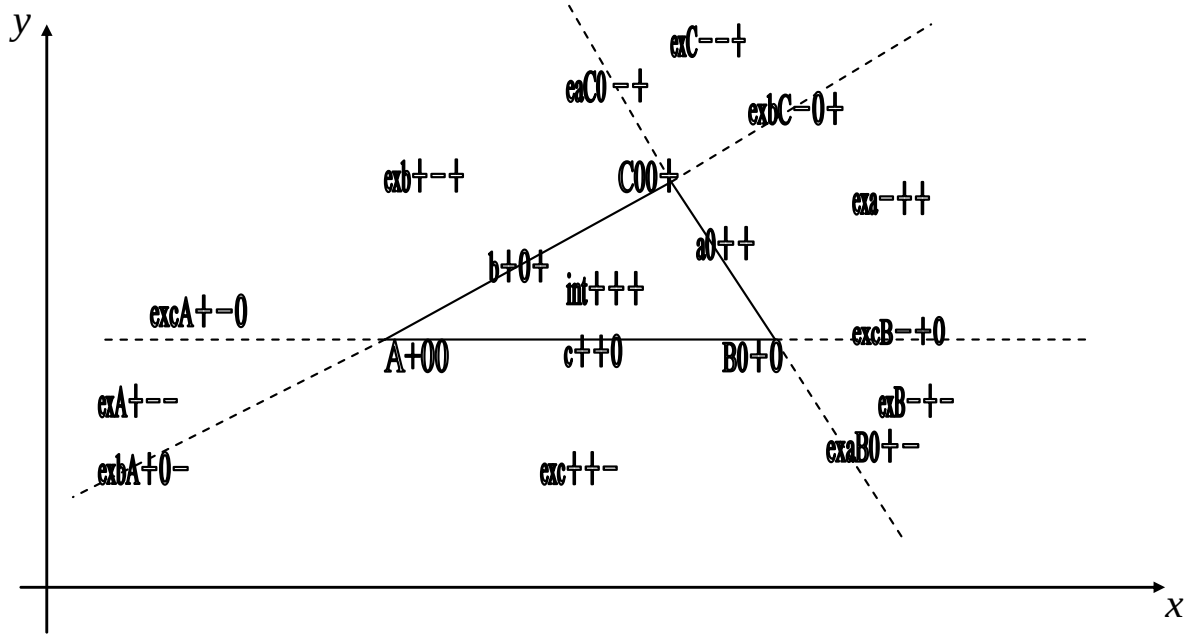
$$t_2=\frac{\begin{vmatrix} x_1 & x & x_3 \\ y_1 & y & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}} \qquad (65.2)$$

$$t_3=\frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x \\ y_1 & y_2 & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}} \qquad (65.3)$$

$$t_1+t_2+t_3=1 \qquad (65.4)$$



Codetabelle 2:



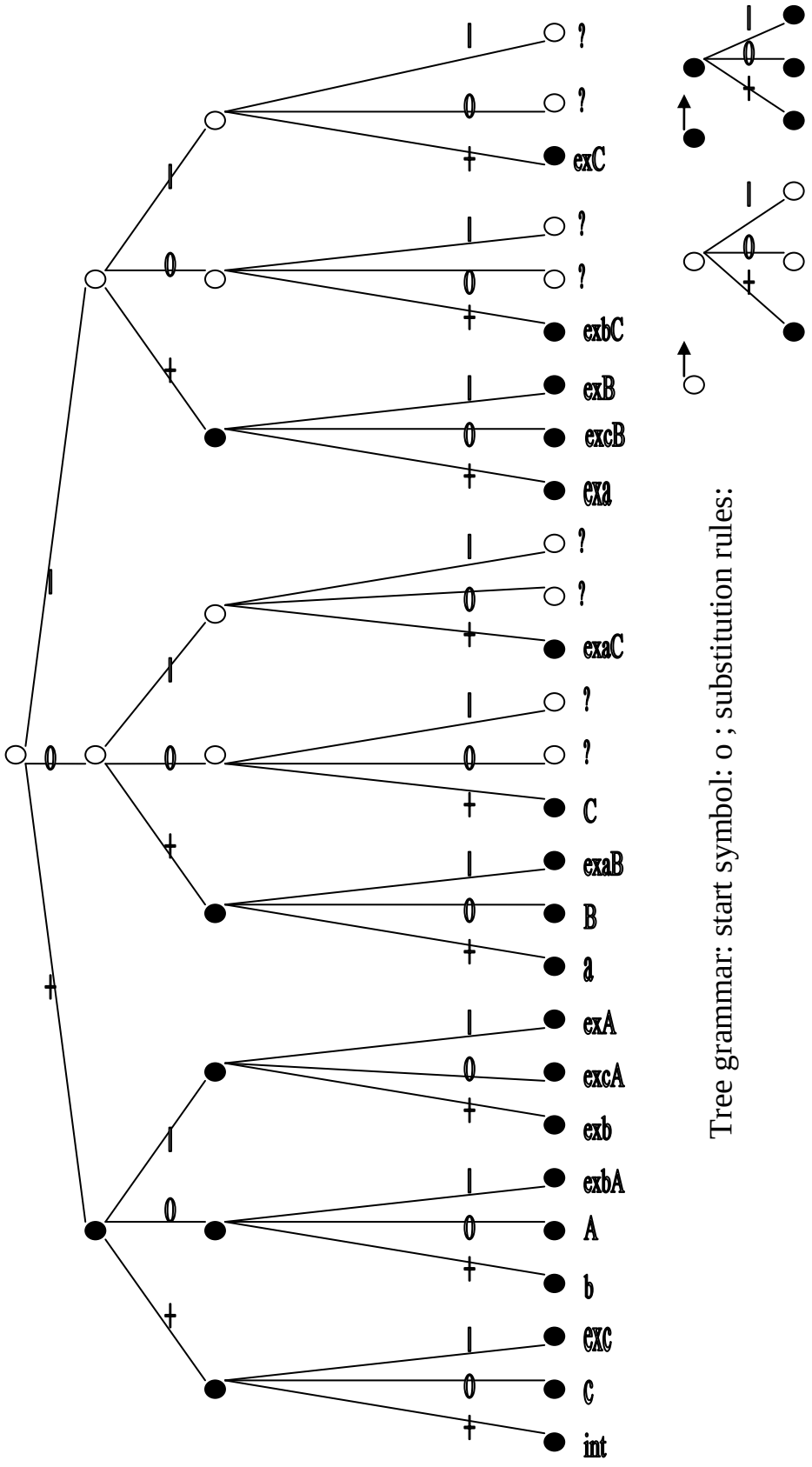
$$w = \mathrm{sgn}(t_1)\,\mathrm{sgn}(t_2)\,\mathrm{sgn}(t_3) \in \{-1, 0, +1\}^3 \qquad (65.5)$$

Die Gln (65.1,2,3) können via Cramersche Regel zu einer Matrizengleichung komprimiert werden:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (65.6)$$

Diese Gleichung kann als „Abbildungsgleichung“ $\triangle ABC$ *– Punkt P* **interpretiert werden. Diskutieren Sie diese Interpretation!**

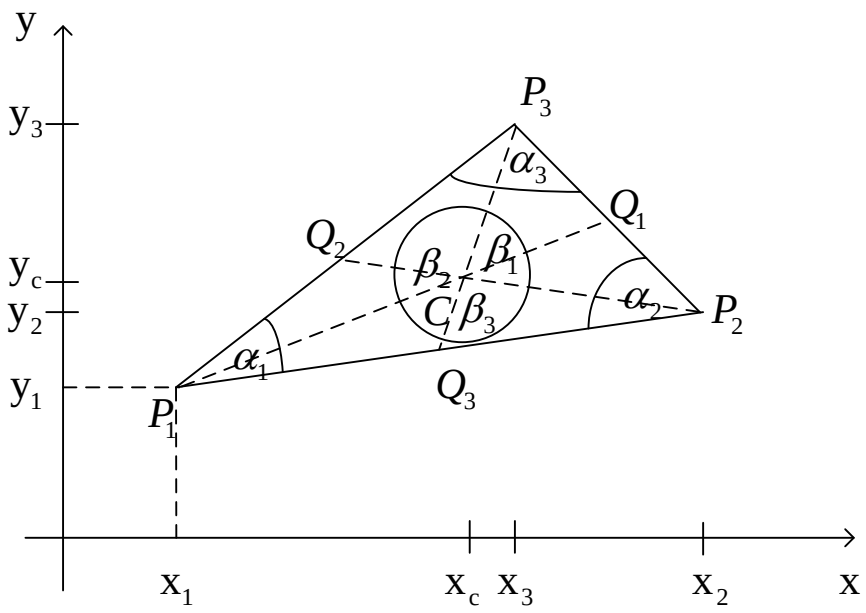
Codebaum:



Tree grammar: start symbol: o ; substitution rules:

Spezialfall

P ist der Schnittpunkt C des Dreiecks = Schnittpunkt der Seitenhalbierenden



$$x_c = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3);\ y_c = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3);\ t_{1c} = t_{2c} = t_{3c} = \frac{1}{3} \quad (66)$$

$$x_k = \frac{1}{9}(x_1 + 4x_2 + 4x_3);\ y_k = \frac{1}{9}(y_1 + 4y_2 + 4y_3) \quad (67.1)$$

$$t_{1k} = \frac{1}{9};\ t_{2k} = t_{2k} = \frac{4}{9} \quad (67.2)$$

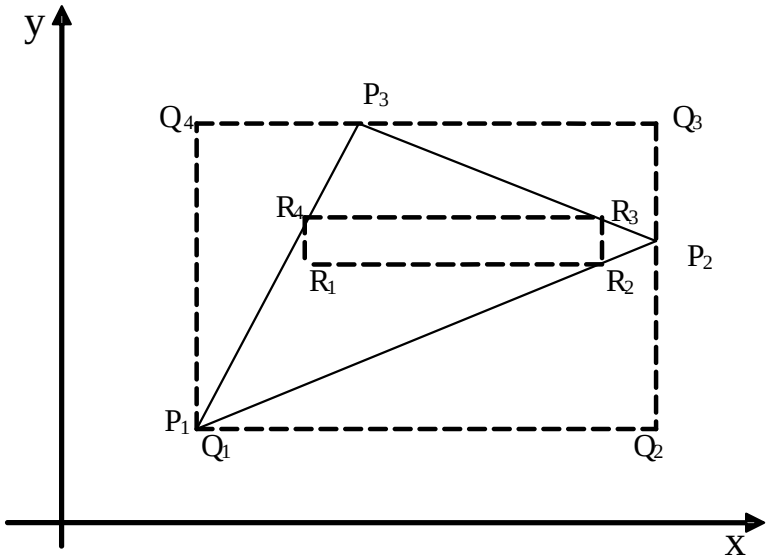
$$tan\ \alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & x_2 & y_2 \\ y_3 & x_1 & y_1 & x_3 \end{vmatrix}} \quad (71)$$

$$\tan\beta_1 = \frac{3\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & x_2 & y_2 & x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & x_3 & y_3 & x_2 & y_2 \\ y_3 & x_2 & y_2 & x_3 & y_3 & x_1 & y_1 & x_3 & y_3 & x_2 & y_2 & x_3 \end{vmatrix}} \qquad (72)$$

left wing Main panel right wing = triptych

70.4.2. Ein Extremwertproblem

Given a 2D triangle $\triangle P_1P_2P_3$ by the coordinates of their vertices $P_i = (x_i, y_i)\ ;\ i = 1,2,3$ in a Cartesian coordinate system.

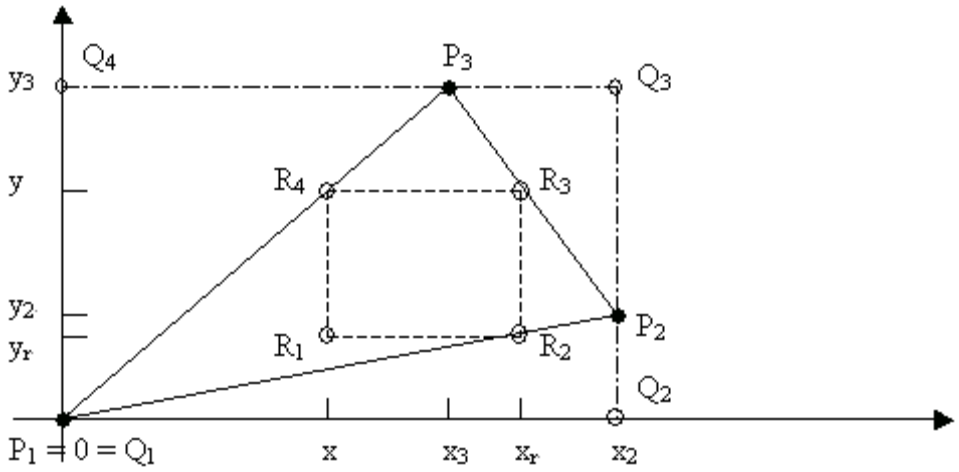


The rectangle $\square Q_1Q_2Q_3Q_4$ is the smallest axially parallel rectangle including the given triangle $\triangle P_1P_2P_3$.

- Find the vertex coordinates and the area of the largest axially parallel rectangle $\square R_1R_2R_3R_4$ includable into the given triangle $\triangle P_1P_2P_3$.
  Go the simplest way!
- Find the relation between $area(\square Q_1Q_2Q_3Q_4)$ and $area(\square R_1R_2R_3R_4)$.

Solutions

To solve the given problem in the simplest way but without restriction of validity, we translate the $\Delta P_1P_2P_3$ to the position $P_1 = (0,0)$; that means: P_1 lies in the origin of the x – y coordinate system, all calculations are so the simplest one.



