Unit n°31

Collatz-Automat
Automateneinbettung eines Algorithmus

Der Begriff "**deterministischer Automat**" (dA) ist entstanden als abstraktes Modell realer diskontinuierlich (zeitdiskret, getaktet) und determiniert arbeitender informationeller Systeme mit Eingabe-, Ausgabe-, Verknüpfungs- und Speicherelementen als Träger informationeller Prozesse.

Der dA ist zugleich aber auch ein Notierungssystem mit integrativem, konstruktivem und heuristischem Charakter für eine beträchtliche Anzahl von Algorithmen.

Die Einbettung von Algorithmen in das mathematische Modell dA ist ein nützliches Werkzeug für systematische Erweiterungen, Verallgemeinerungen, Kombinationen, ... von Algorithmen unter Einvernahme des theoretischen und ingenieurmäßig-pragmatischen Methodeninventars für die Analyse und Synthese von Automaten (Schaltbilddenken, Einfügen zusätzlicher Rückkopplungen, Zusammenschaltungen, Zustandskopplungen; vgl. [1], Abschn. 4 und [2], Abschn. 2.3). Vielfach ergibt sich dabei zwanglos die Hinzunahme eines zunächst nicht vorhandenen Schalt- ($x \in \{0,1\}$) bzw. Steuereingangs ($x \in \mathbb{R}$) (Analogie: Diode $\rightarrow$ Transistor).
Ein dA wird durch nachstehendes Blockschema Bild 1 symbolisiert.

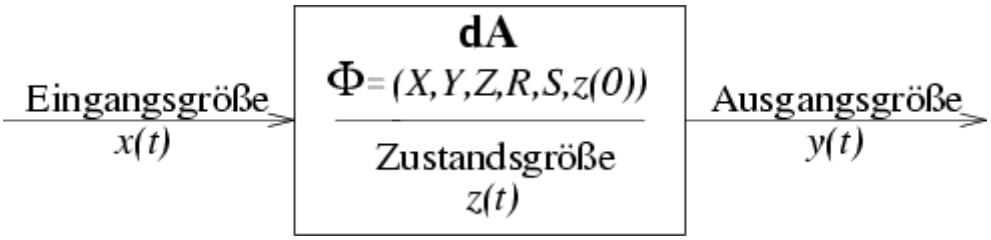


Bild 1: *Blockschaltbild des dA* Φ

Hierbei ist

$x \in X$ – Eingangsvariable ∈ Eingangsmenge/Eingabealphabet (1)

$y \in Y$ – Ausgangsvariable ∈ Ausgangsmenge/Ausgabealphabet (2)

$z \in Z$ – Zustandsvariable ∈ Zustandsmenge/internes Alphabet (3)

$t \in T = \mathbb{N}_0$ – Taktzeitpunkt ∈ {0,1, 2,…} (4)

$R : X \times Z \to Y$ – (eindeutige)- Ergebnisabbildung (5)

Elementnotation $y = r(x, z)$

$S : X \times Z \to Z$ – (eindeutige) Folgezustandsabbildung, (6)

Elementnotation $z' = s(x, z)$

$z(0) \in Z$ – Anfangszustand. (7)

Φ beschreibt die sequentielle, äquidistant getaktete und deterministische Umformung einer Eingangsfolge (eines Eingabewortes)

$$wx(t) = x(0), x(1), \ldots, x(t) \in X^* \quad (8)$$

in eine Ausgangsfolge (ein Ausgabewort)

$$wy(t) = y(0), y(1), \ldots, y(t) \in Y^*. \quad (9)$$

Dabei wird in jedem Taktzeitpunkt $\tau \in \mathbb{N}_0$ (fester aber beliebiger Zeitwert) aus dem einlaufenden Eingangswert $x(\tau) \in X$ und dem im Zeitintervall $(\tau - 1, \tau)$ „im dA gespeicherten“ Zustandswert $z(\tau) \in Z$

- der Ausgangswert $y(\tau) = r(x(\tau), z(\tau))$ gebildet und unmittelbar ausgegeben,
- der neue Zustandswert $z(\tau + 1) = s(x(\tau), z(\tau))$ gebildet und der alte Zustandswert $z(\tau)$ mit $z(\tau + 1)$ „überschrieben“.
  $z(\tau + 1)$ bleibt danach im Intervall $(\tau, \tau + 1]$ im dA gespeichert, Bild 2.

