# Unit n°57
## Guilin Étude No.1



### Pythagorean triples ternary coding algorithm and beyond

The set $\Pi$ of primitive Pythagorean triples

$$\begin{aligned}(a,b,c)\,;\ & a,b,c \in \mathbb{N} \\ & a<b<c \\ & \gcd(a,b,c)=1 \\ & a^2+b^2=c^2\end{aligned} \tag{1}$$

is countably infinite.
$\Pi$ can be structured hierarchically by a complete ternary tree, f.i. using the following one to one mapping:

$$\begin{aligned}(a,b,c) \leftrightarrow \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\,;\ & u,v \in \mathbb{N} \text{ and odd} \\ & u<v \\ & \gcd(u,v)=1\end{aligned} \tag{2}$$

with

| Mapping | Examples | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\left.\begin{matrix}u\\v\end{matrix}\right\} = \sqrt{c \mp \text{ select even}(a,b)}$ | 1<br>3 | 1<br>5 | 3<br>5 | 3<br>7 |
| $a=\frac{1}{2}\min(v^2-u^2, 2\,u\,v)$ | 3 | 5 | 8 | 20 |
| $b=\frac{1}{2}\max(v^2-u^2, 2\,u\,v)$ | 4 | 12 | 15 | 21 |
| $c=\frac{1}{2}(v^2+u^2)$ | 5 | 13 | 17 | 29 |

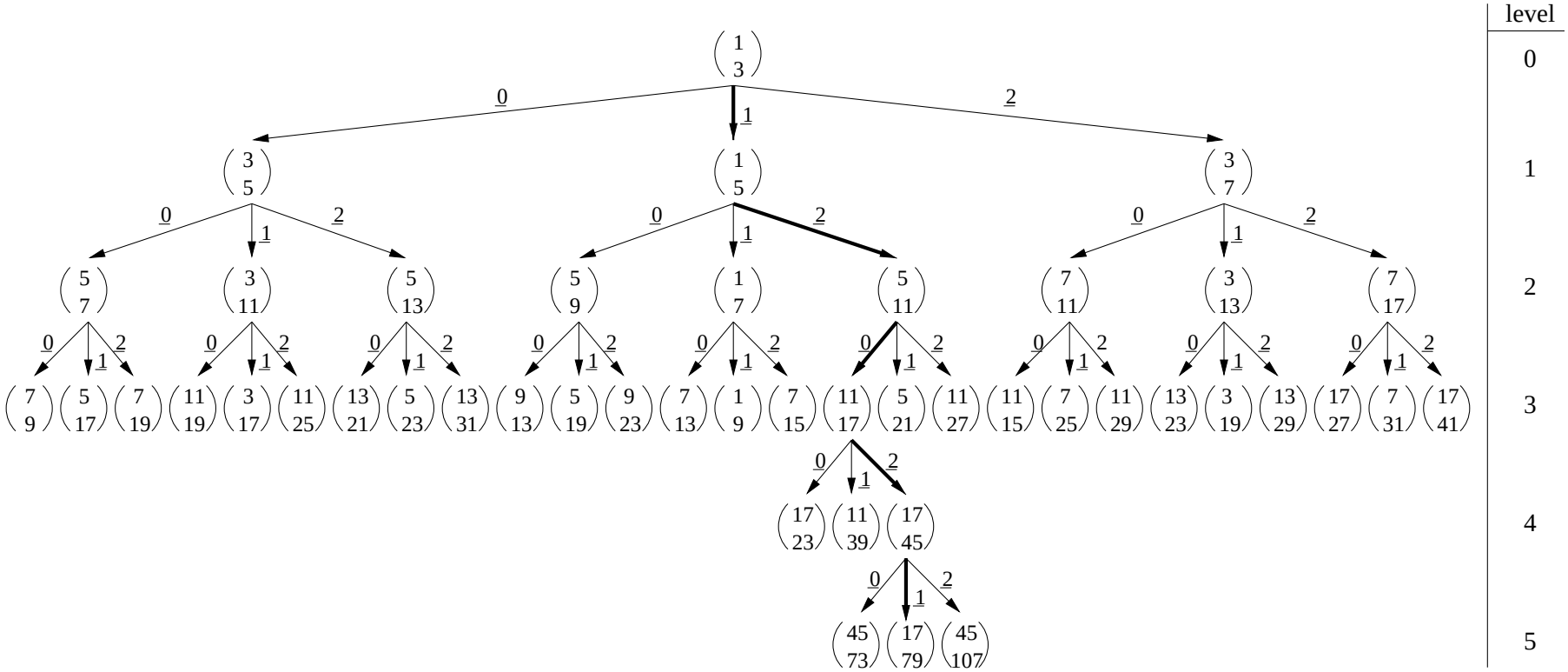
Each vector $\binom{u}{v}$ is then located unique in a complete labeled ternary tree as shown detailled in fig. 1. Its position in the tree can be described (encoded) by a ternary codeword

