Unit n° 2

Creative formula manipulation

Example 5 - Problemlösungstechniken

Creative formula manipulation is based in a large part on mastering the dialectic between freedom and determination in arithmetic:

- Freedom:
  - * Commutative and associative laws of addition and multiplication are the basis for a free arrangement (and re-arrangement) and free structured bracketing of operands.
  - * Free and creative use of the two directions of the identity laws and its derivatives

$$a+0=a$$
$$a-a=0$$
$$a*1=a$$
$$a/a=1$$
$$a*0=0$$
$$(-1)*(-1)=1$$

← ---------- →

extension ← insertion reduction

- Determination:
  - * Distributive law of multiplication with respect to addition
  - * Priority law + < * < ^ .

Example 5 Problemlösungstechniken

… ”nach geeigneter Umformung” “versuchsweise” “einen plausiblen Verteilungsansatz” machen ...

- Versuch! Kann, aber muß nicht das(ein) gewünschte(s) Ergebnis liefern!

- Immer versuchsbegleitend prüfen: löst das auf diesem Wege erhaltene Ergebnis wirklich das vorgelegte Problem? (theoretische bzw. experimentelle Verifikation)
- Wenn ja: erneuter Versuch: geht es noch einfacher?
- Wenn nein: neu konzipierter Versuch

Beispiel a)

- Zurückführen des Lösens der quadratischen Gleichung $x^2 + 2ax + b = 0$ auf das Lösen einer rein-quadratischen Gleichung →
- Lösen der quadratischen Gleichung $x^2 + 2ax + b = 0$

$\boxed{x^2 + 2ax + b = 0}$; geeignete Umformung mittels Ansatz $\boxed{x = y + k}$ (zwei Unbekannte: y und k, aber nur eine Gleichung!)

$\rightarrow y^2 + 2yk + k^2 + 2ay + 2ak + b = y^2 + 2(k + a)y + (k^2 + 2ak + b) = 0$

Letztere quadratische Gleichung in y wird zur rein-quadratischen Gleichung in y (die sofort lösbar ist), wenn $k + a = 0$ gewählt wird $\rightarrow k = -a \rightarrow y = x + a$ (plausible Verteilung) →

$y^2 + (a^2 - 2a^2 + b) = y^2 + (b - a^2) = 0 \rightarrow$

$y^2 = a^2 - b = -\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & b \end{vmatrix}$

rein-quadratische Gleichung

$\rightarrow \; y_{1;2} = \pm\sqrt{a^2 - b} = x_{1;2} + a \; \rightarrow$

$x_{1;2} = -a \pm \sqrt{a^2 - b}$

Lösung der vorgelegten quadrat. Gleichung

Prüfung: Löst das erhaltene Ergebnis wirklich das vorgelegte Problem? →
$x_{1;2}^2 + 2ax_{1;2} + b = a^2 \mp 2a\sqrt{a^2 - b} + a^2 - b - 2a^2 \pm 2a\sqrt{a^2 - b} + b = 0$
→ ja.

Beispiel b)

Zurückführen des Lösens der kubischen Gleichung $x^3 + 3ax^2 + 3bx + c = 0$ auf das Lösen einer rein-quadratischen Gleichung und einer rein-kubischen Gleichung

---

$\boxed{x^3 + 3ax^2 + 3bx + c = 0}$; geeignete Umformung mittels Ansatz $\boxed{x = y + k}$ (zwei Unbekannte: y und k, aber nur eine Gleichung!)

