Unit 70.11

Zurück zu 70.8, Gl. (2), als Startrampe zu neuen Zielen

70.11 Variation 1 auf "$A_{\triangle P_1P_2P_3} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$"

Die Flächeninhaltsformel eines ebenen Dreiecks

$$A_{\triangle P_1P_2P_3} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \tag{70.1}$$

besitzt neben ihrem speziellen Wert als einprägsame ("elegante") und numerisch gut handhabbare Lösung (eines punktuellen Problems) den Rang einer Schlüsselformel, d.h. ist Basis für die Determinantenlösung einer ganzen Reihe komplizierterer Probleme im Bereich der analytischen Geometrie (und ihrer Anwendungen). Die Abschnitte 70.11.1 bis 70.11.3 demonstrieren das produktive Ausloten dieser Schlüsselformel.

70.11.1 Lagekode Punkt – Dreieck in der Ebene

Gegeben:

– Punkt $P = (x, y)$
– und Dreieck $\triangle P_1P_2P_3$ mit $P_i = (x_i, y_i)\,;\, i = 1, 2, 3$ in der Ebene (Bild 2)

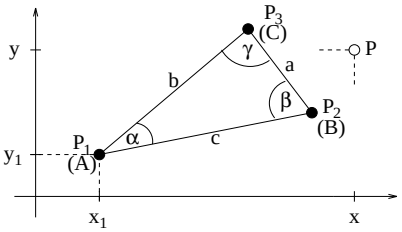


Bild 2: Lagebeziehung $P - \triangle P_1P_2P_3$ in der Ebene

Gesucht:

Lagebeziehung Punkt P – Dreieck $\triangle P_1P_2P_3$ ("Lagekode" $P - \triangle P_1P_2P_3$):
– P liegt innerhalb von $\triangle P_1P_2P_3$
– P liegt auf $\triangle P_1P_2P_3$ (mit weiterer Detaillierung: P liegt auf Seite c, P liegt auf Eck–punkt P_3, ..)
– P liegt außerhalb von $\triangle P_1P_2P_3$ (mit weiterer Detaillierung).

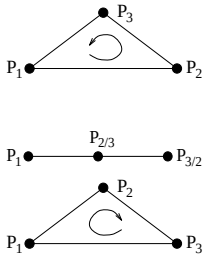
Diese Lagebeziehung ist dabei allein durch Rechnung aus den Koordinaten von P, P_1, P_2 und P_3, ohne Zuhilfenahme einer zusätzlichen geometrischen Darstellung, zu bestimmen.

Lösung:

Basis

Aus Gleichung (70.1) folgt

$$A_{\triangle P_1P_2P_3} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \quad \begin{cases} > 0 & \\ = 0 & \text{für} \\ < 0 & \end{cases} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \tag{70.2}$$

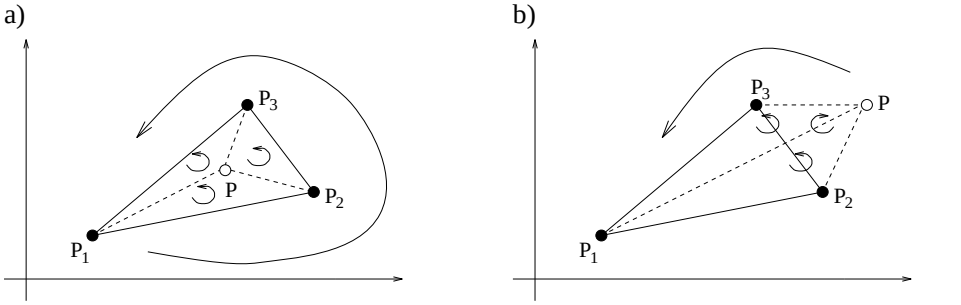


d.h. Gleichung (70.1) liefert in Abhängigkeit vom Durchlaufsinn des Dreiecks einen vorzeichenbehafteten (orientierten) Flächeninhalt!

Lösungsidee

Die eigentliche Lösungsidee besteht in der produktiven Verwertung dieses "Vorzeichengeschenkes":

- P befinde sich innerhalb des im positiven mathematischen Drehsinn orientierten Dreiecks $\triangle P_1P_2P_3$. Dann sind die durch P erzeugten Teildreiecke $\triangle PP_2P_3$, $\triangle P_1PP_3$ und $\triangle P_1P_2P$ ebenfalls positiv orientiert (Bild 3a).



P liegt innerhalb $\triangle P_1P_2P_3$ P liegt außerhalb $\triangle P_1P_2P_3$

Bild 3: Lagebeziehung $P - \triangle P_1P_2P_3$

Für die normierten Flächeninhalte

$$b_1 = \frac{A_{\triangle PP_2P_3}\text{ , Gl.(70.1)}}{A_{\triangle P_1P_2P_3}\text{ , Gl.(70.1)}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_2 & x_3 \\ y & y_2 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}} \tag{70.3}$$

$$b_2 = \frac{A_{\triangle P_1 P P_3}\,,\ \text{Gl.(70.1)}}{A_{\triangle P_1 P_2 P_3}\,,\ \text{Gl.(70.1)}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x & x_3 \\ y_1 & y & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}} \tag{70.4}$$

$$b_3 = \frac{A_{\triangle P_1 P_2 P}\,,\ \text{Gl.(70.1)}}{A_{\triangle P_1 P_2 P_3}\,,\ \text{Gl.(70.1)}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x \\ y_1 & y_2 & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}} \tag{70.5}$$

hat man dann

$$\text{sgn}(b_1) = +1\,,\ \text{sgn}(b_2) = +1\,,\ \text{sgn}(b_3) = +1\,. \tag{70.6}$$

- Nun wird P, wie in Bild 3b dargestellt, außerhalb von $\triangle P_1 P_2 P_3$ lokalisiert. Für die Teildreiecke $\triangle P P_2 P_3$, $\triangle P_1 P P_3$ und $\triangle P_1 P_2 P$ ergeben sich dann die in Bild 3b eingetragenen Orientierungen und aus den Gleichungen (70.3) bis (70.5) erhält man

  $$\text{sgn}(b_1) = -1\,,\ \text{sgn}(b_2) = +1\,,\ \text{sgn}(b_3) = +1\,, \tag{70.7}$$

  d.h. den unterschiedlichen Lagebeziehungen Bild 3a/b entsprechen unterschiedliche Vorzeichenkonstellationen der b_i.

L$agekode\ P - \triangle P_1 P_2 P_3$

In analoger Weise lassen sich noch weitere 17 Lagebeziehungen $P - \triangle P_1 P_2 P_3$ unterscheiden. Allen so gefundenen 19 Positionen $P - \triangle P_1 P_2 P_3$ sind eineindeutig 19 voneinander verschiedene dreistellige ternäre Kodewörter

$$w = \text{sgn}(b_1)\text{sgn}(b_2)\text{sgn}(b_3) \in \{-1, 0, +1\}^3 \tag{70.8}$$

zugeordnet, die b_i werden dabei mittels der Gleichungen (70.3) bis (70.5) berechnet.