$$\begin{aligned}\underline{w} \;=\; & \underline{m}(l)\ \ldots\ \underline{m}(3)\ \underline{m}(2)\ \underline{m}(1)\,; \\ & \underline{m}(i) \in \left\{\underline{0}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix},\ \underline{1}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix},\ \underline{2}=\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}\right\}\end{aligned} \tag{3}$$

of the length $l$ (level of $\binom{u}{v}$ in the tree).
$\underline{w}$ is the wordnotation of the shortest path label sequence from the root $\binom{1}{3}$ through the tree to the leaf $\binom{u}{v}$.
$\binom{u}{v}$ is then given by the corresponding matrix product

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = \underline{w}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \underline{m}(l)\ \ldots\ \underline{m}(3)\ \underline{m}(2)\ \underline{m}(1)\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \tag{4}$$

(decoding).




$$\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ \underline{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ \underline{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\tbinom{17}{79}}_{} = \underbrace{\underline{1}\,\underline{2}\,\underline{0}\,\underline{2}\,\underline{1}}_{}\ \tbinom{1}{3} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 37 & 14 \end{pmatrix}\tbinom{1}{3}$$

$\tbinom{u}{v} \leftrightarrow \underline{w} \in \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}\}^*$

Encoding: $\tbinom{u}{v} \rightarrow \underline{w} = \underline{m}(l)\ ...\ \underline{m}(3)\ \underline{m}(2)\ \underline{m}(1)$

$\uparrow$

start (bottom up)

Decoding: $\underline{w} \rightarrow \tbinom{u}{v} = \underline{w}\,\tbinom{1}{3}$