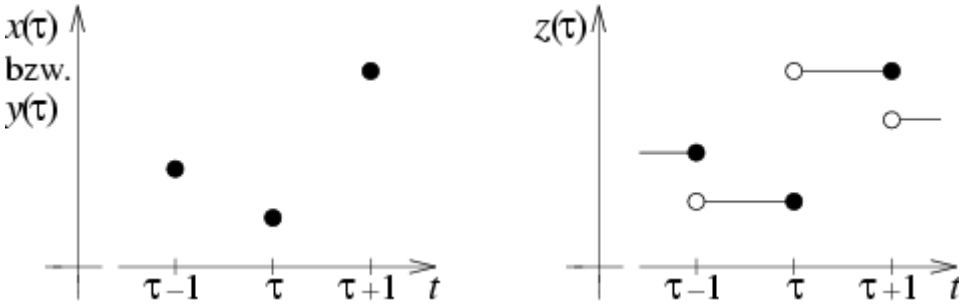


Bild 2: *Arbeitsregime des dA* Φ

Beispiel:

Verzögerungselement erster Ordnung (D1), Bild 3

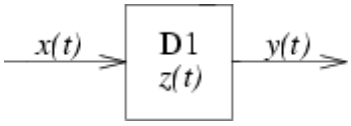


Bild 3: *Verzögerungselement erster Ordnung*

$$X = Y = Z \tag{10}$$

$$y = r(x, z) = z \tag{11}$$

$$z' = s(x, z) = x \tag{12}$$

Jeder Eingangswert $x(\tau)$ erscheint um einen Takt verzögert als $y(\tau + 1)$ am Ausgang, er wird als Zustandswert $z(\tau)$ für einen Takt in D1 gespeichert, $x(\tau)$ und $y(\tau)$ sind dabei vollständig entkoppelt.

Die **Collatz-Folge** $< c_n >$ ist durch das rekursive Bildungsgesetz

$$c_{n+1} = co(\mathrm{c}_n) = \begin{cases} \dfrac{c_n}{2} & \text{für } c_n \text{ gerade} \\ 3c_n + 1 & \text{für } c_n \text{ ungerade} \end{cases} \tag{13}$$

und das Anfangsglied

$$c_0 \in \mathbb{N} \tag{14}$$

definiert.

Bild 4 zeigt den Verlauf dieser Folge für die Anfangsglieder $c_0 = 26$ bzw. $c_0 = 27$.

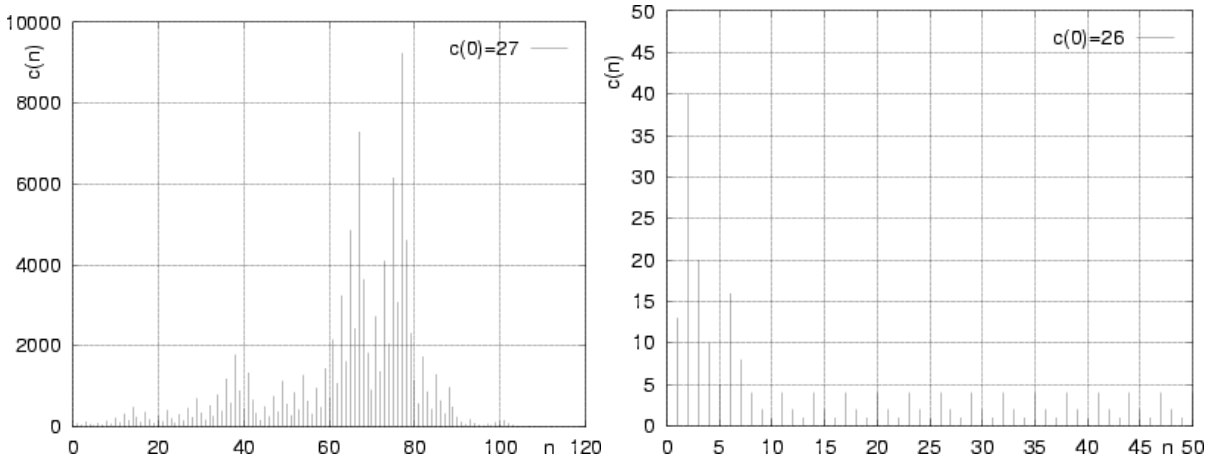


Bild 4: *Verlauf der Collatz-Folge für* $\begin{cases} c_0 = 26 \\ c_0 = 27 \end{cases}$