Die zugehörige Kodetabelle ist in Tabelle 1 dargestellt, dabei wurde zur Vereinfachung der Bezeichnungswechsel

$$\frac{P_1 \,\Big|\, P_2 \,\Big|\, P_3}{A \mid B \mid C} \tag{70.9}$$

(vgl. auch Bild 2) vorgenommen.

Bild 4 zeigt den zugehörigen ternären Kodebaum.

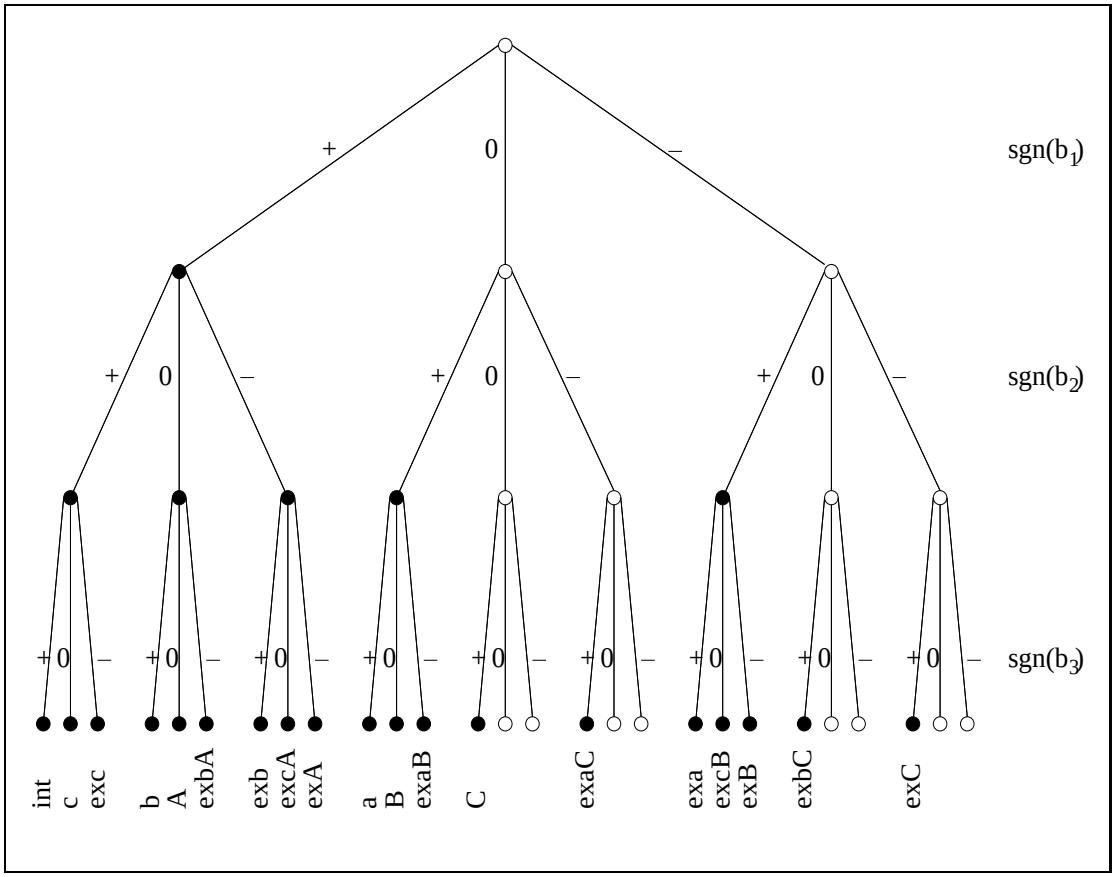
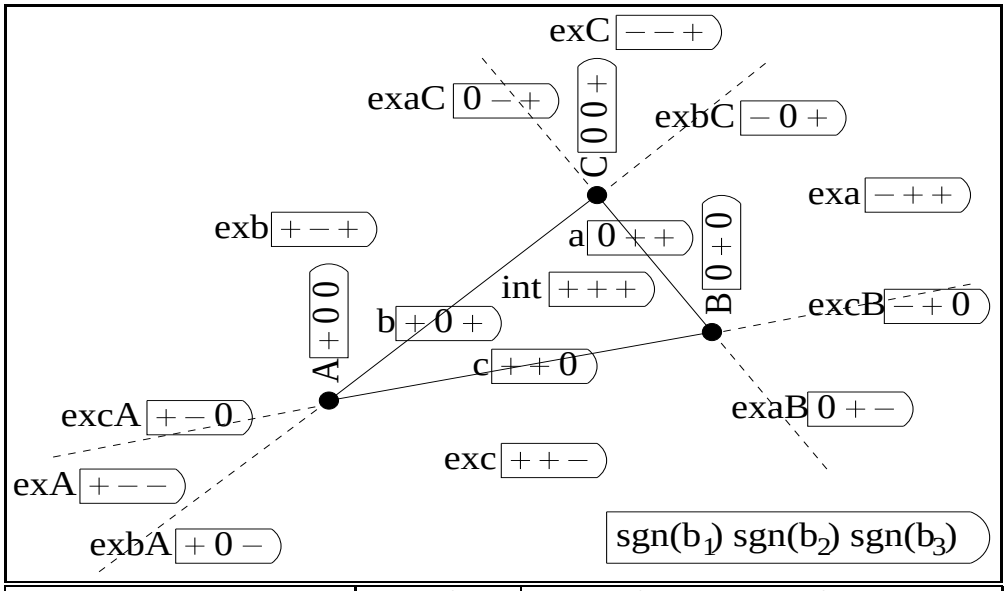


Bild 4: Kodebaum des Lagekodes $P - \triangle ABC$



P liegt in der Ebene		Kurzbe– zeichnung	genau dann, wenn gilt sgn(b_1) =	sgn(b_2) =	sgn(b_3) =
innerhalb $\triangle ABC$		int	+1	+1	+1
in Punkt	A	A	+1	0	0
	B	B	0	+1	0
	C	C	0	0	+1
auf Seite	a	a	0	+1	+1
	b	b	+1	0	+1
	c	c	+1	+1	0
auf der Verlängerung von Seite.. über Punkt.. hinaus	a B	exaB	0	+1	−1
	a C	exaC	0	−1	+1
	b A	exbA	+1	0	−1
	b C	exbC	−1	0	+1
	c A	excA	+1	−1	0
	c B	excB	−1	+1	0
innerhalb des offenen Sektors von Punkt..	A	exA	+1	−1	−1
	B	exB	−1	+1	−1
	C	exC	−1	−1	+1
innerhalb des offenen Sektors von Seite..	a	exa	−1	+1	+1
	b	exb	+1	−1	+1
	c	exc	+1	+1	−1

Tabelle 1: Kodetabelle des Lagekodes $P - \triangle ABC$

Aufgabe 1

(a) Diskutieren Sie den Aufbau des Kodebaumes Bild 4.