Fig. 1: $\Pi\ \tbinom{u}{v}$ ternary tree

Problems

1. Find a simple bottom–up encoding algorithm

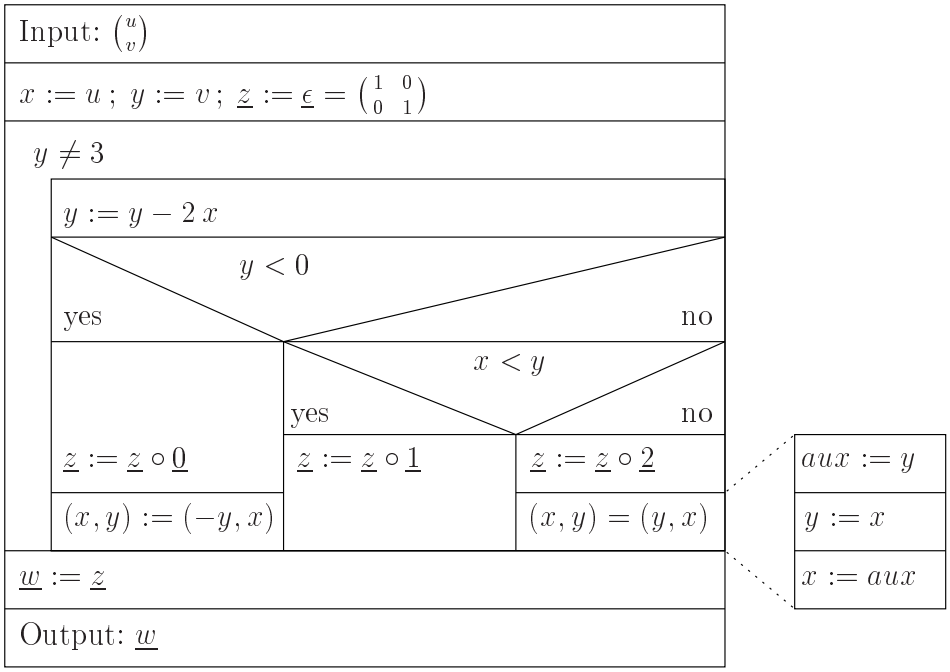
   $\binom{u}{v} \to \underline{w}$

   1.1. Algorithmic idea

   1.2. Mathematical notation

   1.3. Structogram notation

   Solution 1.3




   Example: $\binom{u}{v} = \binom{17}{23}$

   record:

| $i$ | $x$ | $y$ | $\underline{z}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 17 | 23 | $\underline{\epsilon}$ |
| 1 | 17 | −11 | |
| | 11 | 17 | $\underline{\epsilon}\ \underline{0} = \underline{0}$ |
| 2 | 11 | −5 | |
| | 5 | 11 | $\underline{0}\ \underline{0}$ |
| 3 | 5 | 1 | |
| | 1 | 5 | $\underline{0}\ \underline{0}\ \underline{2}$ |
| 4 | 1 | 3 | |
| | 1 | 3 | $\underline{0}\ \underline{0}\ \underline{2}\ \underline{1} = \underline{w}$ |

   stop

2. The matrix product encoding of $\binom{u}{v}$ given by the equations (4) und (3) can be conversed into the matrix notation

$$\begin{pmatrix} \square & u \\ \square & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix} ... \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{pmatrix} \tag{5}$$

of the representation of $\frac{v}{u}$ by a simple continued fraction

$$\frac{v}{u} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n]\,;\ (\forall i)\, a_i \in \mathbb{N} \tag{6}$$

using the following elementary transformation rules

- $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$
- $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_i + a_j \end{pmatrix} \tag{8}$$
- $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_i - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_j - 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

2.1. Find a single conversion algorithm

$$\binom{u}{v} = \underline{w} \binom{1}{3} \rightarrow \begin{pmatrix} \square & u \\ \square & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix} ... \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{pmatrix} \tag{10}$$

Hints to solution 2.1

$\binom{u}{v} = \underline{w} \binom{1}{3}$ is in $2 \times 2$ matrix notion identical with

$$\begin{pmatrix} \square & u \\ \square & v \end{pmatrix} = \underline{w} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

**Example 1**

$\binom{u}{v} = \binom{17}{79}$

$$\begin{pmatrix} \square & 17 \\ \square & 79 \end{pmatrix} = \underline{1}\,\underline{2}\,\underline{0}\,\underline{2}\,\underline{1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{(7)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{(9)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{(7)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{(8)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{(8)} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{(8)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{(8)}}$$

$$= \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$[a_0 = 4\,; \quad a_1 = 1\,, \quad a_2 = 1\,, \quad a_3 = 1\,, \quad a_4 = 5\,] = \frac{v}{u} = \frac{79}{17}$$

**Example 2**

$\binom{u}{v} = \binom{13}{75}$

$$\begin{pmatrix} \square & 13 \\ \square & 75 \end{pmatrix} = \underline{1}\,\underline{1}\,\underline{0}\,\underline{1}\,\underline{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}}^{(7)} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}}^{(7)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}}^{(8)} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}}^{(9)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}}^{(8)} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$[a_0 = 5\,; \quad a_1 = 1\,, \quad a_2 = 3\,, \quad a_3 = 3\,] = \frac{v}{u} = \frac{75}{13}$$

2.2. Find the greatest continued fraction length $nmax$ for the given codeword length $l = 2\,k\,;\ k \in \mathbb{N}$ as well as the accompanying codeword and continued fraction, respectively.