- $area(\Delta P_1P_2P_3) = \frac{1}{2}(x_2y_3 - x_3y_2)$ (74)

  $area(\square Q_1Q_2Q_3Q_4) = x_2y_3$ (75)

  $area(\square R_1R_2R_3R_4) = (x_r - x)(y - y_r)$ (76)

- $line(P_1P_2):\ y_r = \frac{y_2}{x_2}x_r$ (77)

  $line(P_1P_3):\ y = \frac{y_3}{x_3}x$ (78)

  $line(P_2P_3):\ \frac{y - y_2}{x_r - x_2} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$ (79)

- (77) and (78) into (79) →

  $x_r - x = \frac{x_2y_3 - x_3y_2}{x_3(y_3 - y_2)}(x_3 - x)$ (80)

  $y - y_r = \frac{x_2y_3 - x_3y_2}{x_2x_3(y_3 - y_2)}(xy_3 - x_3y_2)$ (81)

- (80) and (81) into (76) →
  $area(\square R_1R_2R_3R_4) = f(x)$

$$f(x) = \underbrace{\frac{(x_2y_3 - x_3y_2)^2}{x_2x_3^2(y_3 - y_2)^2}}_{c>0}(x_3 - x)(xy_3 - x_3y_2) \tag{82}$$

$$\frac{df(x)}{dx} = c((x_3 - x)y_3 - (xy_3 - x_3y_2)) = 0$$

$$\rightarrow x = \frac{1}{2}\frac{x_3}{y_3}(y_2 + y_3) \tag{83}$$

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = -2cy_3 < 0 \rightarrow Max.! \tag{84}$$

- (83) with (84) into (82); (83) into (78), (80), (81) →

$$area(\square R_1R_2R_3R_4)_{\max} = (\frac{x_2y_3 - x_3y_2}{2})^2 \cdot \frac{1}{x_2y_3} \tag{85}$$

with

$$(x, y)_{\max} = (\frac{x_3}{y_3} \cdot \frac{y_2 + y_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}) \tag{86}$$

$$(x_r, y_r)_{\max} = (\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2}{x_2} \cdot \frac{x_2 + x_3}{2}) \tag{87}$$

- Result

$$R_1 = (x, y_r) = (\frac{x_3}{y_3} \cdot \frac{y_2 + y_3}{2}, \frac{y_2}{x_2} \cdot \frac{x_2 + x_3}{2}) \tag{88}$$

$$R_2 = (x_r, y_r) = (\frac{x_2 + y_3}{2}, \frac{y_2}{x_2} \cdot \frac{x_2 + x_3}{2}) \tag{89}$$

$$R_3 = (x_r, y_r) = (\frac{x_2 + y_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}) \tag{90}$$

$$R_4 = (x, y) = (\frac{x_3}{y_3} \cdot \frac{y_2 + y_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}) \tag{91}$$

$$area(\square R_1R_2R_3R_4)_{\max} = (\frac{x_2y_3 - x_3y_2}{2})^2 \cdot \frac{1}{x_2y_3} \tag{92}$$

(85) with (74) and (75) →

$$area(\square Q_1Q_2Q_3Q_4)\cdot area(\square R_1R_2R_3R_4)_{\max} = (area(\Delta P_1P_2P_3))^2 \rightarrow \quad (93)$$

$$\underline{\underline{area(\Delta P_1P_2P_3) = g(area(\square Q_1Q_2Q_3Q_4), area(\square R_1R_2R_3R_4)_{\max})}} \quad (94.1)$$

In Worten:
Der Flächeninhalt eines Dreiecks $\Delta P_1P_2P_3$ in einem kartesischen Koordinatensystem ist das geometrische Mittel aus den Flächeninhalten des achsparallelen minimalen umgeschriebenen Rechtecks $\square Q_1Q_2Q_3Q_4$ und des achsparallelen maximalen eingeschriebenen Rechtecks $\square R_1R_2R_3R_4$.

arithmetisches
harmonisches } Mittel

$$a(x,y) = \frac{1}{2}(\mathrm{x}+\mathrm{y})$$

$$h(x,y) = \frac{2xy}{x+y} \quad (94.2)$$

$$g(x,y) = \sqrt{xy}$$

Finden Sie einen einfacheren Weg zu diesem einfachen Ergebnis; nicht über die komplizierte Herleitung mittels Differentialrechnung, nur innerhalb der linearen Algebra.

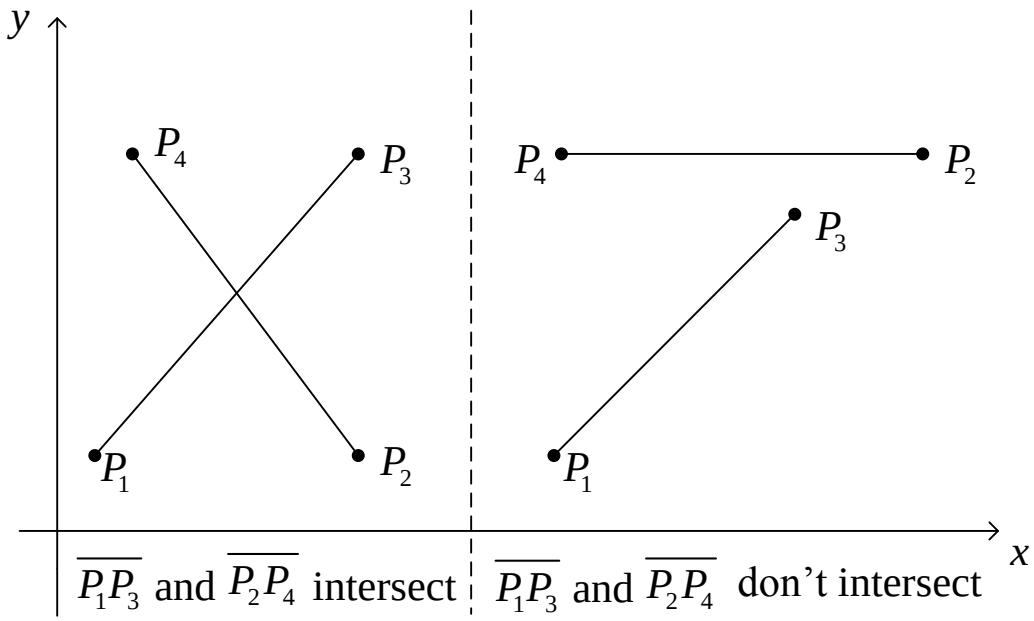
Gl. (94.1) impliziert unmittelbar die Fragen

$$area(\Delta P_1P_2P_3) = a(area\,\square Q_1Q_2Q_3Q_4, X) \quad (94.3)$$

$$area(\Delta P_1P_2P_3) = h(area\,\square Q_1Q_2Q_3Q_4, \mathrm{Y}) \quad (94.4)$$

Berechnen Sie X und Y und interpretieren Sie die Ergebnisse geometrisch.

70.4.3. Schnittpunkt oder nicht?



Verify and discuss!
The line segments $\overline{P_1P_3}$ and $\overline{P_2P_4}$ intersect in 2D if and only if

$$\frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_4 & x_3 \\ y_1 & y_4 & y_3 \end{vmatrix}} < 0 \quad \text{and} \quad \frac{\begin{vmatrix} x_2 & x_1 & x_3 \\ y_2 & y_1 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}} < 0 \tag{95}$$

in the point $D=\left(x_d,\ y_d\right); z_d = x_d + jy_d$

$$z_d = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}} \tag{96}$$

and form at D the angle $\measuredangle$

$$\tan\measuredangle = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & x_3 & y_3 \\ y_4 & x_2 & y_2 & x_4 \end{vmatrix}} \tag{97}$$

70.5

Auf der Suche nach weiteren Anwendungsfeldern für das Notierungssystem 2DvD+3Dz

70.5. A Pascal's triangle story

70.5.1. Pascalsches Dreieck [1]

1										
1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	

(100)

70.5.2. Red & Blue Determinanten und Pi Quadrat

$$r(k=7)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 15 & 15 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 35 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 28 & 70 & 28 \end{vmatrix} \tag{101.1}$$

Rekursionsgleichung:

$$r(k)=\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i-1}\binom{k+1}{k+1-2i}r(k-i)$$

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i}\binom{k+1}{k+1-2i}r(k-i)=0 \tag{101.2}$$

$$r(0)=0,\ r(1)=1$$

$$b(k=7)=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 20 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 21 & 35 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 56 & 56 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 36 & 126 & 84 \end{vmatrix} \tag{102.1}$$

Finden Sie die Rekursionsgleichung (102.2) für b(k).

$$\lim_{k\to\infty}\binom{2k+4}{2}\frac{r(k)}{r(k+1)}=\frac{\pi^2}{2}$$

(101.3)

$$\lim_{k\to\infty}\binom{2k+6}{3}\frac{b(k)}{b(k+1)}=\frac{4\pi^2}{3}$$

(102.3)

70.5.3 Red Wertetabelle

$k \quad f(k)=\binom{2k+4}{2}\frac{r(k)}{r(k+1)}\to\frac{\pi^2}{2}$ → transzendent!

1 5.0

2 4.9411764705882352941..

3 4.935483870967741935 5..

4 4.934876989869753979 7..

5 4.934803118434457259 2..

6 4.934802302476570680 2..

7 4.934802211868223784 8..

8 4.934802201802462333 8..

9 4.934802200684462774 1..

10 4.934802200560210664 1..

11 4.9348022005464050098..

12 4.934802200544871053 7..

13 4.934802200544700614 3..

14 4.934802200544681676 6..

15 4.934802200544679572 4..

16 4.934802200544679338 6..

17 4.934802200544679309 8..

18 4.934802200544679309 5..

→19 4.934802200544679309 4..

20 4.934802200544679309 4..

$$\frac{\pi^2}{2} = 4.934802200544679309 4..$$

Die Wertetabelle zeigt:

die Sequenz $\langle f(k)\rangle_{k=1}^{\infty}$ konvergiert linear

1* der Differenzenquotient konvergiert gegen einen endlichen Grenzwert

$$df = \lim_{k\to\infty} df(k) = \lim_{k\to\infty} \frac{f(k) - f(k+1)}{f(k+1) - f(k+2)} = 9 \in \mathbb{N}! \tag{103}$$

$$df(k+1) \approx df(k), \tag{104}$$

2* implizit und in verkürzter Determinantendarstellung

$$\lim_{k\to\infty}\begin{vmatrix} f(k) & f(k+1) & f(k+2) \\ f(k+1) & f(k+2) & f(k+3) \end{vmatrix} = 0 \qquad (105)$$

Interpretation:

2* Mit steigendem k liegen die drei aufeinanderfolgenden Punkte $(f(k), f(k+1))$, $(f(k+1), f(k+2))$ und $(f(k+2), f(k+3))$ immer genauer auf einer Geraden.

1* Der Anstieg dieser Geraden ist df(k) → df (hier 9), ein Maß für die „Konvergenzgeschwindigkeit".

70.5.4 Triple acceleration

Die gegebene Sequenz $\langle f(k)\rangle_{k=1}^{\infty} \to \frac{\pi^2}{2}$ kann mittels des Tripelaccelerators

1* in expliziter Notation

$$f1(k) = \frac{\begin{vmatrix} f(k) & f(k+1) \\ f(k+1) & f(k+2) \end{vmatrix}}{f(k) - 2f(k+1) + f(k+2)} \qquad (106.1)$$

vgl. [2],

2* in implizierter Notation, verkürzte Determinantendarstellung

$$\begin{vmatrix} f(k) & f1(k) & f1(k) & f(k+1) \\ f(k+1) & f(k+1) & f(k) & f(k+2) \end{vmatrix} = 0 \qquad (106.2)$$

in eine schneller konvergierende Sequenz

$$\langle f1(k) \rangle_{k=1}^{\infty} \to \frac{\pi^2}{2}$$

transformiert werden:

$$k \quad f1(k) = \frac{\begin{vmatrix} f(k) & f(k+1) \\ f(k+1) & f(k+2) \end{vmatrix}}{f(k) - 2f(k+1) + f(k+2)} \to \frac{\pi^2}{2}$$

1	4.934873949579831932 8
2	4.934804570473071831 7
3	4.934802286620000067 8
4	4.934802203820408730 8
5	4.934802200672363823 1
6	4.934802200549718598 1
7	4.934802200544879484 7
8	4.934802200544687287 7
9	4.934802200544679628 0
10	4.934802200544679322 1
11	4.934802200544679309 9
12	→ 4.934802200544679309 4
13	4.934802200544679309 4

** Diskutieren Sie Genesis, Struktur, geometrische Interpretation und mögliche Extensionen von Gl. (106.2).

** Was geschieht, wenn man die

Tripelacceleration Gl. (106) auf die

$$\text{Sequenz } \left\langle f1(k)\right\rangle_{k=1}^{\infty} \to \frac{\pi^2}{2} \quad \text{(u.s.f.)}$$

anwendet? Acceleratorkaskade?

** Versuchen Sie die Tripelacceleration Gl.(106) in die Rekursionsgleichung (101.2) zu integrieren, um so eine von vornherein besser konvergierende Rekursionsgleichung für r1(k) zu erhalten.

** Wie könnten mechanische, elektrische, biologische, … Analoga der Tripelacceleration Gl.(106) aussehen?

70.5.5 Go to Blue

$$\lim_{k\to\infty}\binom{2k+4}{2}\frac{r(k)}{r(k+1)} = \frac{\pi^2}{2} \qquad (101.3)$$

$$\lim_{k\to\infty}\binom{2k+6}{3}\frac{b(k)}{b(k+1)} = \frac{4\pi^2}{3} \qquad (102.3)$$

Führen Sie nun die Untersuchungen 70.5.3 und 70.5.4 auch mit Blue durch.