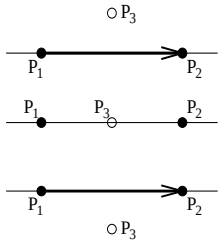
(b) In diesem Kodebaum sind nur $3^3 - 2^3 = 19$ Blattknoten ($\bullet$) mit $P - \triangle P_1P_2P_3$ – Positionen belegt, wie sind die restlichen 2^3 "leeren" Blattknoten ($\circ$) zu interpretieren?

(c) Formulieren Sie anhand von Tabelle 1 und Bild 4 das Bildungsgesetz des Lagekodes $P - \triangle P_1P_2P_3$ in konsequenter Zeichenkettennotation.

Lösungsskizze:

- Andere Interpretation von Gleichung (70.2):

$$A_{\triangle P_1P_2P_3} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \quad \begin{cases} > 0 \\ = 0 \quad \text{für} \\ < 0 \end{cases} \qquad (70.10)$$



- Bildungsgesetz des Lagekodes $P - \triangle P_1P_2P_3$, geometrische Darstellung:

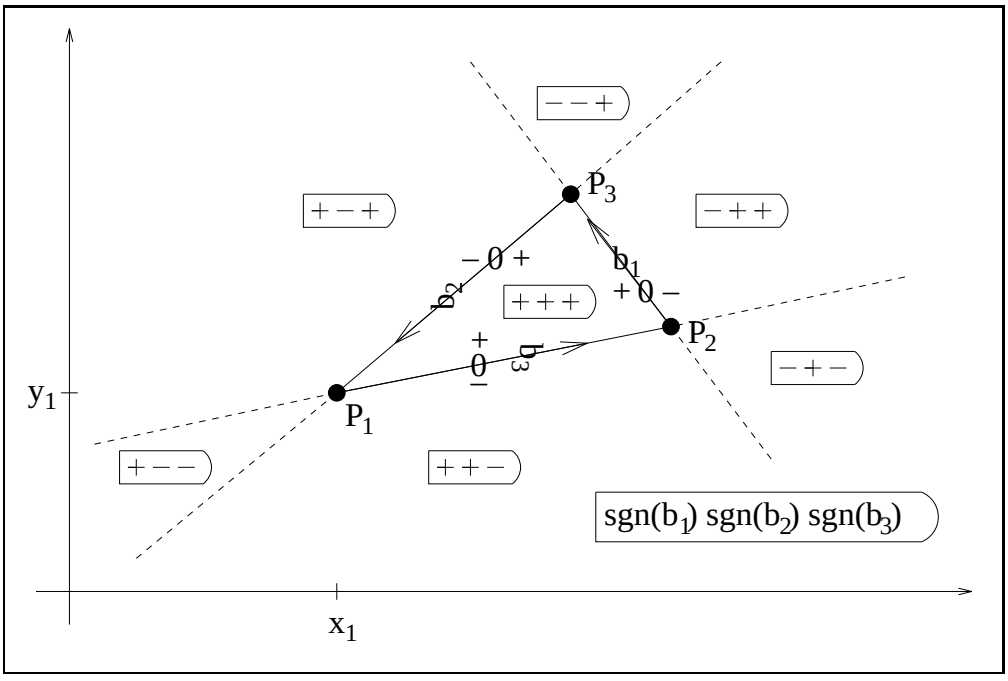


Bild 5: Bildungsgesetz des Lagekodes $P - \triangle P_1P_2P_3$

- Zugehörige Zeichenkettennotation ?

L$agegleichung\ P - \triangle P_1P_2P_3$

Die Determinantengleichungen (70.3) bis (70.5) lassen sich via Cramersche Regel in eine einzige Matrizengleichung komprimieren:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}}_{\underline{\mathrm{K}}} \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}}_{\vec{b}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}}_{\vec{k}} \tag{70.11}$$

$$\underline{\mathrm{K}}\ \vec{b} = \vec{k} \quad - \text{ Lagegleichung} \tag{70.12}$$

$\underline{\mathrm{K}}$ – Koordinatenmatrix von $\triangle P_1P_2P_3$,

$$\det\underline{\mathrm{K}} = 2A_{\triangle P_1P_2P_3} \tag{70.13}$$

$\vec{b}$ – Lagevektor $P - \triangle P_1P_2P_3$,
b_1, b_2, b_3 – Lagekoordinaten $P - \triangle P_1P_2P_3$,

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1 \tag{70.14}$$

$\vec{k}$ – Koordinatenvektor von P

Diese Lagegleichung beschreibt die Lagebeziehung $P - \triangle P_1P_2P_3$ in einfachstmöglicher und adäquater Form.

Sie lässt sich so zwanglos auch als lineare Abbildungsgleichung – Abbildung des Dreiecks $\triangle P_1P_2P_3$ (beschrieben durch die Koordinatenmatrix $\underline{\mathrm{K}}$) auf den Punkt P (beschrieben durch den Koordinatenvektor $\vec{k}$) mittels des Abbildungsvektors $\vec{b}$ – interpretieren.

Aufgabe 2

Das allgemeine Glied $(\triangle P_1P_2P_3)(t)$ der Dreiecksfolge $(\triangle P_1P_2P_3)(0)$, $(\triangle P_1P_2P_3)(1)$, $(\triangle P_1P_2P_3)(2)$,.. in der Ebene werde nach der Vorschrift

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}(t+1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}(t) \begin{pmatrix} b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 \\ b_3 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1\ ,\ t = 0, 1, 2, \ldots \tag{70.15}$$

gebildet.

(a) Interpretieren Sie dieses Bildungsgesetz.

(b) Untersuchen Sie experimentell die "Entwicklungsgeschichte" charakteristischer Dreiecke $(\triangle P_1P_2P_3)(0)$ für charakteristische Abbildungsvektoren $\vec{b}$.

Aufgabe 3

Diskutieren Sie die Interpretation der Lagekoordinaten b_1, b_2, b_3 als "baryzentrische Koordinaten" des Punktes P in bezug auf das Dreieck $(\triangle P_1P_2P_3)$.