Solution 2.2

- $nmax = 3\,k$ (12)
- $w = (\underline{0}\ \underline{2})^k$ (13)
- $\begin{pmatrix} \square & u \\ \square & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{3\,k} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\ ;\ \lim\limits_{k\to\infty} \frac{v}{u} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ (14)

3. Setzt man den in Fig. 1 begonnenen $\binom{u}{v}$–Ternärbaum ad infinitum fort, ergeben sich von Ebene zu Ebene für $u$ und $v$ immer größere Werte, die Quotienten $\frac{v}{u}$ verbleiben aber im Intervall $\left[\frac{2\,i+3}{2\,i+1}, 2\,i+3\right]$. Dabei nähern sich diese Quotienten für die linksseitigen Strings $j = 0, 1, 2, 3, ...$ des Ternärbaums Fig. 2 mit steigendem $i$ Grenzwerten. Die linksbündige Folge dieser Grenzwerte ist dabei identisch mit der Folge der Quotienten $\frac{v}{u}$, die man erhält, wenn man, wie in Fig. 2 in Verbindung mit Fig. 1 dargestellt, die $\binom{u}{v}$–Folgen der Ternärbaumebenen $i = 0, 1, 2, 3, ...$ linksbündig mit Verdoppelung hintereinender anordnet. Mit anderen Worten: bezüglich der Quotienten $\frac{v}{u}$ wird der linksseitige „Unendlichkeitssaum“ des zweidimensionalen $\binom{u}{v}$–Ternärbaums durch die duplikative Lineardarstellung dieses Baumes repräsentiert. In Umkehrung läßt sich aus dieser Lineardarstellung der Ternärbaum vollständig reproduzieren.

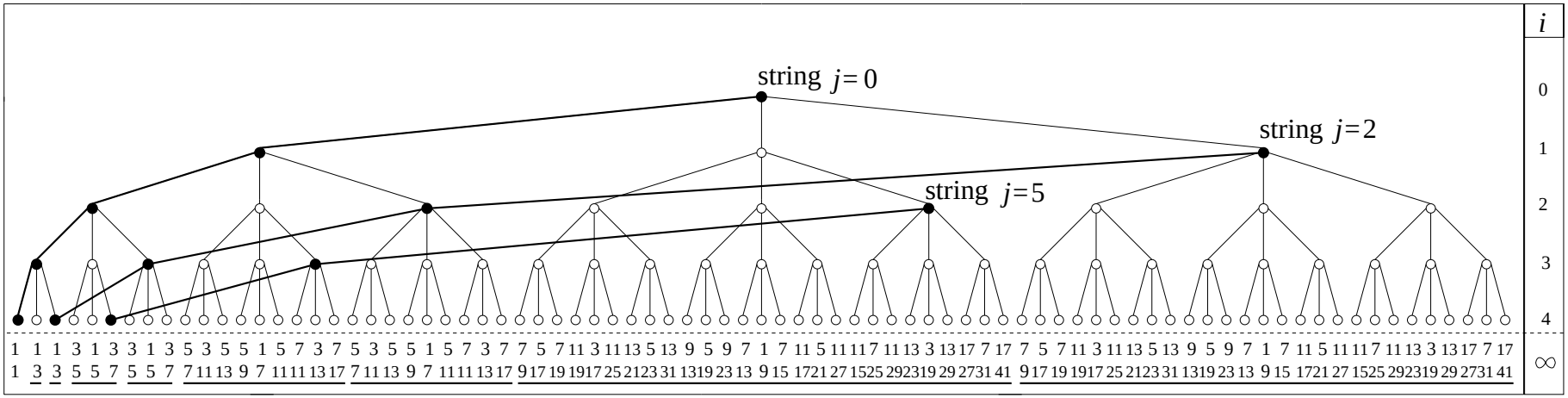
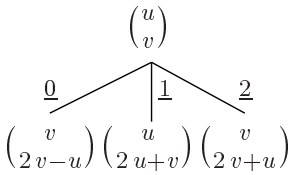



Fig. 2: $\binom{u}{v}$ ternary tree with left–justified strings $j = 0$, $j = 2$, and $j = 5$

Die Lineardarstellung ist neben der Verdoppelung ebenfalls wie der Ternärbaum mittels des ternären Rekursionsoperators




generierbar.