Für den Fall $c_0 = 26$ zeigt die zugehörige Folge $< c_n >$ einen kurzen, undifferenzierten und kleinamplitudigen "Einschwingvorgang" mit anschließendem periodischen Verlauf $\overline{4,2,1}$.
Der Startwert $c_0 = 27$ hingegen initiiert eine Folge $< c_n >$ mit einem längeren großamplitudigen Einschwingvorgang, der bei spektrumförmigem Verlauf ausgeprägte hohe Peaks besitzt und schließlich ebenfalls in den periodischen Verlauf $\overline{4,2,1}$ mündet. Dabei haben beide Folgen bereits vorher eine kurze Werteverlaufsüberdeckung:

$$40,20,10,5,16,8,\overline{4,2,1}. \qquad (15)$$

Ähnliche experimentelle Ergebnisse erhält man für alle anderen Initialisierungen $c_0 \in \mathbb{N}$, wobei die $< c_n >$-Verläufe sehr stark von c_0 abhängen (vgl. vorstehende Beispiele).

Höchstwahrscheinlich münden alle diese Folgen in den periodischen Verlauf $\overline{4,2,1}$ (für $c_0 \leq 10^{15}$ nachgewiesen (vgl. auch [1,2]), ein anerkannter Beweis ist bisher nicht bekannt [a, b]).

Anmerkungen:

- $< c_n >$ - Generatoren für frei wählbare c_0 sind im *www* verfügbar: [4,5].
- In [1,2,3] sind Kenngrößen und Analyseansätze für die Collatz-Folge sowie zugehörige Wertetabellen angegeben.
- Eine umfangreiche Bibliographie findet man in [2,6].

Der **Algorithmus zur Bildung der Collatz-Folge**, Gln. (13) und (14), wird nun gemäß Tabelle 1 **in das mathematische Modell dA eingebettet**.
Dadurch entsteht zunächst ein dA ohne Eingangsgröße $x(t)$ (autonomer dA) mit dem zuvor beschriebenen Collatz-Verhaltensmuster.
Die Hinzunahme eines Steuereinganges und einer einfachen Erweiterung der Folgezustandsabbildung führt zu dem Collatz-Automaten Bild 5.

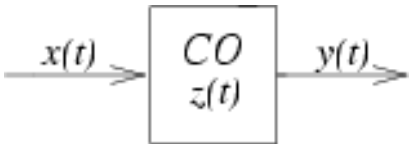


Bild 5: *Collatz-Automat*

$$CO = (\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}, \mathrm{R}, \mathrm{S}, \mathrm{z}(0)) \qquad (16)$$

mit

$$X = Y = Z = \mathbb{N} \tag{17}$$

$$y = r(x,z) = z \tag{18}$$

$$z' = s(x,z) = co(x+z) \tag{19}$$

Bereits bei konstanter Eingabe

$$x(t) = a \neq 0 \tag{17}$$

- erhöht sich gegenüber dem autonomen Fall (entspricht $x(t) = 0$) die Anzahl und Formenvielfalt der mit *CO* erzeugten differenten "Einschwingspektren" beträchtlich.
- Außerdem besteht der dann jeweils nachfolgende stationäre Anteil von $y(t)$ i.a. ebenfalls aus ausgeprägten, sich periodisch wiederholenden "Spektren" großer Formenvielfalt (vgl. Bild 6).