70.11.2 Richtungskode Punkt – Stern in der Ebene

Die Leistungsfähigkeit der Lagekoordinaten

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \tag{70.16}$$

zur Beschreibung der Lagebeziehung Punkt P – Dreieck $\triangle P_1P_2P_3$ in der Ebene (Tabelle 1, Bild 4) legt nahe, die durch Gleichung (70.16) definierte Funktion

$$b: \{1,2,3\} \to \mathbb{R} \tag{70.17}$$

unter Zugrundelegung des Matrizenkalküls weiter auszuloten.
In Analogie zur Untersuchung einer reellen Funktion einer reellen Variablen mit den Mitteln der Analysis ist dabei in erster Linie an

- die gemäß Bild 6 gebildeten Differenzen

$$\triangle b_1 = b_2 - b_1\,,\ \triangle b_2 = b_3 - b_2\,,\ \triangle b_3 = b_1 - b_3 \tag{70.18}$$

$$\triangle^2 b_1 = \triangle b_2 - \triangle b_1\,,\ \triangle^2 b_2 = \triangle b_3 - \triangle b_2\,,\ \triangle^2 b_3 = \triangle b_1 - \triangle b_3 \tag{70.19}$$

$\vdots$

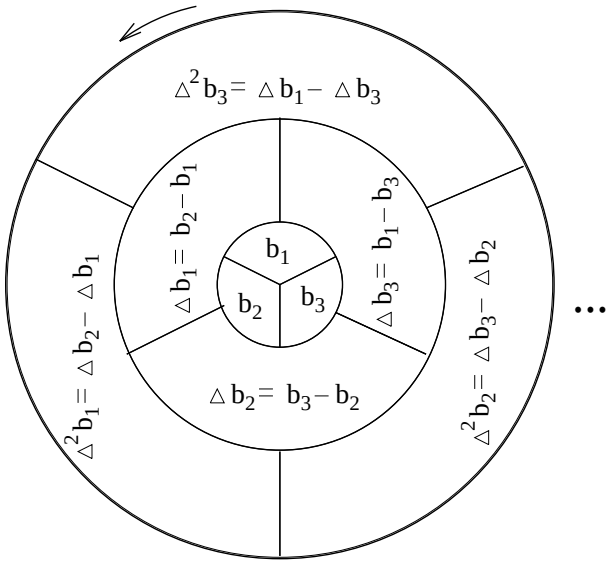


Bild 6: Bildungsgesetz für die Differenzen der Lagekoordinaten

- und die Summen

$$b_1 + b_2 + b_3 \tag{70.20}$$

$$b_1 + (b_1 + b_2) + (b_1 + b_2 + b_3) \tag{70.21}$$

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \tag{70.22}$$

$$\vdots$$

zu denken.

Für die ersten Differenzen der Lagekoordinaten hat man in Matrizennotation

$$\begin{pmatrix} \triangle b_1 \\ \triangle b_2 \\ \triangle b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \tag{70.23}$$

Daraus folgt mit Gleichung (70.16) und (70.19)

$$\begin{pmatrix} \triangle^k b_1 \\ \triangle^k b_2 \\ \triangle^k b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \; ; \; k = 0, 1, 2, \ldots , \tag{70.24}$$

hierbei ist

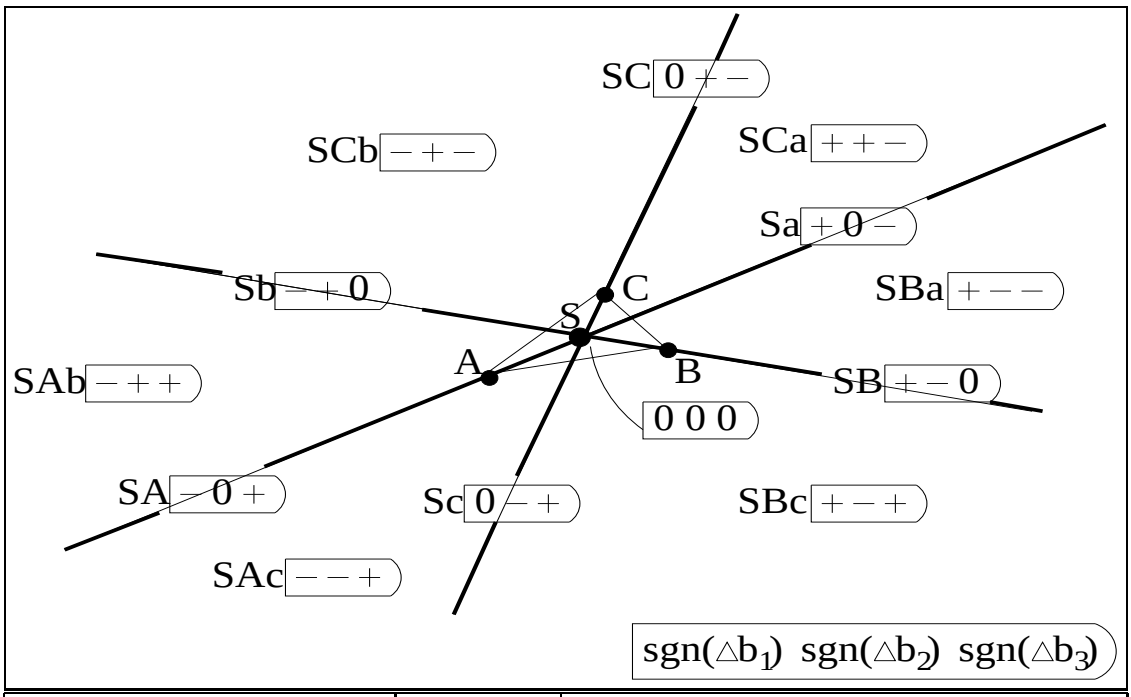
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{70.25}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \tag{70.26}$$

Die experimentelle Untersuchung der ersten Differenzen mittels eines geeigneten Graphikprogramms ($\triangle P_1 P_2 P_3$ fest, P variabel über die gesamte Ebene, Berechnung der $\triangle b_i$ mittels Gleichung (70.23)) liefert das in Tabelle 4 und Bild 7 dargestellte Ergebnis, dabei wurde zur Vereinfachung wie in Abschnitt 5.2.2, Tabelle 1 und Bild 4 der Bezeichnungswechsel

$$\frac{P_1 \,\big|\, P_2 \,\big|\, P_3}{A \mid B \mid C} \tag{70.9}$$

(vgl. auch Bild 2) vorgenommen.



P liegt in der Ebene			Kurzbe–zeichnung	genau dann, wenn gilt $\operatorname{sgn}(\triangle b_1) =$	$\operatorname{sgn}(\triangle b_2) =$	$\operatorname{sgn}(\triangle b_3) =$
in Schwerp. S des $\triangle ABC$			S	0	0	0
auf der Seiten–halbierenden der Seite.., .. –Strahl	a	SA	SA	-1	0	$+1$
		Sa	Sa	$+1$	0	-1
	b	SB	SB	$+1$	-1	0
		Sb	Sb	-1	$+1$	0
	c	SC	SC	0	$+1$	-1
		Sc	Sc	0	-1	$+1$
innerhalb des offenen Sektors..	SA,	Sb	SAb	-1	$+1$	$+1$
		Sc	SAc	-1	-1	$+1$
	SB,	Sa	SBa	$+1$	-1	-1
		Sc	SBc	$+1$	-1	$+1$
	SC,	Sa	SCa	$+1$	$+1$	-1
		Sb	SCb	-1	$+1$	-1