70.5.6 Red & Blue und die Bernoulli Zahlen [3]

$$r(k) = (-1)^k 2(2^{2(k+1)} - 1)B_{2(k+1)} \qquad (107.1)$$

$$b(k) = (-1)^k (2k+3)[(k+2)!]B_{2(k+1)} \qquad (107.2)$$

70.5.7 Red & Blue and Φ^2

The quotient of two immediately consecutive

$$\begin{cases} \text{row sums} \\ \text{column sums} \end{cases}$$ of the determinants $r(k)$ and

$b(k)$ converges to $\begin{cases} \Phi^2 = \frac{1}{2}(3+\sqrt{5}) \\ 2 \end{cases}$ for k to ∞

Läßt sich aus *red(k)* bzw. *blue(k)* eine „Fibonacci Bomb“ (siehe Unit 30.1) generieren?

70.6

Quadratische Konvergenz

In Unit 1 ist ein quadratisch konvergierender Rekursionsprozess beschrieben. Für den Differenzenquotient

$$df(k) = \frac{f(k) - f(k+1)}{f(k+1) - f(k+2)}$$

der generierten Wertesequenz $\langle f(k) \rangle_{k=1}^{\infty}$ gilt für steigendes k mit steigender Genauigkeit

$$df(k+1) \approx (df(k))^2 , \tag{108}$$

nach Umformung also

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} (& fff''+ ff'f'''+ ff'f'''+ f'f'f'' \\ & + f'f'f''+ f'f'f''+ f'f'f''+ f''f''f'' \\ & - fff'''- ff'f''- ff'f''- f'f'f' \\ & - f'f'f'''- f'f''f''- f'f''f''- f'f''f'') = 0\end{aligned} \tag{109}$$

$$f = f(k); \quad f' = f(k+1); \quad f'' = f(k+2); \quad f''' = f(k+3)$$

Formen Sie Gl. (109) nun in verkürzte Determinantendarstellung um. Diskutieren Sie die erhaltene Struktur.

70.7. Zusammenhang mit Operationen der Vektoralgebra (Skalarprodukt, Vektorprodukt, Spatprodukt) und der Vektoranalysis

Marschrichtung Feldtheorie (Elektrodynamik, Gravodynamik)

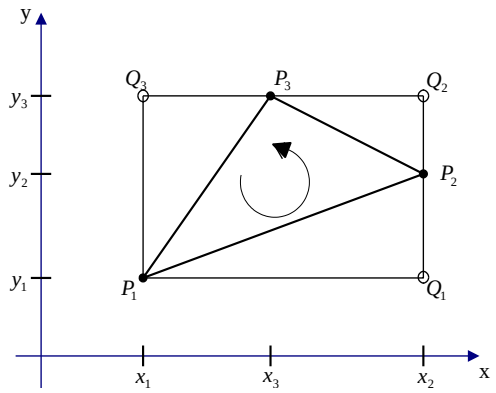
→ Unit 100

References

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Pascal's_triangle
[2] R.L. Burden, J.D. Faires. Numerical Analysis. 2.5. ISBN 0-534-38216-9
[3] http://de.wikipedia.org/wiki/Bernoulli-Zahl

70.8 Zurück zum Basislager 70.1 und step-by-step Aufstieg zum Gipfel 70.4.1

Wir starten mit einem einfachen geometrischen Problem.



Gegeben ist ein Dreieck $\triangle P_1P_2P_3$ durch die kartesischen Koordinaten seiner Eckpunkte $P_i = (x_i, y_i);\ i = 1,2,3$, die einfachste Interaktion zwischen diesen drei Punkten P_1, P_2 und P_3.

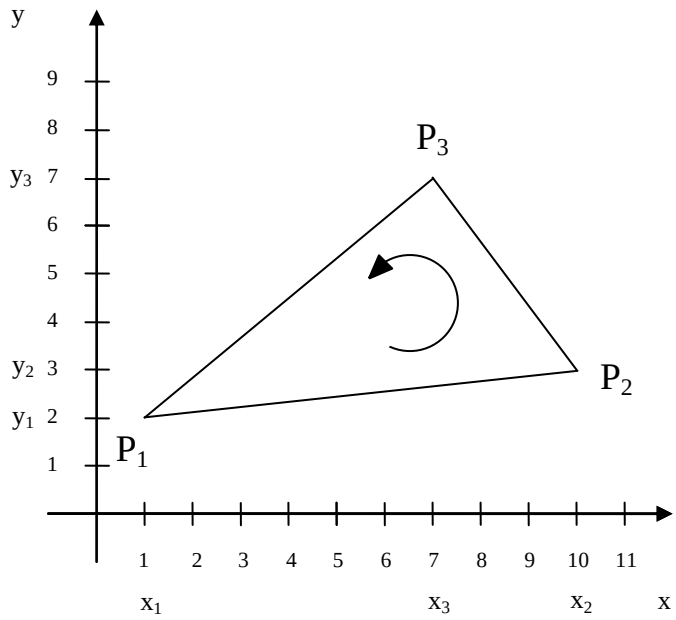
Gesucht ist ein Formelausdruck für den Flächeninhalt von $\triangle P_1P_2P_3$ in Funktion der Koordinaten x_i und y_i. Zu seiner Herleitung soll der einfachste und kürzeste Weg beschritten werden.

Lösung durch Einbettung von $\triangle P_1P_2P_3$ in das kleinste, umschließende, achsparallele Rechteck $\square P_1Q_1Q_2Q_3$:

$$
\begin{aligned}
area\Delta P_1P_2P_3 = \quad & area\square P_1Q_1Q_2Q_3 - area\Delta P_1Q_1P_2 - area\Delta P_2Q_2P_3 \\
& - area\Delta P_3Q_3P_1 \\
= \quad & (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) - \\
& \frac{1}{2}(x_2 - x_3)(y_3 - y_2) - \frac{1}{2}(x_3 - x_1)(y_3 - y_1) \\
= \quad & \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

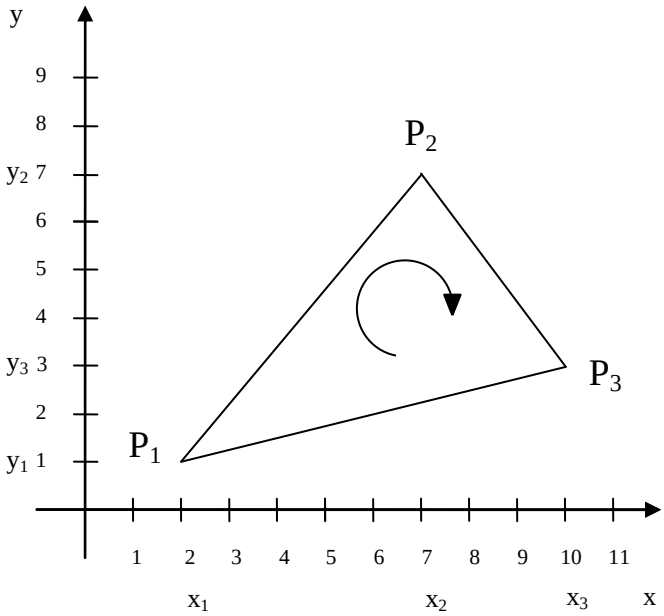
1D Zeichenkettennotation, man beachte die hochgradige innere Symmetrie in letzterem Ausdruck!

Nun testen wir Gl. (1) mit <u>drei</u> numerischen Beispielen:



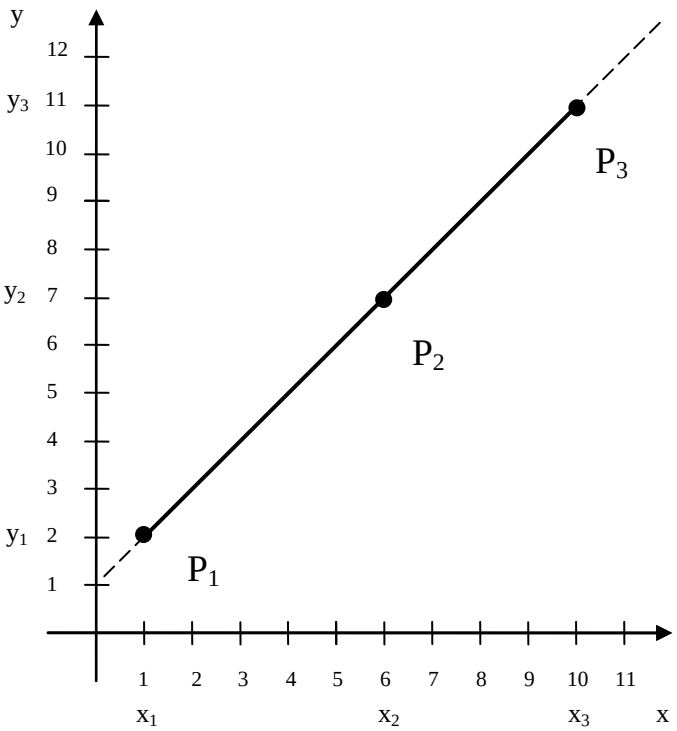
$P_1 = (1,2);\ P_2 = (10,3);\ P_3 = (7,7)$

$area_{\triangle} P_1P_2P_3 = 19,5$



$P_1 = (2,1);\ P_2 = (7,7);\ P_3 = (10,3)$

$area_{\triangle} P_1P_2P_3 = -19$!



$P_1 = (1,2);$

$P_2 = (6,7);$

$P_3 = (10,11)$

$area_{\triangle} P_1P_2P_3 = 0$

$P_{1,}\ P_2$ und P_3 liegen auf der Geraden $y = x + 1.$

Diese Beispiele zeigen:

Gl.(1) liefert neben dem Absolutwert des Flächeninhalts (der ja nach Definition immer positiv ist), noch zusätzlich ein Vorzeichen, das den Umlaufsinn $P_1 \to P_2 \to P_3$ charakterisiert:

positiver math. Drehsinn $\to$ +

negativer math. Drehsinn $\to$ –

** Erklären Sie anhand der Herleitung von Gl. (1), woher dieses Vorzeichen kommt.

Liegen P_1, P_2 und P_3 auf einer Geraden – und das ist hier der Fall für $y_i = x_i + 1;\ \ i = 1,2,3 -$, dann ergibt Gl.(1) richtig

$area\triangle P_1P_2P_3 = 0$

** Was ergibt Gl.(1) wenn x_i und y_i je zwei aufeinanderfolgende Primzahlen sind?

Zwei Beispiele

1) $P_1 = (3,5);\ P_2 = (13,17);\ P_3 = (23,29)$

$\to area\triangle P_1P_2P_3 = 0$!

P_1, P_2 und P_3 liegen auf einer Geraden:

$$y = \frac{6}{5}x + \frac{7}{5}$$

Finden Sie mehr aufeinanderfolgende Primzahlpaare (x,y), die auf dieser Geraden oder auf einer anderen Geraden liegen.

Diskutieren Sie diese Kollinearitäten.

2) $P_1 = (7,11);\ P_2 = (23,29);\ P_3 = (41,43)$

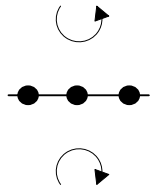
$\to area\triangle P_1P_2P_3 = -50$

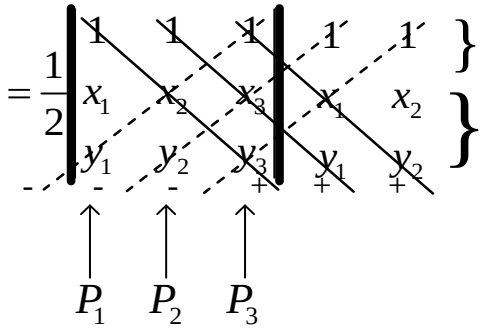
** Später wollen wir der Frage nachgehen, wie man dieses zunächst nicht erwartete (+,0,-) – Geschenk produktiv nutzen kann.

Zunächst aber zurück zu Gl.(1).

Die klassische 2D Determinantennotation von Gl. (1) wiederspiegelt das gegebene geometrische Objekt weit überzeugender als Gl.(1) selbst:

$$area_{\triangle P_1P_2P_3} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} >0 \\ =0 \\ <0 \end{matrix} \quad \text{iff}$$





(2)

Formeldesign entsprechend dem Prinzip “kreative visuelle Resonanz”, formula engineering.

Ein sehr wichtiges Ingenieurprinzip lautet:

Beseitige unnötige Redundanz in deiner Konstruktion.

Wir folgen diesem Prinzip, entfernen die Redundanz in Gl. (2) und erhalten so die „verkürzte 2x3 Determinanten“- Darstellung (Sarrusregel; Array + Navigation + Operation a±b*c)

$$area_{\triangle P_1P_2P_3} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} \begin{matrix} >0 \\ =0 \\ <0 \end{matrix} \quad \text{iff}$$



(3.1)

Das genannte „Vorzeichengeschenk“, das von Gl.(1) auf Gl. (2) übergeht und auch durch die Determinantenverkürzung zu Gl. (3.1) nicht verloren geht – wir überprüfen das –

- $P_1 = (1,2);\ P_2 = (10,3);\ P_3 = (7,7)$

  $$\rightarrow area\Delta P_1P_2P_3 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 10 & 7 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 19,5 \qquad \text{ok}$$

- $P_1 = (2,1);\ P_2 = (7,7);\ P_3 = (10,3)$

  $$\rightarrow area\Delta P_1P_2P_3 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 7 & 10 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -19 \qquad \text{ok}$$

- $P_1 = (1,2);\ P_2 = (6,7);\ P_3 = (10,11)$

  $$\rightarrow area\Delta P_1P_2P_3 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 6 & 10 \\ 2 & 7 & 11 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{ok}$$

  P_1, P_2 und P_3 liegen auf der Geraden $y = x + 1$.

werden wir nun in Abschn. 70.4.1 zur Konstruktion eines Positionscodes $\triangle ABC - Punkt\ P$ in einem kartesischen Koordinatensystem produktiv „verwerten“.