$\rightarrow y^3 + 3y^2k + 3yk^2 + k^3 + 3ay^2 + 6ayk + 3ak^2 + 3by + 3bk + c =$

$y^3 + 3(k + a)y^2 + 3(k^2 + 2ak + b)y + (k^3 + 3ak^2 + 3bk + c) = 0$

Letztere kubische Gleichung in y wird um das quadratische Glied reduziert, wenn $k + a = 0$ gewählt wird $\rightarrow$

$k = -a \rightarrow y = x + a$ (plausible Verteilung) $\rightarrow$

$y^3 + 3(a^2 - 2a^2 + b)y + (-a^3 + 3a^3 - 3ab + c) =$

$$y^3 + 3\underbrace{(b - a^2)}_{\begin{vmatrix}1 & a\\ a & b\end{vmatrix}}y + \underbrace{(2a^3 - 3ab + c)}_{-\begin{vmatrix}1 & 2a & b\\ a & 2b & c\\ 0 & 1 & a\end{vmatrix}} = \boxed{\begin{array}{c} y^3 + 3py + q = 0 \\ \text{reduzierte kubische Gleichung}\end{array}}$$

$=p$ $\quad$ $=q$

geeignete Umformung mittels Ansatz $\boxed{y = u + v}$ (zwei Unbekannte: u und v, aber nur eine Gleichung!)

$\rightarrow u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + 3p(u + v) + q = 0$

$u^3 + v^3 + 3(uv + p)(u + v) + q = 0$

Letztere kubische Gleichung in u und v wird wesentlich reduziert, wenn $uv + p = 0$ gewählt wird $\rightarrow uv = -p$ (plausible Verteilung von u und v) $\rightarrow$

$(u^3 + v^3 = -q,\ uv = -p)\ \rightarrow$

$$(u^3+v^3)^2-4u^3v^3=\boxed{(u^3-v^3)^2=4p^3+q^2=-\begin{vmatrix}1 & 2a & b & 0\\ a & 2b & c & 0\\ 0 & 1 & 2a & b\\ 0 & a & 2b & c\end{vmatrix}}$$

$$rein-quadratische\ Gleichung$$

$$\rightarrow (u^3-v^3)_{1;2}=\pm\sqrt{4p^3+q^2}\ \rightarrow$$

$$(\ u^3+v^3=-q,\ (u^3-v^3)_{1;2}=\pm\sqrt{4p^3+q^2}\ ) \overset{y=u+v!}{\rightarrow}$$

$$\boxed{u^3=\frac{1}{2}\left(-q+\sqrt{4p^3+q^2}\right),\ \ v^3=\frac{1}{2}\left(-q-\sqrt{4p^3+q^2}\right)}$$

$$rein-kubische\ Gleichung$$

Aufgabe b)

Führen Sie den Lösungsprozeß nun bis zu Ende durch und geben Sie geschlossene Lösungsformeln für $x_{1;2;3}$ unter Benutzung von Wurzeln und Determinanten an. Diskutieren Sie Spezialfälle.

Lösung:

$$x_1=u+v;\ \left.\begin{matrix}u\\ v\end{matrix}\right\}=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{p^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$ (Cardanische Formel [90,91,92])

$$=\sqrt[3]{\frac{1}{2}(D_3\pm\sqrt{-D_4})}\ ;$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & a\\ a & b\end{vmatrix};\ D_3=\begin{vmatrix}1 & 2a & b\\ a & 2b & c\\ 0 & 1 & a\end{vmatrix};\ D_4=\begin{vmatrix}1 & 2a & b & 0\\ a & 2b & c & 0\\ 0 & 1 & 2a & b\\ 0 & a & 2b & c\end{vmatrix}$$

$$x_2=\varepsilon_2u+\varepsilon_3v;\ \ x_3=\varepsilon_3u+\varepsilon_2v;\ \ \varepsilon_{2;3}=\frac{1}{2}(-1\pm j\sqrt{3})$$

D_2	D_2	D_2	Klassifikation der Lösungen(Wurzeln) von $x^3 + 3ax^2 + 3bx + c = 0$
		> 0	3 voneinander verschiedene reelle Wurzeln (casus irreducibilis!)
		< 0	1 reelle Wurzel, 1Paar konjugiert komplexe Wurzeln
$\neq$		$= 0$	3 reelle Wurzeln, davon zwei gleiche: $x_1 = -a - \frac{D_3}{D_2};\ x_{2;3} = -a + \frac{D_3}{2D_2}$
$= 0$	$= 0$	$= 0$	3 gleiche reelle Wurzeln: $x_{1;2;3} = -a$