Tabelle 4: Kodetabelle des Richtungskodes $P - *SABC$

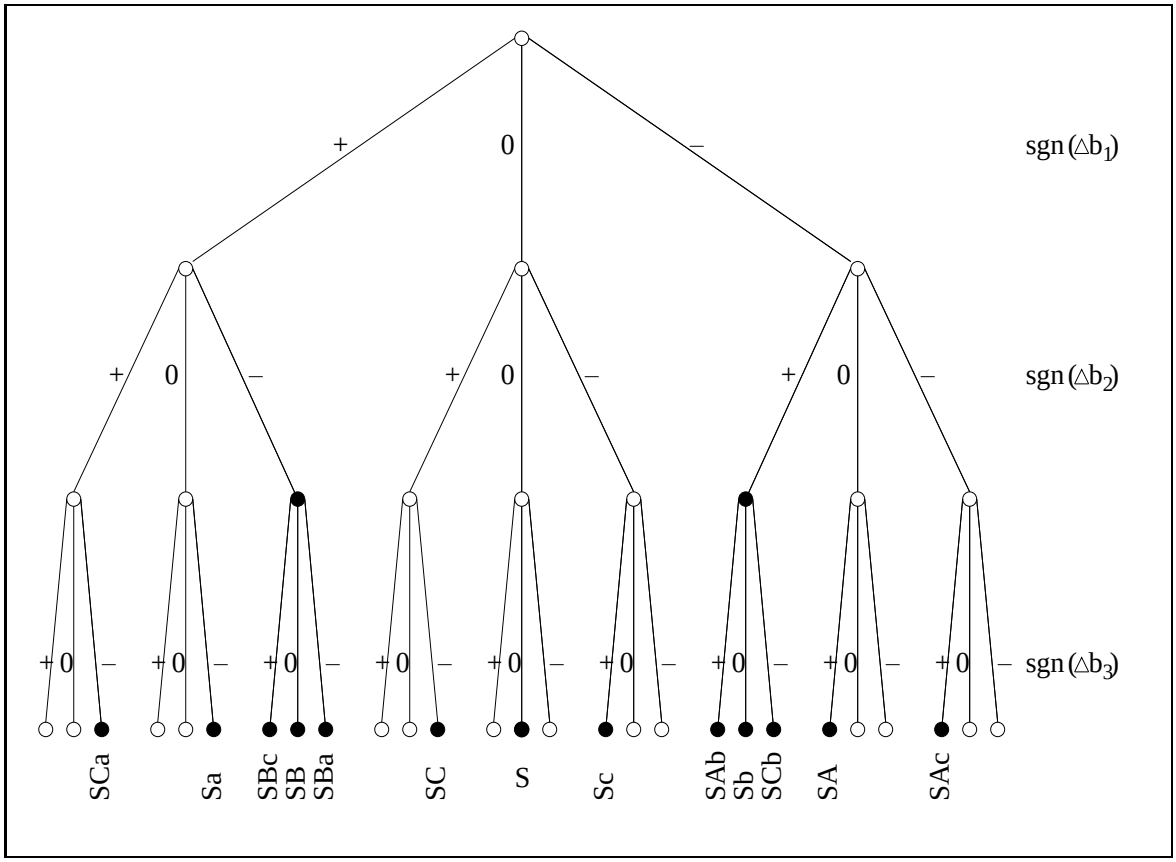


Bild 7: Kodebaum des Richtungskodes $P - *SABC$

Sie erkennen:

- Bezüglich des sechsstrahligen Sternes $*SABC$, der durch die drei Eckpunkte A, B und C des Dreiecks $\triangle ABC$ und dessen Schwerpunkt S als Zentrum gebildet wird, lassen sich für den Punkt P 13 Richtungsbeziehungen unterscheiden. Allen so gefundenen Positionen Punkt–Stern sind eineindeutig 13 voneinander verschiedene dreistellige ternäre Kodewörter

  $$v = \operatorname{sgn}(\triangle b_1)\operatorname{sgn}(\triangle b_2)\operatorname{sgn}(\triangle b_3) \ \in \ \{-1, 0, +1\}^3 \tag{70.27}$$

  zugeordnet, die $\triangle b_i$ werden dabei mittels Gleichung (70.23) berechnet.

- Mit anderen Worten: Gleichung (70.23) definiert einen Richtungskode Punkt P – Stern $*SABC$ in der Ebene mit der Kodetabelle Tabelle 4 und dem Kodebaum Bild 7.

Aufgabe 4

Verifizieren Sie diesen experimentell gefundenen Sachverhalt.

Lösungsskizze:

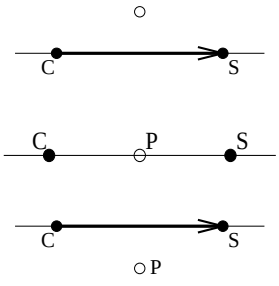
- Aus Gleichung (70.18) folgt mit Gl. (70.3) – (70.5) und Tabelle 2, Nr. 3

$$\triangle b_1 = b_2 - b_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x & x_3 \\ y_1 & y & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}} - \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_2 & x_3 \\ y & y_2 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}}$$

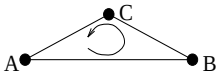
$$= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_3 & x_1 & x \\ y_3 & y_1 & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_3 & x_2 & x \\ y_3 & y_2 & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ x_3 & (x_1+x_2+x_3) & x \\ y_3 & (y_1+y_2+y_3) & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}} = 3 \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_3 & x_s & x \\ y_3 & y_s & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}}$$

$$\begin{cases} > 0 & \\ = 0 & \text{für} \\ < 0 & \end{cases}$$



und



(70.28)

Das ist aber genau der gemäß Tabelle 4, Spalte 3 experimentell gefundene Zusammenhang zwischen der Lage von P und dem Vorzeichen von $\triangle b_1$.

- Analoges gilt für $\triangle b_2$ und $\triangle b_3$.

Aufgabe 5

Untersuchen Sie in derselben Weise die höheren Differenzen Gleichung (70.19) und (70.24) und die Summen Gl. (70.20) – (70.22) der Lagekoordinaten.

Aufgabe 6

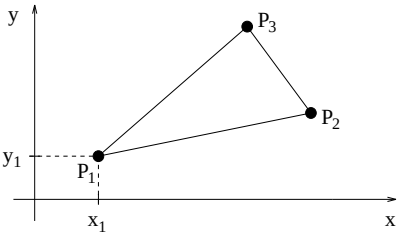
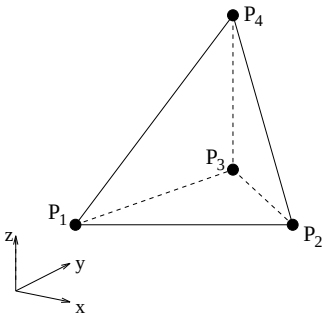
Bearbeiten Sie die in Aufgabe 1 angegebenen Fragestellungen zum Lagekode $P - \triangle P_1P_2P_3$ sinngemäß und konsistent nun auch für den Richtungskode $P - *SP_1P_2P_3$.