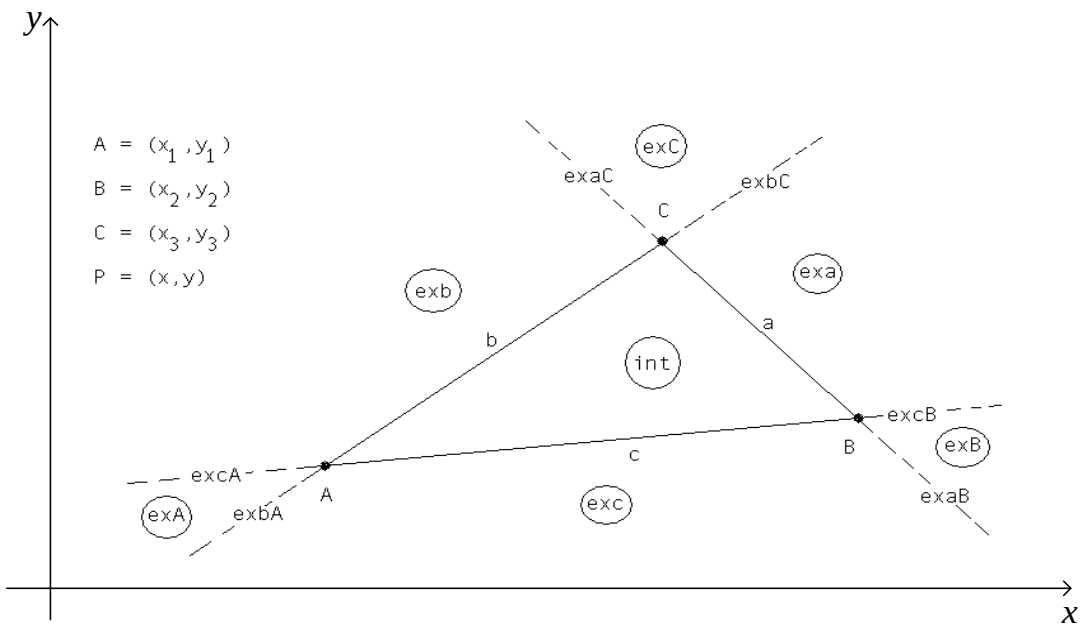
70.4.1 Ein Positionscode für die 2D Konstellation
** festes $\triangle ABD$
** beweglicher Punkt P
in einem kartesischen Koordinatensystem

Gegeben sind

** ein feststehendes $\triangle ABC$ durch die Koordinaten seiner Eckpunkte $A = (x_1, y_1),\ B = (x_2, y_2),\ C = (x_3, y_3)$

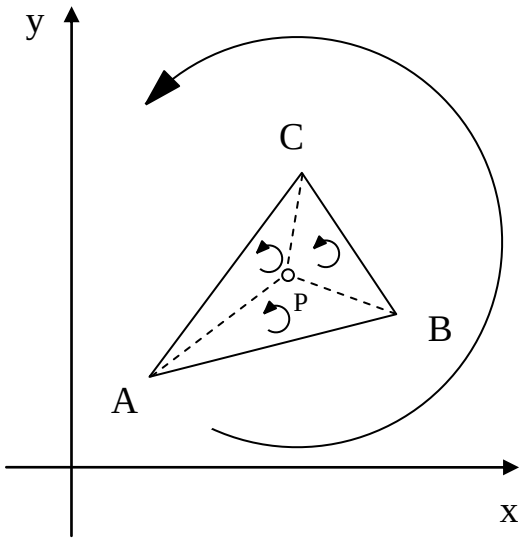
** und ein beweglicher Punkt $P = (x, y)$

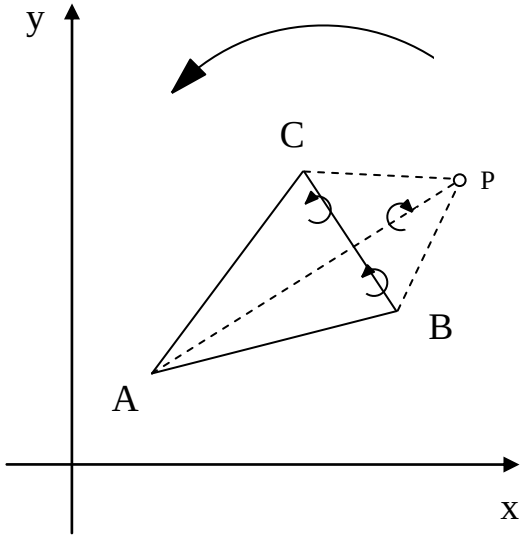
in einem kartesischen Koordinatensystem.
Das $\triangle ABC$ definiert dort $19 = 3^3 - 2^2$ unterscheidbare Positionen für P :



Gesucht ist ein Positionscode $\triangle ABC$ - P unter Benutzung der verkürzten Determinantendarstellung basierend auf Gl.(3.1)

Lösungsidee





P liegt innerhalb von $\triangle ABC$

$$t_1 = \frac{area\Delta PBC}{area\Delta ABC} > 0$$

P liegt außerhalb von $\triangle ABC$
innerhalb exa

$$t_1 = \frac{area\Delta PBC}{area\Delta ABC} < 0$$

Liegt *P* auf der Seite $a = \overline{BC}$, so ist

$$t_1 = \frac{area\Delta PBC}{area\Delta ABC} = 0.$$

Das ist natürlich auch der Fall, wenn P in B oder in C oder auf exaB oder auf exaC liegt.

Lösung

In analoger Weise erhält man schließlich für alle 19 Positionen die

Codetabelle 1:

P=(x,y) is	if and only if		
located at	$sgn(t_1) =$	$sgn(t_2) =$	$sgn(t_3) =$
int	+1	+1	+1
A	+1	0	0
B	0	+1	0
C	0	0	+1
a	0	+1	+1
b	+1	0	+1
c	+1	+1	0
exaB	0	+1	-1
exaC	0	-1	+1
exbA	+1	0	-1
exbC	-1	0	+1
excA	+1	-1	0
excB	-1	+1	0
exA	+1	-1	-1
exB	-1	+1	-1
exC	-1	-1	+1
exa	-1	+1	+1
exb	+1	-1	+1
exc	+1	+1	-1

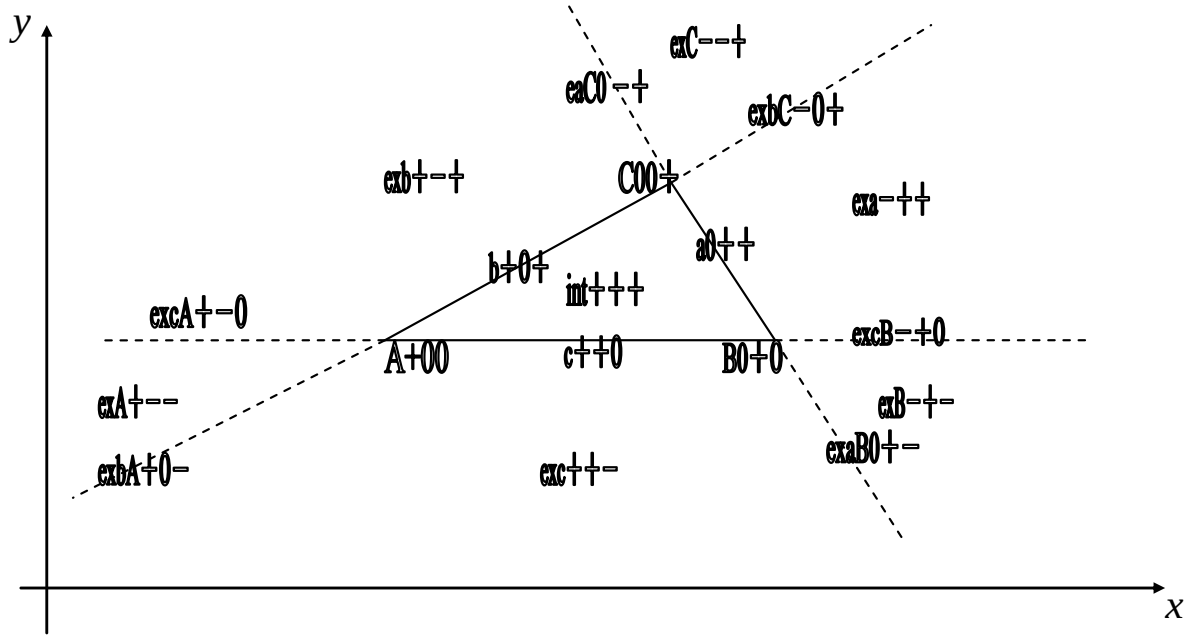
$$t_1 = \frac{\begin{vmatrix} x & x_2 & x_3 \\ y & y_2 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}} \qquad (65.1)$$

$$t_2 = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x & x_3 \\ y_1 & y & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}} \qquad (65.2)$$

$$t_3 = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x \\ y_1 & y_2 & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}} \qquad (65.3)$$

$$t_1 + t_2 + t_3 = 1 \qquad (65.4)$$

Codetabelle 2:



mit

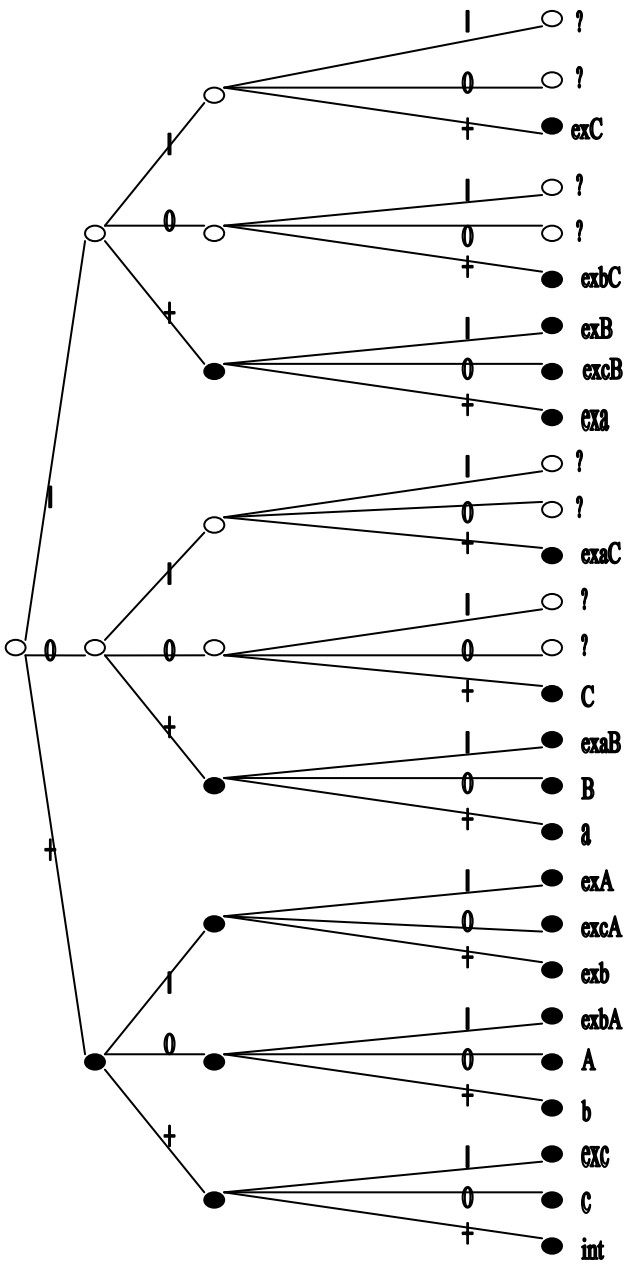
$$w = \operatorname{sgn}(t_1)\operatorname{sgn}(t_2)\operatorname{sgn}(t_3) \in \{-1, 0, +1\}^3 \qquad (65.5)$$

Die Gln (65.1,2,3) können via Cramersche Regel zu einer Matrizengleichung komprimiert werden:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (65.6)$$

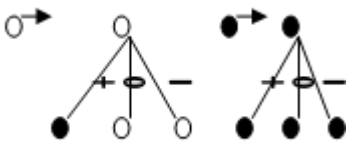
Diese Gleichung kann als „Abbildungsgleichung“ $\triangle ABC$ *– Punkt P* **interpretiert werden. Diskutieren Sie diese Interpretation!**

Der zugehörige ternäre Codebaum hat einen einfachen systematischen Aufbau:



<u>mit der Baumgrammatik</u>

Startsymbol: o

Substitutionsregeln: 

Kommentare und Aufgaben

K1 zur „19“

** Das Dreieck $\triangle ABC$ definiert in einem kartesischen Koordinatensystm $19 = 3^3 - 2^3$ unterscheidbare Positionen für einen Punkt *P*, das sind:

3 Eckpunkte (A, B, C), $E = 3$

9 Kanten $(a, b, c, exaB, exaC, exbA, exbC, excA, excB)$, $K = 9$

7 Flächen $(int,\ exa,\ exb,\ exc,\ exA,\ exB,\ exC)$, $F = 7$.

Also $E + F + K = 19$.

** Andererseits hat man in Analogie zum Eulerschen Polyedersatz [4,5] $E + F - K = 1$.

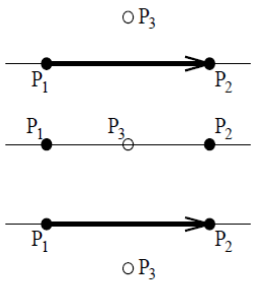
A1 zum Codebaum

Der ternäre Codebaum hat 27 Endknoten, 19 davon sind mit den Positionen $\triangle ABC - P$ semantisch belegt. Wie kann man die restlichen 8 Endknoten und die Zwischenknoten des Baums interpretieren?