Algorithmus zur Bildung der Collatz-Folge	dA $\Phi = (X, Y, Z, R, S, z(0))$ $X = Y = Z = \mathbb{N}$
$n \in \mathbb{N}_0$	t
-	-
$c_0 \in \mathbb{N}$	$z(0)$
$c_n \in \mathbb{N}$	$z(t)$
$c_{n+1} = co(c_n)$ $= co(c_n) = \begin{cases} \frac{c_n}{2} & \text{für } c_n \text{ gerade} \\ 3c_n + 1 & \text{für } c_n \text{ ungerade} \end{cases}$	$z(t+1) = s(x(t), z(t))$ $= co(z(t))$
-	$y(t) = r(x(t), z(t))$ $= z(t)$

Tabelle 1: *Automateneinbettung des Algorithmus zur Bildung der Collatz-Folge*

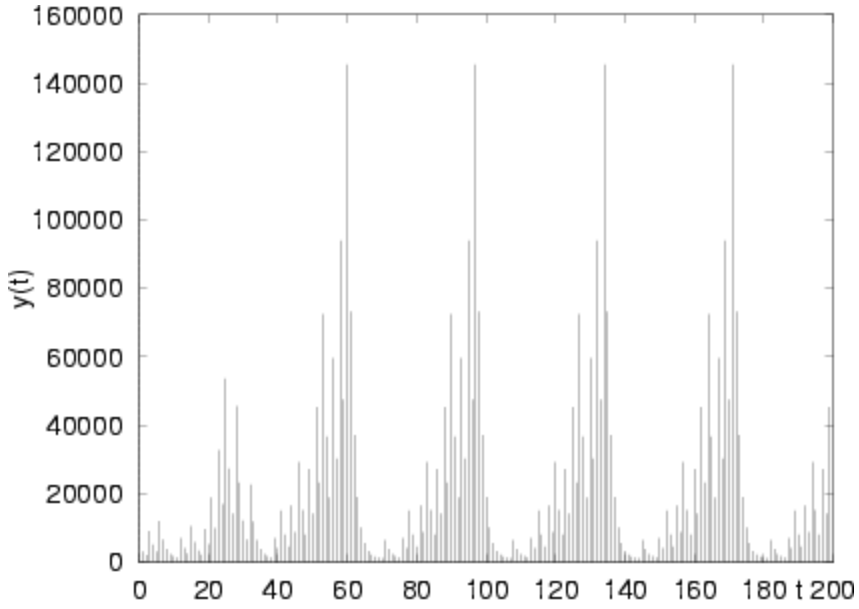


Bild 6: *Ausgangsfolge y(t) des Collatz-Automaten für x(t)=1000 und z(0)=11*

Der Collatz-Automat mit konstanter Eingabe *a* stellt also einen Generator für spektrumförmige Testsignale dar,

- deren Form durch geeignete Wahl der Parameter *a* und $z(0)$ weitgehend frei wählbar ("einstellbar") ist und
- die beliebig oft identisch wiederholt werden können.

Mittels zweier verschiedener synchron laufender Collatz-Automaten mit den Ausgaben $y_1(t)$ bzw. $y_2(t)$ lassen sich auch interessante Schwarz-Weiß-Muster

$$pset\left(y_1(t), y_2(t)\right) \tag{21}$$

erzeugen.

31.1

Untersuchen Sie experimentell die Verläufe der Ausgangsgröße $y(t)$ des Collatz-Automaten für verschiedene charakteristische Verläufe der Eingangsgröße $x(t)$:

- konstant
- linear ansteigend
- rampenförmig
- periodisch
- random
- ⋮

und verschiedene Initialisierungen *z(0)*.
Analysieren Sie die auftretenden Verhaltensmuster.
Treten bei periodischer Eingangsgröße *x(t)* Resonanzeffekte auf? Wenn ja, welche Anwendungen sind denkbar?

31.2

Untersuchen Sie experimentell die Verläufe der Ausgangsgröße *y(t)* des Collatz-Automaten für

$$x(t) = \begin{cases} 1001 & \text{für } t = \tau \\ 1000 & \text{sonst} \end{cases} \tag{22}$$

$$z(0) = 11 \tag{23}$$

bei verschiedenen $\tau \geq 100$, d.h. die Wirkung einer kleinen, auf einen Taktzeitpunkt beschränkten „Störung“ 1 des konstanten Inputs $x(t) = 1000$ auf den Output $y(t)$ im eingeschwungenen Fall $(\tau \geq 100)$. Die Bilder 7 und 8 zeigen zwei Beispiele.