70.11.3 Kleiner und größer: Derivate von Gleichung (70.1)

Die nachstehende Tabelle 5 summiert als Grundlage für Ihre eigenen weiterführenden Untersuchungen Determinantenformeln, die in der betrachteten Formel für den Flächeninhalt des ebenen Dreiecks

$$A_{\triangle P_1P_2P_3} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \tag{70.1}$$

enthalten sind bzw. die diese Formel enthalten.

Lfd. Nr.	Geometrisches Objekt	zugehörige Determinantenformel
1	Dreieck $P_1P_2P_3$ in der Ebene 	Flächeninhalt des $\triangle P_1P_2P_3$ $A_{\triangle P_1P_2P_3} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$
2	Strecke P_1P_2 auf der Geraden 	Länge der Strecke P_1P_2 $L_{\text{Str.}P_1P_2} = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}$
3	Tetraeder $P_1P_2P_3P_4$ im dreidimensionalen Raum 	Volumen des Tetraeders $P_1P_2P_3P_4$ $V_{TP_1P_2P_3P_4} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}$

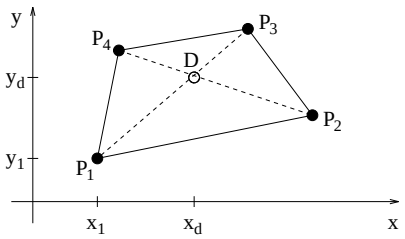
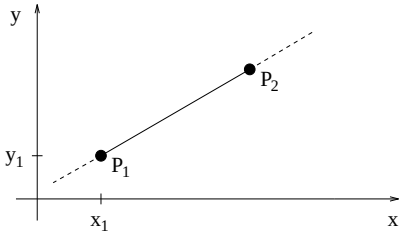
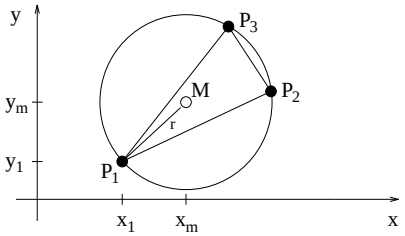
4	Viereck $P_1P_2P_3P_4$ in der Ebene 	Flächeninhalt des Vierecks$P_1P_2P_3P_4$ $A_{\square P_1P_2P_3P_4} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}$
5	Gerade durch zwei Punkte P_1 und P_2 in der Ebene 	Zweipunktegleichung der Geraden $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x \\ y_1 & y_2 & y \end{vmatrix} = 0$
6	Kreis durch drei Punkte P_1, P_2 und P_3 in der Ebene 	Dreipunktegleichung des Kreises $\left\vert\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x \\ y_1 & y_2 & y_3 & y \\ \hline x_1^2+y_1^2 & x_2^2+y_2^2 & x_3^2+y_3^2 & x^2+y^2 \end{array}\right\vert = 0$
7	Kegelschnitt durch fünf Punkte $P_1, \ldots, P_5$ in der Ebene	Fünfpunktegleichung des Kegelschnittes $\left\vert\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y \\ \hline x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_5^2 & x^2 \\ y_1^2 & y_2^2 & y_3^2 & y_4^2 & y_5^2 & y^2 \\ x_1y_1 & x_2y_2 & x_3y_3 & x_4y_4 & x_5y_5 & xy \end{array}\right\vert = 0$
⋮		

Tabelle 5: Derivate von Gleichung (70.1)

Aufgabe 7

Setzen Sie Tabelle 5 fort (z.B. Volumen der vierseitigen Pyramide,..).

Aufgabe 8

Aus Tabelle 5, Nr. 1–3 folgt eine einheitliche in Matrizenform notierbare Lagegleichung für die Lagebeziehung

Punkt P $\left\{\begin{array}{l}\text{Strecke } Str.P_1P_2 \text{ auf der Geraden}\\ \text{Dreieck } \triangle P_1P_2P_3 \text{ in der Ebene}\\ \text{Tetraeder } TP_1P_2P_3P_4 \text{ im dreidimensionalen Raum}\end{array}\right.$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cccc}1 & 1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4\\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4\end{array}\right)}_{\underline{K}}\quad\underbrace{\left(\begin{array}{c}b_1\\ b_2\\ b_3\\ b_4\end{array}\right)}_{\vec{b}}\begin{array}{l}\text{Str.}\\ \triangle\\ \text{T}\end{array}\quad=\quad\underbrace{\left(\begin{array}{c}1\\ x\\ y\\ z\end{array}\right)}_{\vec{k}}\begin{array}{l}\text{Str.}\\ \triangle\\ \text{T}\end{array}\qquad(70.29)$$

$\underline{K}$ – Koordinatenmatrix von $Str.P_1P_2/\triangle P_1P_2P_3/TP_1P_2P_3P_4$
$\vec{b}$ – Lagevektor $P - Str.P_1P_2/\triangle P_1P_2P_3/TP_1P_2P_3P_4$
$\vec{k}$ – Koordinatenvektor von P

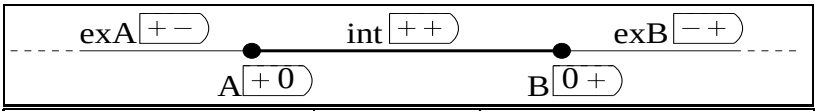
Die Existenz einer solchen einheitlichen Lagegleichung legt natürlich die Vermutung nahe, dass für diese drei Fälle auch ein einheitlich aufgebauter ternärer

Lagekode P – $\left\{\begin{array}{l}Str.P_1P_2\\ \triangle P_1P_2P_3\\ TP_1P_2P_3P_4\end{array}\right.$ mit den $\left\{\begin{array}{l}\text{zweistelligen}\\ \text{dreistelligen}\\ \text{vierstelligen}\end{array}\right.$ Kodewörtern

$$w = \underbrace{\operatorname{sgn}(b_1)\ \operatorname{sgn}(b_2)}_{Str.P_1P_2}\ \underbrace{\operatorname{sgn}(b_3)}_{\triangle P_1P_2P_3}\ \underbrace{\operatorname{sgn}(b_4)}_{TP_1P_2P_3P_4}\qquad(70.30)$$

existiert.
Formulieren Sie das Bildungsgesetz dieses einheitlichen Lagekodes (vgl. Aufg. 1 **(c)**).
Lösungshinweise:

- Unter Benutzung des vereinfachenden Bezeichnungswechsels Geichung (70.9) erhält man aus Gleichung (70.29) für die fünf möglichen Positionen Punkt P – Strecke AB auf der Geraden die in Tabelle 6 angegebenen zweistelligen ternären Kodewörter.