K2 zu Gl.(3.1)

Gl.(3.1) lässt sich auch wie folgt interpretieren:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \begin{cases} > 0 \\ = 0 \quad \text{für} \\ < 0 \end{cases}$$



P_3 liegt links von $\overrightarrow{P_1P_2}$.

P_3 liegt auf der Geraden durch P_1 und P_2

P_3 liegt rechts von $\overrightarrow{P_1P_2}$.

70.9

Das „6 aus 49“ Dreieck

Auf der website
https://www.lottozahlenonline.com/6aus49/
sind die Gewinnzahlen des Zahlenlottos "6 aus 49" des Deutschen Lotto- und Totoblocks der Jahre 1955 bis 2014 (Lottozahlen Archiv der Jahre 1955 – 2014) im Format $(z_1 < z_2 < z_3 < z_4 < z_5 < z_6)$ verfügbar.

Reihen Sie sich ein in die community der „6 aus 49“ Analysten [1,2,…] mit dem (data mining? [3]) tool Gl. (3)

$$\text{area}\Delta P_1P_2P_3 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} z_1 & z_3 & z_5 \\ z_2 & z_4 & z_6 \end{vmatrix}.$$

Wir berechnen damit zunächst die 105 $area\Delta P_1P_2P_3$ –Werte für 2014:

Ziehungstag	Gewinnzahlen
01.01.2014	*6 8 23 24 25 46*
	$area\Delta P_1P_2P_3 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 6 & 23 & 25 \\ 8 & 24 & 46 \end{vmatrix} = 171$
04.01.2014	*16 19 25 36 39 48*
	$area\Delta P_1P_2P_3 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 16 & 25 & 39 \\ 19 & 36 & 48 \end{vmatrix} = -65$
08.01.2014	*20 28 31 36 44 45*
	$area\Delta P_1P_2P_3 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 20 & 31 & 44 \\ 28 & 36 & 45 \end{vmatrix} = -2.5$
11.01.2014	*5 8 14 23 29 38*
	$area\Delta P_1P_2P_3 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & 14 & 29 \\ 8 & 23 & 38 \end{vmatrix} = -45$

15.01.2014 *6 22 39 41 43 49*

$$area\Delta P_1P_2P_3 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 6 & 39 & 43 \\ 22 & 41 & 49 \end{vmatrix} = 94$$

……..

31.12.2014 *15 20 22 27 39 49*

$$area\Delta P_1P_2P_3 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 15 & 22 & 39 \\ 20 & 27 & 49 \end{vmatrix} = 17.5$$

** Lassen sich aus dem *area*-Ziehungstag-Diagramm oder anderen geeigneten graphischen Darstellungen dieser Daten (vgl. [4,5,6]) von 2014 irgendwelche „Muster“ erkennen?

** Dehnen Sie diese Untersuchungen auf den gesamten verfügbaren Datenbestand aus. Diskussion!

** Testen Sie in ähnlicher Weise und mit geeigneten Datenbeständen die Gln (57), (58) und (61) auf ihre Eignung als data mining tool.

References

[1] https://www.youtube.com/watch?v=R1acmWtFovQ
[2] http://www.lottozahlen-rechner.de/analyse
[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Data_mining
[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Visual_analytics
[5] http://en.wikipedia.org/wiki/Data_visualization
[6] http://www.sas.com/offices/europe/germany/download/files/pdf/BA_WP_HBR-State-of-the-Art-Practice-with-Visual-Analytics.pdf

Anhang 1 zu 70.9

Beitrag von Frau Dr. D. Schönfeld zu

** Dehnen Sie diese Untersuchungen auf den gesamten verfügbaren Datenbestand aus. Diskussion!

mit Daten aus https://www.lottozahlenonline.com/6aus49/archiv/

Das Lottozahlen Archiv von 1955 bis heute

Excel-Tabelle Pos. 3900-4060 (November 1958 bis Oktober1955)

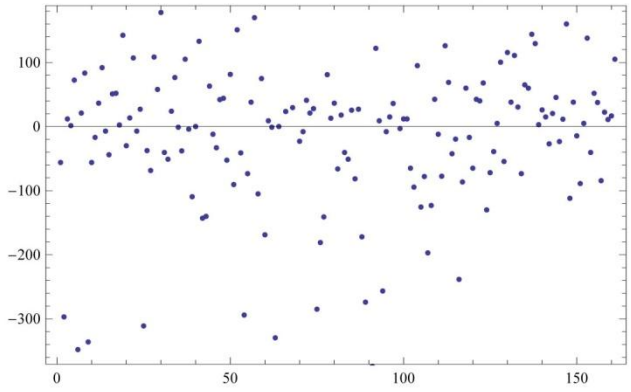
```
In[20]:= (*  Zeilen 3900 - 4060  *)
x = {{8, 11, 12, 18, 44, 46}, {7, 8, 13, 29, 47, 49},
  {6, 21, 30, 33, 34, 36}, {4, 6, 45, 46, 48, 49}, {6, 16, 19, 20, 25, 33},
  {2, 4, 8, 30, 38, 44}, {9, 22, 27, 35, 39, 46}, {1, 7, 13, 14, 20, 32},
  {1, 5, 9, 33, 35, 40}, {13, 21, 37, 44, 45, 47}, {14, 19, 21, 31, 32, 45},
  {18, 28, 35, 37, 42, 45}, {1, 10, 17, 20, 29, 39}, {9, 14, 22, 26, 34, 36},
  {10, 14, 18, 24, 46, 48}, {17, 35, 41, 42, 47, 48}, {3, 4, 29, 30, 44, 49},
  {17, 18, 19, 21, 36, 49}, {6, 28, 31, 33, 39, 46}, {8, 9, 10, 15, 27, 36},
  {17, 24, 26, 30, 32, 37}, {13, 24, 30, 32, 33, 46}, {8, 9, 32, 34, 46, 48},
  {24, 25, 30, 31, 33, 43}, {3, 6, 8, 29, 37, 38}, {18, 21, 26, 34, 41, 49},
  {2, 7, 25, 32, 36, 38}, {10, 15, 31, 32, 38, 48}, {1, 9, 21, 25, 30, 38},
  {3, 5, 22, 25, 27, 49}, {10, 13, 16, 28, 29, 47}, {23, 24, 29, 36, 44, 49},
  {22, 28, 30, 34, 38, 46}, {5, 20, 22, 27, 39, 43}, {2, 6, 8, 17, 18, 35},
  {5, 10, 11, 20, 36, 49}, {9, 11, 21, 24, 27, 48}, {2, 3, 12, 17, 19, 26},
  {8, 15, 21, 36, 37, 45}, {25, 30, 37, 40, 43, 45}, {4, 34, 38, 39, 46, 48},
  {4, 6, 7, 23, 27, 41}, {3, 12, 14, 30, 32, 34}, {9, 19, 22, 23, 36, 37},
  {6, 10, 15, 21, 36, 44}, {14, 34, 36, 45, 46, 47}, {4, 7, 22, 23, 28, 33},
  {7, 11, 18, 22, 27, 39}, {3, 26, 32, 43, 45, 47}, {9, 11, 26, 27, 36, 46},
  {1, 3, 14, 23, 25, 26}, {8, 20, 22, 24, 34, 49}, {16, 20, 24, 30, 45, 46},
  {3, 11, 26, 45, 46, 49}, {2, 4, 9, 18, 22, 23}, {2, 24, 27, 35, 36, 42},
  {1, 14, 29, 30, 41, 49}, {6, 9, 11, 25, 26, 31}, {13, 20, 21, 22, 26, 42},
  {7, 9, 10, 25, 33, 35}, {12, 19, 24, 28, 34, 37}, {12, 20, 21, 27, 38, 40},
  {2, 4, 7, 27, 40, 47}, {24, 30, 31, 36, 38, 42}, {3, 8, 14, 40, 41, 48},
  {13, 26, 29, 33, 36, 39}, {6, 8, 17, 42, 43, 48}, {1, 9, 20, 25, 27, 34},
  {1, 2, 3, 23, 42, 44}, {28, 30, 34, 40, 41, 44}, {5, 6, 11, 14, 22, 26},
  {15, 23, 31, 36, 37, 46}, {4, 8, 10, 12, 19, 25}, {14, 21, 30, 34, 38, 44},
  {1, 7, 8, 32, 35, 47}, {3, 4, 14, 29, 32, 37}, {1, 3, 24, 35, 40, 45},
  {16, 20, 28, 29, 30, 44}, {15, 17, 21, 24, 31, 40}, {2, 4, 22, 27, 31, 41},
  {18, 20, 23, 33, 37, 43}, {11, 27, 35, 39, 44, 45}, {6, 15, 18, 28, 39, 44},
  {2, 14, 18, 31, 40, 48}, {20, 26, 27, 30, 44, 47}, {14, 18, 22, 31, 45, 48},
  {3, 14, 24, 32, 35, 44}, {2, 7, 18, 35, 36, 45}, {4, 9, 11, 34, 36, 45},
  {2, 15, 16, 23, 28, Null}, {43, 9, 15, 31, 35, 42}, {9, 17, 18, 19, 31, 49},
  {6, 12, 30, 34, 39, 43}, {2, 6, 9, 28, 39, 49}, {3, 6, 7, 12, 33, 47},
  {4, 15, 16, 17, 19, 20}, {11, 17, 23, 26, 31, 38}, {1, 5, 13, 45, 47, 49},
  {15, 17, 20, 23, 31, 35}, {6, 7, 11, 13, 32, 43}, {9, 10, 15, 21, 27, 47},
  {6, 9, 16, 25, 36, 44}, {14, 16, 28, 37, 39, 40}, {7, 14, 29, 34, 36, 49},
  {7, 16, 19, 33, 38, 39}, {5, 17, 29, 39, 47, 49}, {1, 2, 22, 36, 41, 48},
  {10, 11, 12, 25, 32, 42}, {6, 9, 29, 33, 36, 44}, {9, 10, 24, 27, 36, 39},
  {5, 6, 9, 21, 22, 31}, {4, 8, 17, 18, 23, 42}, {15, 22, 27, 28, 42, 47},
  {14, 26, 31, 40, 48, 49}, {3, 11, 16, 25, 29, 36}, {5, 6, 14, 33, 34, 40},
  {4, 10, 11, 26, 31, 47}, {9, 23, 25, 31, 40, 46}, {9, 10, 17, 23, 27, 35},
  {5, 8, 10, 18, 38, 48}, {12, 17, 19, 23, 34, 48}, {3, 20, 42, 43, 47, 48},
  {5, 13, 21, 25, 35, 44}, {14, 16, 18, 32, 37, 43}, {5, 19, 25, 38, 41, 46},
  {10, 14, 16, 23, 40, 46}, {11, 17, 33, 34, 35, 36}, {5, 33, 35, 36, 38, 43},
  {6, 12, 22, 31, 37, 42}, {4, 31, 32, 34, 39, 43}, {1, 3, 39, 41, 45, 49},
  {4, 18, 34, 36, 40, 47}, {10, 19, 21, 24, 33, 35}, {1, 12, 14, 31, 32, 46},
  {2, 19, 25, 30, 32, 39}, {7, 10, 22, 25, 32, 43}, {3, 16, 18, 19, 37, 42},
  {3, 10, 24, 26, 38, 49}, {6, 9, 20, 22, 26, 28}, {4, 6, 17, 19, 41, 47},
  {1, 30, 32, 42, 45, 48}, {8, 20, 26, 35, 38, 42}, {1, 14, 23, 27, 30, 33},
  {12, 26, 35, 36, 42, 43}, {5, 6, 18, 22, 38, 43}, {12, 17, 23, 27, 35, 40},
  {1, 9, 16, 19, 29, 49}, {6, 21, 22, 37, 41, 42}, {4, 22, 27, 36, 38, 46},
  {5, 9, 34, 38, 39, 42}, {8, 14, 26, 36, 39, 42}, {8, 10, 22, 26, 31, 37},
```

```
  {5, 20, 21, 26, 31, 47}, {9, 24, 26, 37, 44, 46}, {4, 8, 12, 16, 27, 44},
  {6, 18, 22, 29, 37, 44}, {5, 6, 31, 39, 44, 49}, {4, 13, 23, 30, 36, 44},
  {12, 14, 23, 24, 34, 36}, {3, 12, 18, 30, 32, 49}, {3, 12, 13, 16, 23, 41}};
l = Length[x]; Print["Anzahl Ziehungen: ", l];
area = Table[0, {i, l}];
Table[
 area[[i]] = (x[[i, 1]] * x[[i, 4]] + x[[i, 3]] * x[[i, 6]] + x[[i, 5]] * x[[i, 2]] -
     x[[i, 2]] * x[[i, 3]] - x[[i, 4]] * x[[i, 5]] - x[[i, 6]] * x[[i, 1]]) / 2,
 {i, 1, l}]; Print[Table[area[[i]], {i, 30}]]; ListPlot[area, Frame → True]
```

```
Anzahl Ziehungen: 161
```

$$\left\{-56, -297, 12, \frac{3}{2}, \frac{145}{2}, -348, 21, \frac{167}{2}, -336, -56, -17, \frac{73}{2}, 92, -7,\right.$$
$$\left.-44, 51, 52, \frac{5}{2}, \frac{285}{2}, -30, \frac{27}{2}, 107, -7, 27, -311, -\frac{75}{2}, -\frac{137}{2}, \frac{217}{2}, 58, 178\right\}$$

Out[21]=



70.10

Ein Primzahlen n-Eck Sandkasten

Untersuchen Sie die Werteverläufe der verkürzten Determinanten

** Δsnips

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 13 \\ 5 & 11 & 17 \end{vmatrix} = -12 \quad = c_1; \qquad \begin{vmatrix} 19 & 29 & 37 \\ 23 & 31 & 41 \end{vmatrix} = 36 \quad = c_2;$$

$$\begin{vmatrix} 43 & 53 & 61 \\ 47 & 59 & 67 \end{vmatrix} = -16 \quad = c_3; \qquad \begin{vmatrix} 71 & 79 & 89 \\ 73 & 83 & 97 \end{vmatrix} = 12 \quad = c_4;$$

$$\begin{vmatrix} 101 & 107 & 113 \\ 103 & 109 & 127 \end{vmatrix} = 72 \quad = c_5; \ldots$$

$$\langle c_i \rangle_{i=1}^{\infty} = -12,\ 36, -16,\ 12,\ 72, -80,\ 24, -240,$$
$$64, -32,\ 288,\ 108, -20, -48,\ 12, -24,$$
$$-64, -160,\ 108,\ \ldots$$

** infinite sequence

$$\begin{vmatrix} \underline{3} & 7 & 13 & 19 & 29 & 37 & 43 & \underline{53} & \underline{61} & \ldots \\ \underline{5} & 11 & 17 & 23 & 31 & 41 & 47 & \underline{59} & \underline{67} & \ldots \end{vmatrix}$$

$$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$$

$$d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4 \quad d_5 \quad d_6 \quad d_7 \ \ldots$$

Rekursionsformel:

$$d_7 = d_6 + \begin{vmatrix} \underline{3} & \underline{53} & \underline{61} \\ \underline{5} & \underline{59} & \underline{67} \end{vmatrix}$$

$d_1 = -12;$ $d_2 = -24;$ $d_3 = -76;$ $d_4 = -24;$

$d_5 = -36;$ $d_6 = 24;$ $d_7 = -8;$ ...