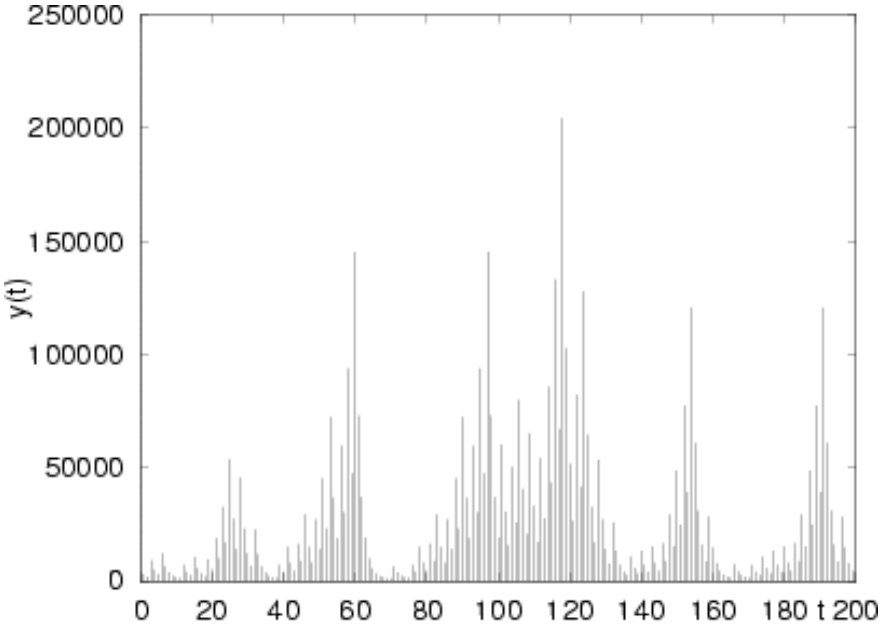


Bild 7: *Ausgangsfolge des Collatz-Automaten für x(t) gemäß Gl.(22), z(0)=11, kleine Störung bei t=100*

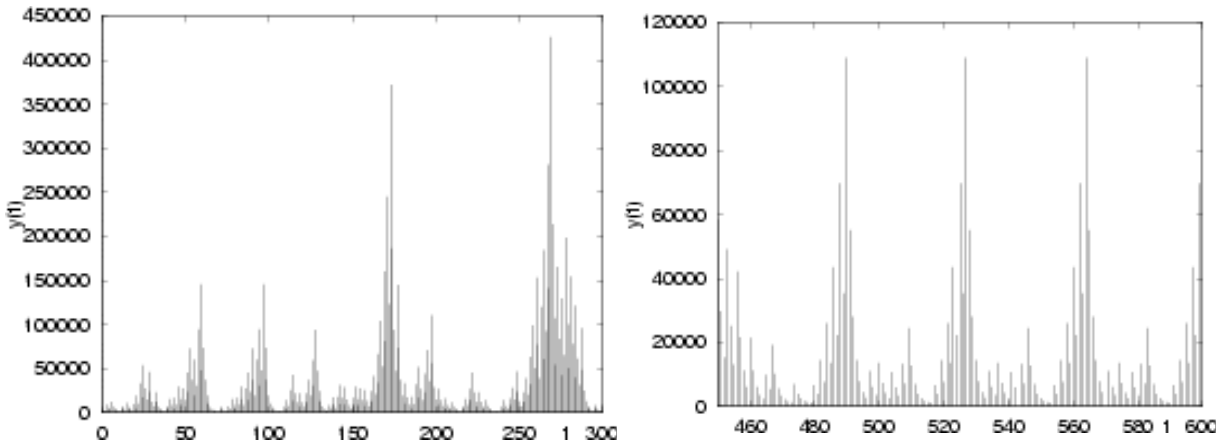


Bild 8: *Ausgangsfolge des Collatz-Automaten für x(t) gemäß Gl.(22), z(0)=11, kleine Störung bei t=107*

Analysieren Sie das "Störungsgeschehen" anhand

- des Zeitverlaufs *y(t)*,
- des Punktdiagramms $pset\big(y(t), y(t+1)\big)$,
- anderer von Ihnen gewählter Darstellungsmittel.