P liegt in der Ebene		Kurzbe–zeichnung	genau dann, wenn gilt sgn(b_1) =	sgn(b_2) =
innerhalb AB		int	$+1$	$+1$
in Punkt	A	A	$+1$	0
	B	B	0	$+1$
außerhalb Punkt	A	exA	$+1$	-1
	B	exB	-1	$+1$

Tabelle 6: Kodetabelle des Lagekodes $P - Str.AB$

- In Bild 8 sind die Lagekodes $P - Str.AB$ und $P - \triangle ABC$ (vgl. Bild 4) in einen gemeinsamen ternären Kodebaum eingetragen.
- Formulieren Sie als Vorstufe für die gesuchte Lösung das Bildungsgesetz dieses gemeinsamen Kodebaumes. Erweitern Sie ihn auf dieser Grundlage um eine weitere (vierte) Ebene sgn(b_4) zum Kodebaum für den Lagekode $P - TABCD$. Vergleichen Sie den so "formal" erhaltenen Lagekode mit der "geometrischen Realität" $P - TABCD$.

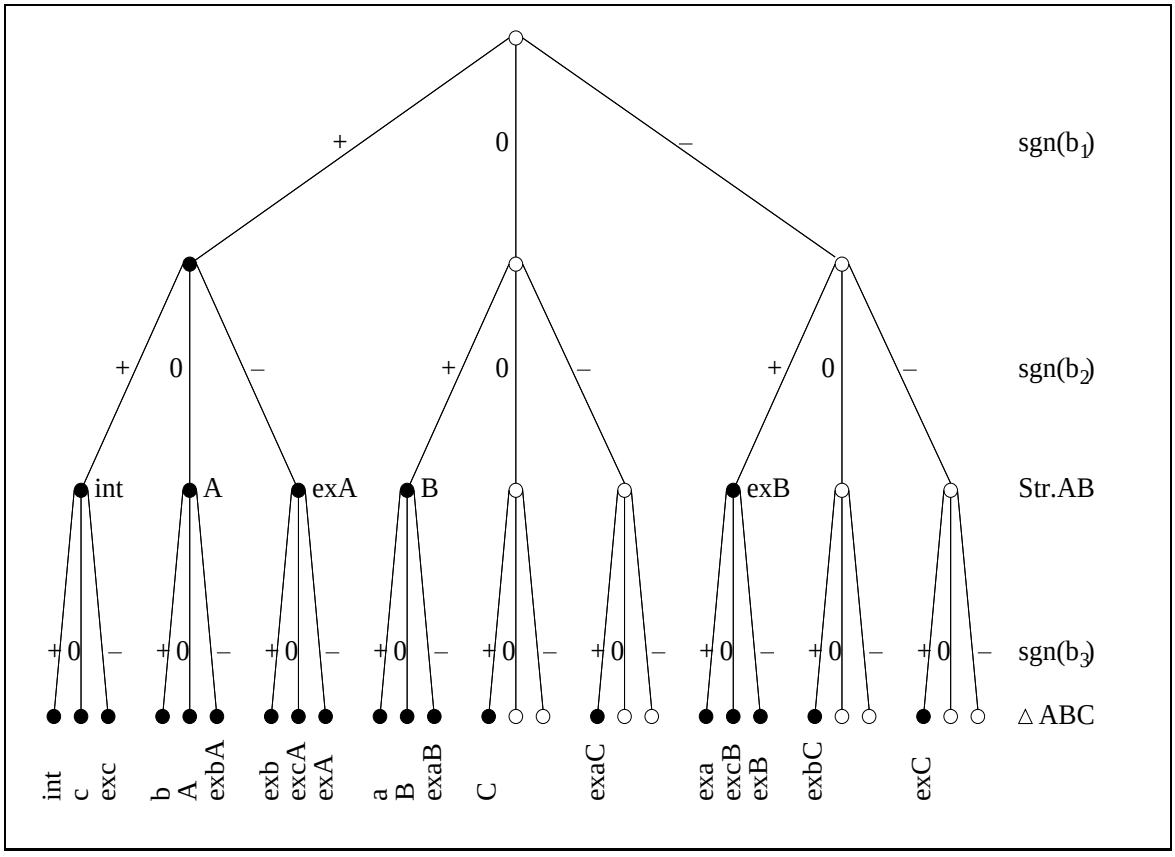


Bild 8: Kodebaum der Lagekodes $P - Str.AB$ und $P - \triangle ABC$

Aufgabe 9

(a) Verifizieren Sie Tabelle 5, Nr. 4.

Lösungsskizze:

$$
\begin{aligned}
A_{\square P_1P_2P_3P_4} &= A_{\triangle P_1P_2P_3} + A_{\triangle P_1P_3P_4} \\
&= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_3 & y_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x_1 & (x_2 - x_4) & x_3 \\ y_1 & (y_2 - y_4) & y_3 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_4 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_4 & y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{70.31}
$$

(b) Diskutieren Sie Gleichung (70.31) für konkave und für überschlagene Rechtecke.

(c) Berechnen Sie die kartesischen Koordinaten des Schnittpunktes der Diagonalen $D = (x_d, y_d)$ des ebenen Rechteckes $\square P_1P_2P_3P_4$. Diskutieren Sie auch hier die in **(b)** genannten Spezialfälle.

Lösung:

$$
x_d = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}}, \quad y_d = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & 0 & y_3 & 0 \\ 0 & y_2 & 0 & y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}} \tag{70.32}
$$

(d) Welcher Zusammenhang besteht zwischen D und dem Flächenschwerpunkt $S = (x_s, y_s)$ des ebenen Vierecks $\square P_1P_2P_3P_4$?

(e) Konstruieren Sie in Analogie zu Abschnitt 70.11.1 einen Lagekode Punkt P – konvexes Viereck $\square P_1P_2P_3P_4$ in der Ebene.

Lösungsskizze:

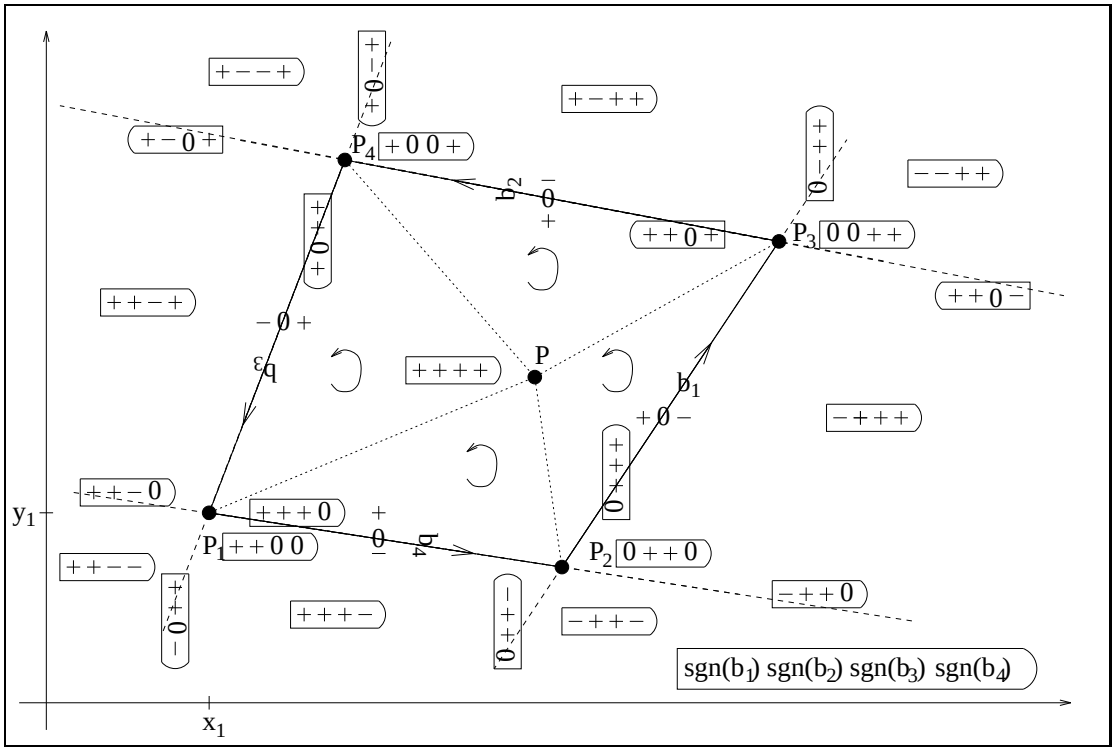


Bild 9: Lagekode $P - \Box P_1P_2P_3P_4$, zugehöriger Kodebaum: Bild 10

$$b_1 = \frac{A_{\triangle PP_2P_3}}{A_{\triangle P_2P_3P_4} + A_{\triangle P_1P_2P_4}} = \frac{A_{\triangle PP_2P_3}}{A_{\Box P_1P_2P_3P_4}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_2 & x_3 \\ y & y_2 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_4 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \overline{0} & 1 & 0 \\ 0 & \overline{1} & 0 & 1 \\ \mathbf{x} & x_2 & x_3 & x_4 \\ \mathbf{y} & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & 1 \\ \mathbf{x} & x_2 & x_3 & x_4 \\ \mathbf{y} & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}}$$

$$b_2 = \frac{A_{\triangle PP_3P_4}}{A_{\Box P_1P_2P_3P_4}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \overline{1} & 0 \\ 0 & 1 & \overline{0} & 1 \\ x_1 & \mathbf{x} & x_3 & x_4 \\ y_1 & \mathbf{y} & y_3 & y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}}$$

$$b_3 = \frac{A_{\triangle P_1 P P_4}}{A_{\square P_1 P_2 P_3 P_4}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & \overline{1} \\ 0 & 1 & 0 & \overline{0} \\ x_1 & x_2 & \mathbf{x} & x_4 \\ y_1 & y_2 & \mathbf{y} & y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}}$$

$$b_4 = \frac{A_{\triangle P_1 P_2 P}}{A_{\square P_1 P_2 P_3 P_4}} = \frac{\begin{vmatrix} \overline{1} & 0 & 1 & 0 \\ \overline{0} & 1 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \mathbf{x} \\ y_1 & y_2 & y_3 & \mathbf{y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}}$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 1 \tag{70.33}$$

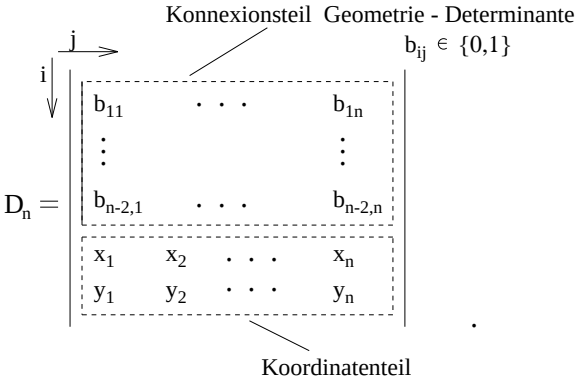
(f) Die Determinantenformeln für die Flächeninhalte des ebenen Dreiecks

$$A_{\triangle P_1 P_2 P_3} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \tag{70.1}$$

und des ebenen Vierecks

$$A_{\square P_1 P_2 P_3 P_4} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix} \tag{70.34}$$

besitzen die Struktur



.

Interpretieren Sie D_n für verschiedene $n > 4$ und zugehörige Konnexionsteile.

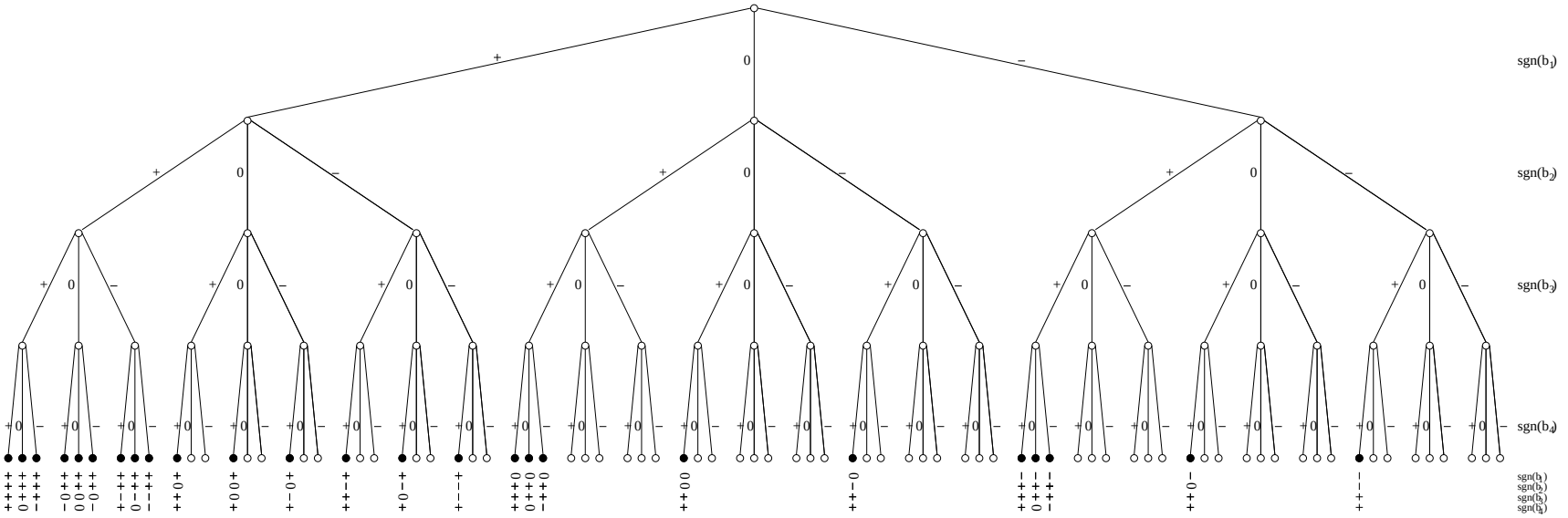


Bild 10: Kodebaum des Lagekodes $P - \Box P_1 P_2 P_3 P_4$