Summendarstellung:

$$\begin{vmatrix} \underline{3} & 7 & 13 & 19 & 29 & 37 & 43 & 53 & 61 & ... \\ \underline{5} & 11 & 17 & 23 & 31 & 41 & 47 & 59 & 67 & ... \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \underline{3} & 7 & 13 \\ \underline{5} & 11 & 17 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{3} & 13 & 19 \\ \underline{5} & 17 & 23 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{3} & 19 & 29 \\ \underline{5} & 23 & 31 \end{vmatrix} +$$

$$-12 \quad \downarrow \qquad -12 \quad \downarrow \qquad -52 \quad \downarrow$$

$$-12 \qquad -24 \qquad -76$$

$$\begin{vmatrix} \underline{3} & 29 & 37 \\ \underline{5} & 31 & 41 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{3} & 37 & 43 \\ \underline{5} & 41 & 47 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{3} & 43 & 53 \\ \underline{5} & 47 & 59 \end{vmatrix} +$$

$$52 \quad \downarrow \qquad -12 \quad \downarrow \qquad 60 \quad \downarrow$$

$$-24 \qquad -36 \qquad 24$$

$$\begin{vmatrix} \underline{3} & 53 & 61 \\ \underline{5} & 59 & 67 \end{vmatrix} + ... = -8 ...$$

$$-32 \quad \downarrow$$

$$-8$$

Alle Determinanten sind durch 4 teilbar.

Warum?

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 13 & 19 & 29 & 37 & 43 & 53 & 61 & 71 & 79 & 89 & 101 & 107 & 113 & \dots \\ 5 & 11 & 17 & 23 & 31 & 41 & 47 & 59 & 67 & 73 & 83 & 97 & 103 & 109 & 127 & \dots \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 & d_7 & d_8 & d_9 & d_{10} & d_{11} & d_{12} & d_{13} \end{matrix}$$

$$\frac{1}{4}\left\langle d_i \right\rangle_{i=1}^{\infty} = -3, -6, -19, -6, -9, +6, -2, -70, -36, +35, -112, -112, +200, \dots$$

Kann man aus der Folge der d_i die Folge der Primzahlen „zurückgewinnen“?

** und anderer Kombinationen.

0-snips

$\begin{vmatrix} 3 & 13 & 23 \\ 5 & 17 & 29 \end{vmatrix} = 0$ Die Punkte (3,5), (13,17) und (23,29) liegen auf der Geraden : $y = \frac{1}{5}(6x + 7)$	$\begin{vmatrix} 3 & 101 & 107 \\ 5 & 103 & 109 \end{vmatrix} = 0$ Die Punkte (3,5), (101,103) und (107,109) liegen auf der Geraden : $y = x + 2$
$\begin{vmatrix} 7 & 19 & 37 \\ 11 & 23 & 41 \end{vmatrix} = 0$ Die Punkte (7,11), (19,23) und (37,41) liegen auf der Geraden : $y = x + 4$	$\begin{vmatrix} 7 & 43 & 79 \\ 11 & 47 & 83 \end{vmatrix} = 0$ Die Punkte (7,11), (43,47) und (79,83) liegen auf der Geraden : $y = x + 4$
$\begin{vmatrix} 29 & 71 & 101 \\ 31 & 73 & 103 \end{vmatrix} = 0;$	Die Punkte (29,31), (71,73) und (101,103) liegen auf der Geraden : $y = x + 2$

Prime genetics.

Anhang 1 zu 70.10

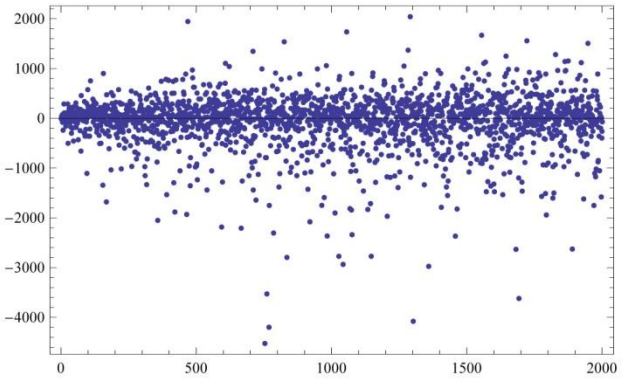
Beitrag von Frau Dr. D. Schönfeld

Numerische Berechnung und Analyse der c_i

In[117]:=
```
oben = 2000; sortiert = area = Table[0, {i, oben + 1}]; index = 0;
Table[{area[[++index]] =
      Prime[i] * Prime[i + 3] + Prime[i + 2] * Prime[i + 5] + Prime[i + 4] * Prime[i + 1] -
       Prime[i + 1] * Prime[i + 2] - Prime[i + 3] * Prime[i + 4] - Prime[i + 5] * Prime[i];
  }, {i, 2, oben * 6 + 2, 6}];
Print["Determinanten 1-30:\n", Table[area[[i]], {i, 30}]];
ListPlot[area, Frame → True, PlotRange → All]
sortiert = Sort[area];
Print["Minimum=", sortiert[[1]], "  Maximum=", sortiert[[oben + 1]]];
```

```
Determinanten 1-30:
{-12, 36, -16, 12, 72, -80, 24, -240, 64, -32, 288, 108, -20, -48,
  12, -24, -64, -160, 108, -72, -72, 48, 72, 0, 288, -504, 120, 20, -80, 192}
```

Out[119]=




```
Minimum=-4524  Maximum=2040
```

In[121]:=
```
(* Weitere Auswertungen *)
zae64 = zae32 = zae16 = zae8 = zae4 = zae2 = zae1 = 0;
Table[{
    If[EvenQ[area[[i]]] == True, If[Mod[area[[i]], 2] == 0,
      {zae2++; If[Mod[area[[i]], 4] == 0, zae4++];}], zae1++];
    If[Mod[area[[i]], 8] == 0, zae8++];
    If[Mod[area[[i]], 16] == 0, zae16++];
    If[Mod[area[[i]], 32] == 0, zae32++];
    If[Mod[area[[i]], 64] == 0, zae64++];
  }, {i, 1, oben + 1}];
Print["Anzahl ungerade Determinaten=", zae1];
Print["Anzahl gerade Determinaten=", zae2, "    Summe=", zae1 + zae2];
Print["Davon durch 4 teilbar: ", zae4]; Print["Davon durch 8 teilbar: ", zae8];
Print["Davon durch 16 teilbar: ", zae16];
Print["Davon durch 32 teilbar: ", zae32];
Print["Davon durch 64 teilbar: ", zae64];
```

```
Anzahl ungerade Determinaten=0

Anzahl gerade Determinaten=2001    Summe=2001

Davon durch 4 teilbar: 2001

Davon durch 8 teilbar: 1216

Davon durch 16 teilbar: 657

Davon durch 32 teilbar: 334

Davon durch 64 teilbar: 165
```

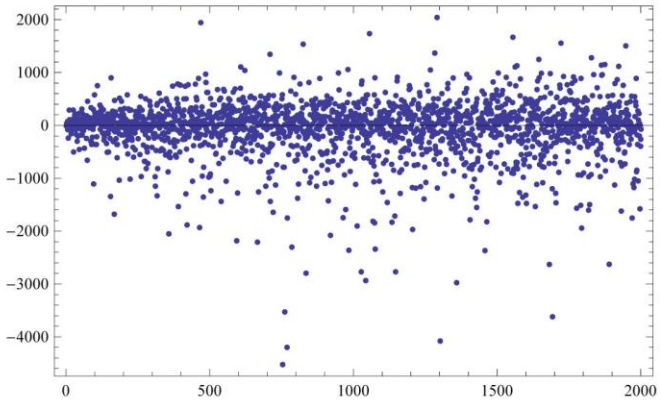
In[135]:=
```
oben = 2000; sortiert = area = Table[0, {i, oben + 1}]; index = 0;
Table[{area[[++index]] =
    Prime[i] * Prime[i + 3] + Prime[i + 2] * Prime[i + 5] + Prime[i + 4] * Prime[i + 1] -
     Prime[i + 1] * Prime[i + 2] - Prime[i + 3] * Prime[i + 4] - Prime[i + 5] * Prime[i];
 }, {i, 2, oben * 6 + 2, 6}]; Print[area];
(*Print["Determinanten 1-30:\n",Table[area[[i]],{i,30}]];*)
ListPlot[area, Frame → True, PlotRange → All]
sortiert = Sort[area];
Print["Minimum=", sortiert[[1]], "  Maximum=", sortiert[[oben + 1]]];
```

```
{-12, 36, -16, 12, 72, -80, 24, -240, 64, -32, 288, 108, -20, -48, 12, -24, -64, -160, 108,
 -72, -72, 48, 72, 0, 288, -504, 120, 20, -80, 192, -36, 216, -88, 32, -32, -176, -28,
 24, -300, -36, 152, -204, 96, 124, 228, -456, 88, 24, 72, -56, -72, 48, -180, 36,
 308, -180, 104, 216, 100, 144, -100, 64, 28, -432, -36, 40, 0, 4, 112, 24, -248, 180,
 84, -660, 456, 48, 156, 0, -32, 72, 36, -48, -32, -48, 140, -300, 336, -312, -360,
 84, 4, -224, -32, -76, 300, -1108, 0, 48, 576, 240, 188, -360, 140, 188, 56, -360,
 -216, 48, 752, 136, 216, 40, 96, 72, 144, 48, 252, 384, -76, 84, 28, 340, 204, -12,
 88, 64, -144, -16, 24, 292, 148, -280, -224, 172, 4, 32, -24, -144, 96, -152, -344,
 96, -508, 48, 120, 216, -156, -504, 112, -76, -68, 72, -248, -20, -1344, 180, 900,
 -60, 60, -32, 80, 268, 36, -308, 144, 60, -100, -1680, 472, -120, 256, 192, 208,
 -252, -60, 48, -360, -612, -360, -44, -76, 20, -48, -152, -1036, 516, 172, 0, 300,
 68, 72, -180, 456, 128, 252, -36, 12, 80, -180, 204, 152, 68, 320, -324, -24, 64,
 120, -96, -388, -96, 36, -180, 576, -276, -540, -60, 312, -52, 72, -64, 284, -168,
 -1016, -104, -252, 288, 52, -232, 36, -280, -16, 0, -416, 72, -600, 36, -72, 48,
 -124, -144, -464, 180, 264, 168, 136, 60, 48, -44, -28, 212, -252, 144, 244, 24, 284,
 340, -552, 20, 32, 548, 144, -968, -36, -36, 288, 168, -96, 48, -372, 124, 112, -72,
 -680, 100, -680, -176, 504, -20, -816, -428, -408, 24, -504, 24, -720, -92, -240, 0,
 144, -80, 456, 204, 372, -92, 256, 272, -12, -48, -416, -32, 40, 180, 52, -176, 96,
 36, -240, 168, -156, -972, -1152, 0, -476, 12, 4, 384, -1332, 412, -816, 44, -212,
 140, 216, 608, -52, 48, -480, 192, -8, 160, 468, 68, -444, -264, 68, -156, 316, 156,
 -472, -140, 144, -172, -288, 180, 0, -560, -32, 24, 504, 264, 460, 20, -548, -240,
 -880, -124, 204, -2052, 384, -600, -504, -320, -608, -72, 312, 48, 0, -64, 36, -72,
 744, 0, 172, -24, -336, -276, 240, -400, 84, 172, -564, 264, -76, -600, 504, 308,
 -300, 784, 408, -96, -1536, 324, 76, 96, 768, -504, -144, 760, 12, 240, 12, 52, -92,
 -48, 180, -268, -64, 28, 180, 500, 288, -208, 72, -260, 740, 48, -1296, 504, -448,
 -120, -1884, -144, -120, 28, 768, -120, -216, 40, -152, 252, 280, 60, 312, 72, 328,
 -664, 180, -20, -16, -1056, 128, 292, -76, -384, 8, 80, -28, -104, -84, 780, -236,
 344, 528, 24, 480, 252, -144, 124, -156, 12, 888, -240, -48, -216, -1932, 200, -384,
 68, 1944, -172, 252, 24, 348, -960, -368, 88, 216, -1356, -792, 0, 96, 40, -324, 28,
 -180, 968, 812, -72, -72, 624, -100, 192, 624, 144, 24, -368, -980, 264, 200, 260,
 -960, -920, 508, -1236, -144, 60, -216, 144, 112, 388, 24, -400, -144, -48, -64,
 388, 168, -152, 168, -148, -544, -528, -140, -24, 224, -168, 676, 0, -204, 132,
 16, -720, -228, 480, 240, -372, -324, 516, -180, -1440, 24, -120, 140, -168, -180,
 -624, 300, 680, 384, 372, 648, -100, 216, -272, -96, 196, -1056, 0, -48, 60, 312,
 -68, 44, 108, -72, 504, 384, 208, 48, 480, 144, 28, -512, 56, 288, -68, 360, 240, 0,
 336, -396, 628, 100, -332, -80, 300, 60, 688, -140, -288, -248, 272, 24, -2184, 92,
 -508, -1280, -84, 52, 24, -68, 484, 280, 12, -264, 124, 704, 1104, -540, 64, 180,
 -288, -428, 0, 96, 528, 432, -84, 324, 60, -336, 1040, 444, -56, 240, -484, -636,
 108, 144, -240, 132, 340, 304, 124, -192, 104, 92, 252, -96, 528, 92, -332, 552,
 -688, -60, -228, 160, -480, 276, -108, -204, -72, 60, -64, -264, 508, 108, 300,
 -192, -208, -168, 152, -132, 232, 348, -2208, -372, 0, 48, -1260, 200, 24, 420, 36,
 -680, 432, -188, 552, -212, 96, 372, 0, -408, -564, 180, 168, -40, 180, -8, 320,
 216, -456, 424, 512, -1152, 132, 4, -80, -76, 120, 96, 504, -504, 376, -888, 568,
 -996, -16, -424, 1344, -1440, -348, -36, 120, -16, -384, -864, -360, 156, -168,
 -1644, 564, 336, 104, 348, 0, 288, 192, -1128, 100, 60, 408, -744, -148, 168, 300,
 172, -60, -12, -96, -240, -120, 992, -96, -36, 360, -132, -56, -60, -84, 504, 228,
 580, -4524, -336, -792, -156, -116, -792, 12, -3528, 216, -224, 128, 364, 160,
 312, 24, -4200, -1752, 152, 0, 252, -20, -552, -200, 384, 52, -80, -140, -36, 648,
 -380, -72, 88, -2304, 120, 352, 328, -400, 48, 128, 908, -56, 140, 104, -672, 112,
```