Diskutieren Sie mögliche Anwendungen des hier betrachteten Verhaltensmusters:

- Versuchen Sie insbesondere auf dieser Basis einen Analysator-dA für kleine Störungen zu konstruieren.
- Kann auf dieser Basis eine kryptographisch gesicherte Informationsübertragung, z.B. gemäß Bild 9 und Bild 10 realisiert werden?

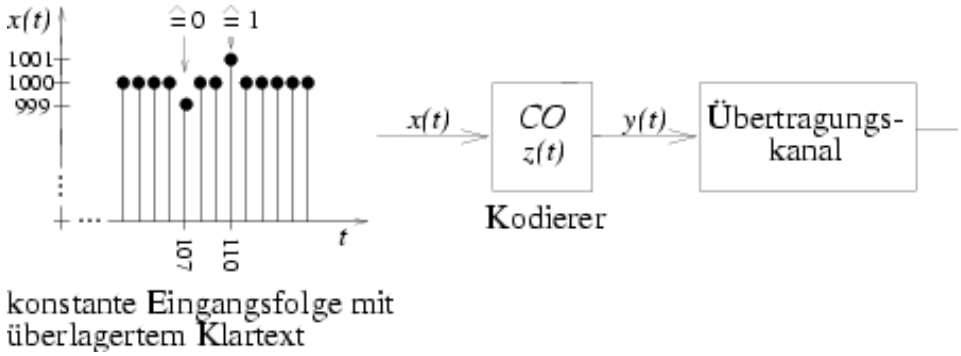
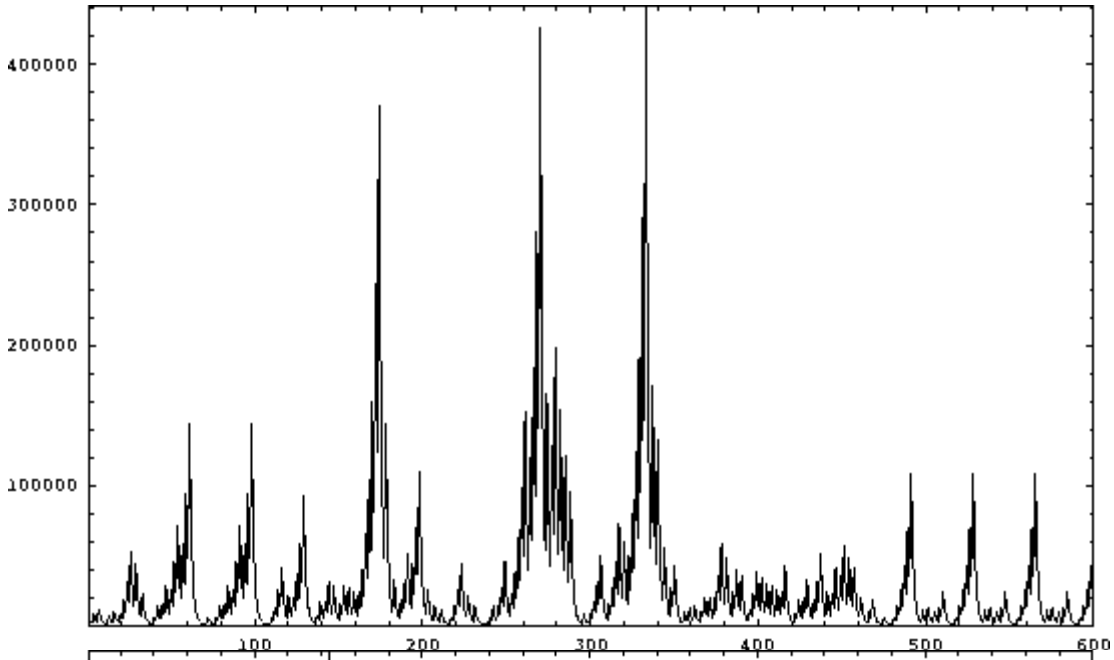
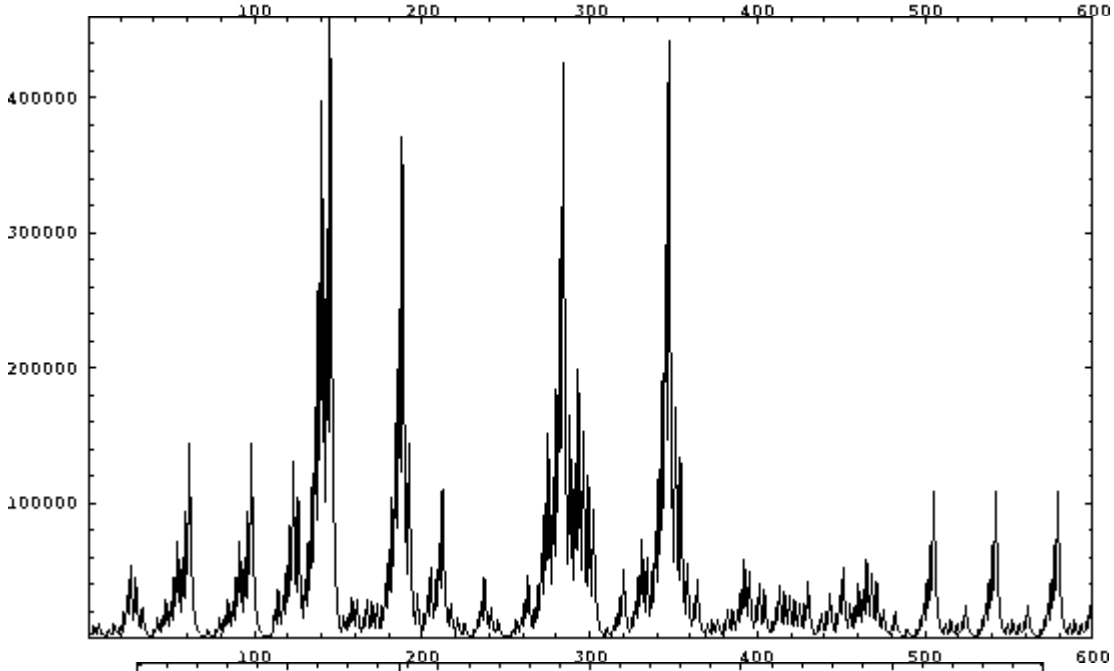