3.1. Untersuchen Sie in derselben Weise den rechtsseitigen „Unendlichkeitssaum“ des $\binom{u}{v}$–Ternärbaums.

3.2. Der $\binom{u}{v}$–Ternärbaum–Algorithmus zeigt, dass selbst sehr einfachen diskreten mathematischen Modellen das Prinzip der Informationsverdoppelung innewohnt; in ihnen realisiert wird.
Geben Sie andere mathematische Modelle an, die dieselbe Eigenschaft besitzen.

Jonathan fragt:

Großvater, wozu ist diese Informationsverdoppelung im statischen und im dynamischen Falle gut?
Leukippos sagt doch: Kein Ding entsteht planlos, sondern alles aus Sinn und unter Notwendigkeit.
Und Heraklit meint: Die Natur liebt es, sich zu verbergen.
Für die DNA weiss man: Die komplementäre Informationsverdoppelung dient der Datensicherung bei der Speicherung und der Replikation der genetischen Information.
Ich habe das Gefühl, da steckt noch mehr dahinter?

Sandbox 1

$a$, $b$ and $c$ with equ. (1) are the side length of the rectangular triangle $\triangle ABC$ fig. 3.

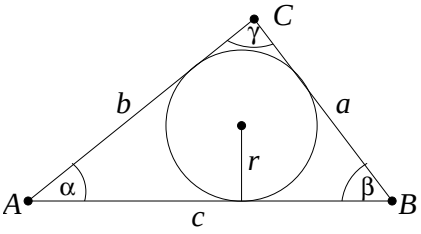



Fig. 3: Rectangular triangle $\triangle ABC$

Find formula expressions in $u$ and $v$ for

– semiperimeter $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$
– radius $r$ of the incircle
– $\tan\frac{\alpha}{2}$ and $\tan\frac{\beta}{2}$
– other parameters of $\triangle ABC$ .

Solutions:

$$s = (u+v)\,v \tag{15}$$

$$r = u\,(v-u) \tag{16}$$

$$\tan\tfrac{\alpha}{2} = \min\left(\tfrac{u}{v}, \tfrac{v-u}{v+u}\right)\ ;\ \tan\tfrac{\beta}{2} = \max\left(\tfrac{u}{v}, \tfrac{v-u}{v+u}\right) \tag{17}$$

Sandbox 2

Between values of the coding variables $u$ and $v$ in the ternary tree fig. 1 exists a number of simple relationships.

**Example**

For

$(\sum u)_i$ – sum of all $u$–values in the level $i$
$(\sum v)_i$ – sum of all $v$–values in the level $i$
f.i. $(\sum u)_2 = 41\,;\ (\sum v)_2 = 99$
$u_{*i}$ – $u$–value for $\underline{w} = \underline{2}^i$
$v_{*i}$ – $v$–value for $\underline{w} = \underline{2}^i$
f.i. $u_{*2} = 7\,;\ v_{*2} = 17$

we have the relationships

$$(\sum u)_i = u_{*2i} \tag{18}$$

$$(\sum v)_i = v_{*2i} = u_{*2i+1} \tag{19}$$

$$\tfrac{(\sum u)_i}{(\sum v)_i} = \tfrac{u_{*2i}}{v_{*2i}} = \tfrac{u_{*2i}}{u_{*2i+1}} = [0;\, 2^{-2i}, 3] \ \to\ \sqrt{2}-1 \tag{20}$$

$$u_{*0} = 1\,;\ u_{*1} = 3 \tag{21.1}$$

$$u_{*i} = 2u_{*i-1} + u_{*i-2}\,;\ i = 2, 3, 4, .. \tag{21.2}$$

Find further connections of this kind.

**Literatur**


[1] E.P. Stoschek. *Abenteuer Algorithmus. Teil 2.* Dresden 1997, Kapitel 2

[2] N.C. Seeman. *Nanotechnology and the Double Helix.* Scientific American, June 21, 2004, pages 64–75

[3] K. Schneider. *Ein Periodensystem.* raum&zeit 130/2004, S. 50–59

[4] Periodic table
http://en.wikipedia.org/wiki/Periodic_table