588, 160, -36, -116, -656, -380, 192, -1380, -552, -48, -1112, -216, 136, 124, 68, 784, -56, 120, 228, 204, 468, 216, 144, -432, 328, -120, 1536, 24, -116, 92, -504, -132, -176, -860, -252, -560, -2796, -172, 396, 48, -108, -212, -88, -432, 0, -156, 812, 0, -380, -1084, -48, 200, -116, -984, -120, -120, 468, 384, -144, 24, -624, 432, 144, 304, 192, -176, 228, 96, -220, 504, 360, 308, -64, -1152, -900, 204, -192, -200, 0, -256, 388, 180, 144, -80, 888, 432, -504, 72, 420, 4, 84, -756, -552, 432, 168, -208, 48, 316, 120, 340, -528, 360, 68, -1100, 168, 380, 360, 456, -528, 556, -488, -840, -64, -684, -1428, 396, -20, 416, 156, -692, -144, -2080, -24, 500, 100, -1076, -296, 252, 288, 96, 272, -672, -504, -372, -16, -36, 96, 408, 36, -420, 72, -248, 240, -92, -132, -56, 224, 168, -752, 992, 152, 672, 360, 108, 48, -144, -212, 360, -244, -48, 216, -668, -152, 24, 380, -1748, 4, 280, 336, 12, -936, 80, -56, -536, -1592, 124, 160, 108, 108, 124, 432, 12, 1056, 36, -12, -2364, 588, 172, -320, -432, -872, 176, 268, 208, -216, 12, -576, -104, -72, 144, -540, 88, 120, 420, 204, -520, -624, 184, 228, -1116, 0, 352, 408, 72, -1904, -244, 408, -240, 336, 440, -24, -48, 144, 192, 24, 4, 136, -60, -2772, 780, -140, 840, 120, 104, 496, -4, -380, -616, 408, -108, -180, 156, 204, 496, -2936, 96, 572, -260, -320, -144, 576, 300, -620, -336, 48, -492, 48, 1736, -184, 24, 284, -48, 224, -696, 44, 48, 24, -120, -420, -1816, -672, -576, -1068, -768, 576, -1844, 900, -2340, 48, 364, -932, 96, -84, -32, 468, -24, -64, 0, 432, -576, 20, -1056, 180, 252, -164, 152, 168, 84, 0, 240, -68, -72, 136, -1260, -84, 96, -716, 40, 280, -152, 60, -228, 624, 144, -660, 72, 120, 240, -504, -1460, 144, -180, 108, -152, 204, 432, 240, 72, -288, 28, 368, 0, 40, -20, -736, -1832, 104, -192, -240, 288, 408, -848, -48, -36, -108, -1716, -320, -204, -2772, 564, 360, -132, -84, 840, 912, 84, -220, -80, -224, 12, -116, 220, -888, 132, -1288, -608, 352, -496, 480, -840, 320, -44, -248, -96, -464, -32, -492, 448, 268, 216, 240, -432, -132, 380, -32, -728, -448, 212, 192, 296, 124, 336, 132, -468, -300, 676, 752, -360, 700, 256, -64, 128, -12, 8, 208, 408, -1176, -1968, 140, 88, -544, 480, -144, -756, -124, 180, 192, -288, -1188, -96, -244, -248, -68, -240, -300, -744, 368, 408, 308, 108, 336, 620, -204, 556, -248, -1160, -420, -116, -328, -248, -552, 24, -168, -72, 232, -132, 152, -1392, 144, -792, 180, 312, 44, -1080, -456, 72, -500, 768, 168, 288, -32, 372, 648, 144, 80, -324, -96, -452, 0, 1048, 24, 0, -84, 348, -212, 232, 40, -132, 316, 396, 504, -108, -648, 0, 1368, -164, -392, -456, 360, 360, -540, 240, 2040, -1184, 40, -144, 504, 192, 256, -732, 96, 136, -508, -4080, 84, -288, 288, -108, 248, 600, -288, -256, 120, 12, 0, 108, 304, 4, -912, 300, 408, 72, -648, -144, 144, -736, 396, 424, 224, 696, 792, 284, 144, -228, -216, 460, -344, -336, 36, 252, -116, -180, -444, -48, -1336, 8, -272, -252, 896, -864, -48, 308, -328, -120, 288, 16, -432, -516, 160, 80, -2976, 236, 412, -192, -396, -204, 216, 192, 356, 144, -96, 360, 472, 80, -524, -272, 180, -108, -624, 168, -296, -60, -68, -156, -180, -360, -740, 612, -956, -444, 212, 624, -708, 48, 176, 696, 964, 272, 468, 168, -288, -152, 48, -288, -808, 900, 192, -1788, -164, 124, -488, 64, -756, -828, -72, -1160, -184, 344, 252, -336, -744, -240, -1020, -360, 320, -240, -1380, 376, 280, 424, -1552, 504, -1260, -684, -624, 24, 120, -384, -48, -28, 56, -480, -840, -188, -24, 128, 152, -792, 4, 648, 232, 104, -104, -72, -20, 0, 592, 28, 48, -2368, 12, 424, 252, 468, 320, -1824, 12, 300, 240, 216, -48, -560, 356, 360, -48, -588, 408, 88, -720, 288, -180, -516, 220, 504, 568, -108, 68, 820, -48, 92, 516, -224, 44, 96, -8, -228, -96, -792, 592, 672, 168, -516, 336, 456, -188, 992, 64, 12, 564, -1080, 336, -144, 84, 180, -372, -908, -172, 360, 588, 80, 660, 72, 112, 216, 228, 252, -732, 180, 36, 12, 404, 20, 144, 908, -72, 0, 504, -216, -824, -36, 96, -272, 480, -308, 204, 784, 96, -240, 144, -60, -72, 240, -900, 136, -72, 432, 1668, -48, -908, -828, -224, 252, -32, 144, 1104, -192, 748, -696, -756, 72, 1128, -704, -824, -1476, 180, 108, -296, 112, -56, -1272, 280, 560, 880, -300, -180, -552, -340, 120, -216, 348, -1360, -300, -984, -648, -740, 276, 288, -164, -652, 504, 408, -1320, -420, -1476, -552, -176, -60, -20, 96, -288, 420, -12, -120, -780, -540, 96, 228, 496, 192, -36, 480, 8, 468, 360, -400, -36, 132, 440, -216, 200, -264, 288, -608, -200, -1536, -140, 120, 396, 192, -1116, 676, 456, 840, -324, -168, 312, 1248, 900, 100, -740, -360, 160, 516, -560, -656, 984, -72, 24, -780, -588, -1084, 220, -464, -576, -792, -80, 532, -132, -384, 108, -120, -336, -432, 720, -488, 4, 124, 24, 252, -132, 88, 108, -720, -2632, 280, 108, 980, 608, -400, -228, 8, 120, 0, -1200, -3620, -108, 348, 88, -336, 156, -200, -720, 164, 148, -596, -1284, -1464, -320, 524, 536, 64, -252, 16, -180, 216, -24, -888, -108, -36, 764, 704, 432, -104, 1556,

```
-280, 448, 84, -144, -96, 288, 192, 32, 924, 156, 480, -72, 216, 444, -272, 504,
492, 0, 36, 480, -296, 768, -144, -684, -496, -68, -320, -32, -124, 656, -144,
480, 12, 624, 480, 88, -128, 480, 796, 192, -240, 468, -36, 916, 24, -336, -228,
408, 848, 108, 212, 72, 264, -152, -1568, -80, 440, 468, 336, -936, -208, -8, 156,
-408, 124, 124, -68, -420, -1512, 888, -940, -1944, 288, 8, 108, 80, 444, 180,
-900, 264, -204, -16, 524, -292, 240, 216, 24, 96, 324, -328, 284, 476, -404, -732,
40, -1604, -972, -140, -360, -1500, 0, -240, -16, 36, -932, 1280, -64, -92, -236,
564, -336, 136, 168, 960, -48, -72, -132, 12, 264, -48, 108, 40, 288, -504, -284,
712, -552, -756, 288, 224, 280, 108, -444, 24, 208, 544, -972, -432, -356, 140,
1140, 948, 124, 960, -120, 84, -600, -32, 240, 304, 180, -20, 1152, -648, -864,
220, 144, -72, -132, 140, -72, 120, 336, 552, -192, 96, 60, -2628, 108, 416, 68,
360, 72, -68, 0, 96, 144, -660, 156, 568, 24, -96, 272, 332, 180, 364, -1128, 792,
388, 92, -240, 0, -312, 24, -192, 864, 148, -348, -48, -456, 1116, 360, 440, -168,
156, -320, -704, 60, 240, -1620, -220, -768, -288, 564, 16, -132, 756, -312, 244,
72, -524, -504, -728, 100, 4, 1504, 264, 296, 420, 180, -8, 108, 216, -156, -52,
192, -132, -364, 72, -168, 448, 52, 36, -260, -112, 552, -80, -1752, -20, -120,
-1104, -108, -60, -1176, -120, -1020, 544, 168, -68, 444, 372, 888, -876, -848,
-180, 0, -360, 272, -1052, 100, -24, 224, -200, 32, -1580, 0, -396, -264, -72}
```

Out[137]=




```
Minimum=-4524  Maximum=2040
```

In[156]:=
```
(* Weitere Auswertungen *)
zae3 = zae5 =
   zae7 = zae11 = zae13 = zae17 = zae64 = zae32 = zae16 = zae8 = zae4 = zae2 = zae1 = 0;
Table[{
   If[EvenQ[area[[i]]] == True, If[Mod[area[[i]], 2] == 0,
     {zae2++; If[Mod[area[[i]], 4] == 0, zae4++];}], zae1++];
   If[Mod[area[[i]], 8] == 0, zae8++];
   If[Mod[area[[i]], 16] == 0, zae16++];
   If[Mod[area[[i]], 32] == 0, zae32++];
   If[Mod[area[[i]], 64] == 0, zae64++];
   If[Mod[area[[i]], 3] == 0, zae3++];
   If[Mod[area[[i]], 5] == 0, zae5++];
   If[Mod[area[[i]], 7] == 0, zae7++];
   If[Mod[area[[i]], 11] == 0, zae11++];
   If[Mod[area[[i]], 13] == 0, zae13++];
   If[Mod[area[[i]], 17] == 0, zae17++];
  }, {i, 1, oben + 1}];
Print["Anzahl ungerade Determinaten=", zae1];
Print["Anzahl gerade Determinaten=", zae2, "    Summe=", zae1 + zae2];
Print["Davon durch 4 teilbar: ", zae4]; Print["Davon durch 8 teilbar: ", zae8];
Print["Davon durch 16 teilbar: ", zae16];
Print["Davon durch 32 teilbar: ", zae32];
Print["Davon durch 64 teilbar: ", zae64];
Print["Davon durch 3 teilbar: ", zae3]; Print["Davon durch 5 teilbar: ", zae5];
Print["Davon durch 7 teilbar: ", zae7];
Print["Davon durch 11 teilbar: ", zae11];
Print["Davon durch 13 teilbar: ", zae13];
Print["Davon durch 17 teilbar: ", zae17];
```

```
Anzahl ungerade Determinaten=0

Anzahl gerade Determinaten=2001    Summe=2001

Davon durch 4 teilbar: 2001

Davon durch 8 teilbar: 1216

Davon durch 16 teilbar: 657

Davon durch 32 teilbar: 334

Davon durch 64 teilbar: 165

Davon durch 3 teilbar: 1234

Davon durch 5 teilbar: 492

Davon durch 7 teilbar: 316

Davon durch 11 teilbar: 173

Davon durch 13 teilbar: 150

Davon durch 17 teilbar: 139
```