Bild 9: *Kryptographisch gesicherte Informations-übertragung via Collatz-Automat?*

a)


400000
300000
200000
100000
100
200
300
400
500
600

b)


400000
300000
200000
100000
100
200
300
400
500
600

c)

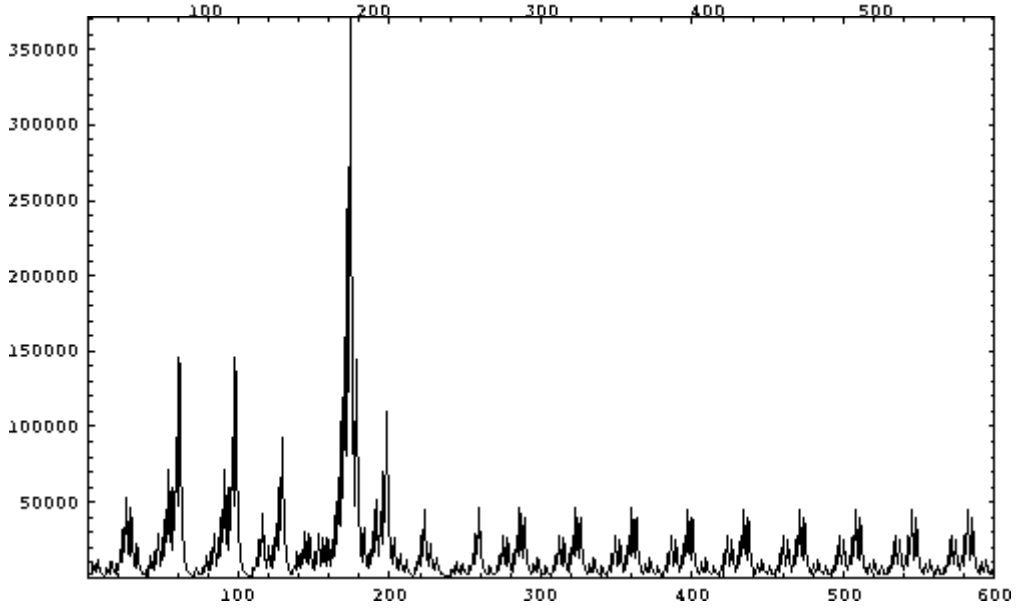

350000
300000
250000
200000
150000
100000
50000
100
200
300
400
500
600

Bild 10: *a) Ausgangsfolge y(t) des Collatzautomaten für x(107)=1001, sonst x(t)=1000;*
≙ Klartext:“1“

b) Ausgangsfolge y(t) des Collatzautomaten für x(107)=999, x(111)=1001, sonst x(t)=1000;
≙ Klartext:“01“

c) Ausgangsfolge y(t) des Collatzautomaten für x(107)=1001, x(239)=999, sonst x(t)=1000;
≙ Klartext:“10“

31.3

Bearbeiten Sie die Fragestellungen der Aufgaben **31.1** und **31.2** für den parametrisch erweiterten Collatz-Automaten

$$peCO = (X, Y, Z, R, S, z(0)) \tag{24}$$

$$X = Y = Z = N_0 \tag{25}$$

$$y = r(x, z) = z \tag{26}$$

$$z' = s(x, z) = co\left((ax + by) \bmod c\right);\ a, b, c \in N. \tag{27}$$

Ergeben sich hier prinzipiell neuartige Verhaltensmuster?

31.4

Bearbeiten Sie die Fragestellungen der Aufgaben **31.1** und **31.2** für die modifizierten Collatz-Automaten

$$mCO = \quad (X, Y, Z, R, S, z(0)) \tag{28}$$

$$X = Y = Z = N_0 \tag{29}$$

$$y = r(x, z) = z \tag{30}$$

$$a) \quad z' = s(x, z) = co\left(|x - z|\right) \tag{31}$$

$$b) \quad z' = s(x, z) = co\left(ggT\left(x, z\right)\right) \tag{32}$$

$$c) \quad z' = s(x, z) = co\left(x \cdot z\right) \tag{33}$$

$$d) \quad z' = s(x, z) = co\left(\frac{x \cdot z}{\left(ggT\left(x, z\right)\right)^2}\right) \tag{34}$$

$$e) \quad z' = s(x, z) = co\left(co\left(x + z\right)\right) \tag{35}$$

und diskutieren Sie die beobachteten Verhaltensmuster.

31.5

Suchen Sie nach Bildungsgesetzen für Zahlenfolgen, die Collatz-ähnliches Verhalten zeigen.
Bearbeiten Sie die Fragestellungen der Aufgaben **31.1** und **31.2** für die zugehörigen dA.

31.6

Ist es möglich aus einer gegebenen Collatz-Sequenz
$c_m, c_{m+1}, c_{m+2}, \ldots, c_n$ die vorgelagerte Sequenz
$c_k, c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_{m-1}$ zumindestens bis zu bestimmten k eindeutig zu rekonstruieren?

References

[1] http://mathworld.wolfram.com/CollatzProblem.html
[2] http://de.wikipedia.org/wiki/Collatz-Problem
[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Collatz_conjecture
[4] C. Pöppe. Das Schicksal einer Zahlenfolge. Spektrum der Wissenschaft, Febr. 2014, S. 72-75
[5] http://did.mat.uni-bayreuth.de/Fun/3np1.html
[6] http://felix.unife.it/Root/d--Number--theory/b--3x+1

[a] http://preprint.math.uni-hamburg.de/public/papers/hbam/hbam2011-09.pdf
[b] http://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/zahlenraetsel-mathematiker-zweifeln-am-beweis-der-collatz-vermutung-a-768289.html