Frage : Gibt es einen Zusammenhang zwischen den c_i und den d_i ?
Antwort :

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 13 & 19 & 29 & 37 & 43 & 53 & 61 \\ 5 & 11 & 17 & 23 & 31 & 41 & 47 & 59 & 67 \end{vmatrix} =$$

$$d_3 =$$

$$\underline{\underline{\begin{vmatrix} 3 & 7 & 13 \\ 5 & 11 & 17 \end{vmatrix}}} + \begin{vmatrix} 19 & 29 & 37 \\ 23 & 31 & 41 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 43 & 53 & 61 \\ 47 & 59 & 67 \end{vmatrix} +$$

$$c_1 \quad + \quad c_2 \quad + \quad c_3 \quad +$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 13 & 19 & 37 & 43 & 61 \\ 5 & 17 & 23 & 41 & 47 & 67 \end{vmatrix}$$

Anhang 2 zu 70.10

Nun anstelle der Primzahlen die Fibonaccizahlen

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 13 & 34 & 89 & 233 & 610 & 1597 & 4181 & 10946 & ... \\ 1 & 3 & 8 & 21 & 55 & 144 & 377 & 987 & 2584 & 6765 & 17711 & ... \end{vmatrix}$$

$$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$$

$$x(1)\ x(2)\ x(3)\ x(4)\ x(5)\ x(6)\ x(7)\ x(8)\ x(9)$$

$$\langle x(i) \rangle_{i=1}^{\infty} = -1, -5, -17, -50, -138, -370, -979, ...$$

$$-(3-2), -(8-3), -(21-4), (55-5),$$

$$-(144-6), -(377-7), -(987-8), ...$$

$$\lim_{i\to\infty}\frac{x(i+1)}{x(i)} = \Phi^2 = \frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$$

$$\lim_{i\to\infty} dx(i) = \frac{x(i+2)-x(i+1)}{x(i+1)-x(i)} = \Phi^2$$

Beispiel für eine konvergente Folge, bei der Grenzwert und Grenzwert des Differenzenquotienten identisch sind.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 13 & 34 & 89 & 233 & 610 & 1597 & 4181 & 10946 & \dots \\ 1 & 3 & 8 & 21 & 55 & 144 & 377 & 987 & 2584 & 6765 & 17711 & \dots \end{vmatrix}$$

$$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$$

$$x(1)\ x(2)\ x(3)\ x(4)\ x(5)\ x(6)\ x(7)\ x(8)\ x(9)$$

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 13 & 34 & 89 & 233 & 610 & 1597 \\ 1 & 3 & 8 & 21 & 55 & 144 & 377 & 987 & 2584 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 13 & 34 & 89 & 233 & 610 \\ 1 & 3 & 8 & 21 & 55 & 144 & 377 & 987 \end{vmatrix}} = \frac{x(7)}{x(6)} = \frac{-979}{-370} =$$

$$[2;1,1,1,4,1,2,3,2]$$

$$\text{scf}(\Phi^2) = [2;1,1,1,1,1,1,\dots]$$

Quotient aus 2x9 Det. und 2x8 Det. → scf.
Extension?

Finden Sie weitere Beispiele dieser Art.

70.12

Unsere Dreieckssaga wird langsam zur unendlichen Geschichte

Flächeninhalt des ebenen Dreiecks (Seite 3)
als Funktion seiner Seitenlängen

$\overline{P_1P_2} = c; \quad \overline{P_2P_3} = a; \quad \overline{P_3P_1} = b$

Heron $area\Delta abc = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ [1]

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c) \quad , \qquad (\Delta 1)$$

in klassischer Determinantendarstellung [1,2,3]

$$(area\Delta abc)^2 = -\frac{1}{16}[(a^4+b^4+c^4) - 2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)]$$

$$= -\frac{1}{16}[2(a^4+b^4+c^4) - (a^2+b^2+c^2)^2] \qquad (\Delta 2)$$

$$= -\frac{1}{16}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix} \qquad (\Delta 3)$$

$$= -\frac{1}{16}\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & 1 & 1 \\ b^2 & 1 & 0 & 1 \\ c^2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad (\Delta 4)$$

$$= -\frac{1}{16}\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} \qquad (\Delta 5)$$

** man beachte und kommentiere die Identitäten **

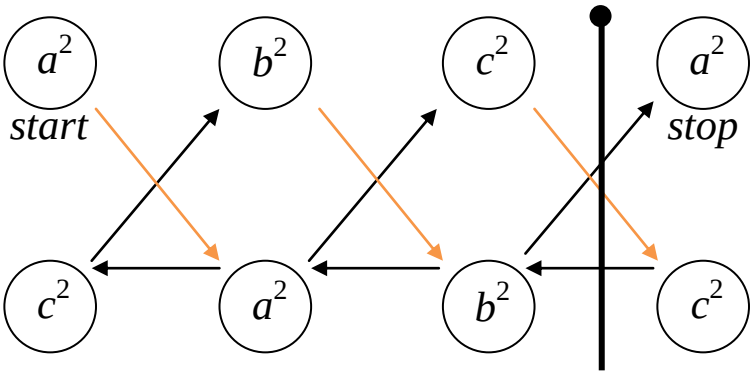
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & 1 & 1 \\ b^2 & 1 & 0 & 1 \\ c^2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} \qquad (\Delta 6)$$

und in verkürzter Determinantendarstellung

$$(area\Delta abc)^2 =$$

$$-\frac{1}{16}\begin{vmatrix} a^2 & a^2 & 0 & b^2 & b^2 & 0 & c^2 & c^2 & 0 \\ c^2 & 0 & a^2 & a^2 & 0 & b^2 & b^2 & 0 & c^2 \end{vmatrix} \qquad (\Delta 7)$$

$$= -\frac{1}{16}$$



$$= -\frac{1}{16}\begin{pmatrix} a^2 * a^2 - a^2 * c^2 - c^2 * b^2 + b^2 * b^2 \\ -b^2 * a^2 - a^2 * c^2 + c^2 * c^2 - c^2 * b^2 - b^2 * a^2 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{16}\left(\left(a^4 + b^4 + c^4\right) - 2\left(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2\right)\right) \qquad (\Delta 8)$$

Array (Matrix, pattern) + Navigation + Operation $x \pm y * z$

Frage 1

Welche der fünf Determinantendarstellungen für $(area\Delta abc)^2$ sind im Sinne von Unit 70.2 produktiv erweiterbar und wie?

Frage 2

Gegeben ist $area\Delta abc$.
Gesucht ist ein einfacher Algorithmus zur fortlaufenden und von außen steuerbaren Erzeugung von $area\Delta abc$ realisierenden Tripeln (a,b,c).

Frage 3

Wie sind die Fälle

$((area\Delta abc)^2$ berechnet via Gln $(\Delta 1 - 8))$ $\begin{cases} = 0 \\ \\ < 0 \end{cases}$

geometrisch zu interpretieren?

Question 4

The 2x9 determinant pattern

$$\begin{vmatrix} a^2 & a^2 & 0 & b^2 & b^2 & 0 & c^2 & c^2 & 0 \\ c^2 & 0 & a^2 & a^2 & 0 & b^2 & b^2 & 0 & c^2 \end{vmatrix} \qquad (\Delta 9)$$

generates $-16(area\Delta abc)^2$.

Find geometric interpretations for the following shortened determinant patterns

$$\begin{vmatrix} a^2 & a^2 & x^2 & b^2 & b^2 & y^2 & c^2 & c^2 & z^2 \\ c^2 & x^2 & a^2 & a^2 & y^2 & b^2 & b^2 & z^2 & c^2 \end{vmatrix} \qquad (\Delta 10)$$

$$\begin{vmatrix} a^2 & a^2 & 0 & b^2 & b^2 & 0 \\ b^2 & 0 & a^2 & a^2 & 0 & b^2 \end{vmatrix} = a^4 + b^4 - 4a^2b^2 \qquad (\Delta 11)$$

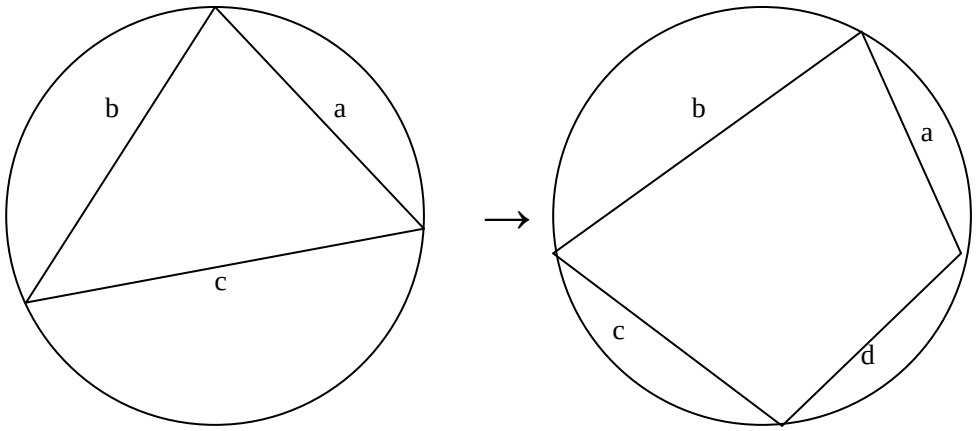
$$\begin{vmatrix} a^2 & a^2 & 0 & b^2 & b^2 & 0 & c^2 & c^2 & 0 & d^2 & d^2 & 0 \\ d^2 & 0 & a^2 & a^2 & 0 & b^2 & b^2 & 0 & c^2 & c^2 & 0 & d^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2) \qquad (\Delta 12)$$

Zu Frage 1

Extension Gl. (Δ4)

Triangle → cyclic quadrangle



0	a	b	c
a	0	c	b
b	c	0	a
c	b	a	0

→

-d	a	b	c
a	-d	c	b
b	c	-d	a
c	b	a	-d

(Δ13)

Flächeninhalt des Sehnenvierecks (cyclic quadrilateral) [5,6],
Heron's formula → Brahmagupta's formula [7]

$$(area\square cycabcd)^2 = -\frac{1}{16}\begin{vmatrix} -d & a & b & c \\ a & -d & c & b \\ b & c & -d & a \\ c & b & a & -d \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{16}\begin{vmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix} \qquad (\Delta 14)$$

Extension Gl. (Δ3)
Line segment → triangle → tetrahedron [8,9]

$$(-1)^0 * 2^1 * (1!)^2 * L^2 =$$

j \ i	0	1	2
0	0	1	1
1	1	0	$\overline{P_1P_2}^2$
2	1	$\overline{P_2P_1}^2$	0

$L^2 = length^2$

$$(-1)^1 * 2^2 * (2!)^2 * A^2 =$$

	0	1	2	3
0	0	1	1	1
1	1	0	$\overline{P_1P_2}^2$	$\overline{P_1P_3}^2$
2	1	$\overline{P_2P_1}^2$	0	$\overline{P_2P_3}^2$
3	1	$\overline{P_3P_1}^2$	$\overline{P_3P_2}^2$	0

$A^2 = area^2$

$$(-1)^2 * 2^3 * (3!)^2 * V^2 =$$

	0	1	2	3	4
0	0	1	1	1	1
1	1	0	$\overline{P_1P_2}^2$	$\overline{P_1P_3}^2$	$\overline{P_1P_4}^2$
2	1	$\overline{P_2P_1}^2$	0	$\overline{P_2P_3}^2$	$\overline{P_2P_4}^2$
3	1	$\overline{P_3P_1}^2$	$\overline{P_3P_2}^2$	0	$\overline{P_3P_4}^2$
4	1	$\overline{P_4P_1}^2$	$\overline{P_4P_2}^2$	$\overline{P_4P_3}^2$	0

$V^2 = volume^2$

(Δ15.1,2,3)

Volumen eines Tetraeders mit den Eckpunkten P_1, P_2, P_3 und P_4 als Funktion seiner Kantenlängen

$$\overline{P_1P_2} = d_{12};\ \overline{P_2P_3} = d_{23};\ \overline{P_3P_1} = d_{31}$$
$$\overline{P_1P_4} = d_{14};\ \overline{P_2P_4} = d_{24};\ \overline{P_3P_4} = d_{34}$$

$$d_{ij} = d_{ji}$$
(Δ16.1)

in klassischer Determinantendarstellung [3]

$$(volumeTP_1P_2P_3P_4)^2 = \frac{1}{288}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ 1 & d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ 1 & d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ 1 & d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0 \end{vmatrix} \quad (\Delta 16.2)$$

Umformung in verkürzte Determinante?

Zu Frage 3

Geometrische Interpretation von

$$((area\Delta abc)^2 \text{ berechnet via Gln } (\Delta 1 - 8)) \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a + b > c & \text{Dreiecksungleichung [10]} \\ a + b = c & \text{Kollinearität} \\ a + b < c & \text{Unmöglichkeit} \end{cases} .$$

Zusammenhang zwischen Dreiecksungleichung und imaginärer Zahl?
Wie steht es mit der produktiven Nutzung dieses Vorzeichengeschenks?

References

[1] http://mathworld.wolfram.com/HeronsFormula.html
[2] http://en.wikipedia.org/wiki/Heron's_formula
[3] http://mathworld.wolfram.com/Cayley-MengerDeterminant.html
[4] http://de.wikipedia.org/wiki/Sehnenviereck
[5] http://mathworld.wolfram.com/CyclicQuadrilateral.html
[6] http://de.wikipedia.org/wiki/Sehnenviereck
[7] http://en.wikipedia.org/wiki/Brahmagupta's_formula
[8] http://mathworld.wolfram.com/Tetrahedron.html
[9] http://mathworld.wolfram.com/HeronianTetrahedron.html
[10] http://en.wikipedia.org/wiki/Triangle_inequality