Unit 19.1
Nachtrag zu Unit 19

Wir betrachten ein ebenes n-Eck mit den Eckpunkten $P_i = (x_i,y_i)$; i=1(1)n und den Innenwinkeln α_i; i=1(1)n. In Unit 19 sind „verkürzte-Determinanten"-Formeln für die Fläche Gl. (57), die Schwerpunktkoordinaten Gl. (61) etc. dieses n-Ecks in Abhängigkeit von den Eckpunktkoordinaten (x_i,y_i); i=1(1)n angegeben.

Interpretieren Sie diese Formeln für die zunächst nur intuitiv begründete versuchsweise Substitution (Experiment: „mal sehen, was passiert")

$x_i \rightarrow \sin\alpha_i$; i=1(1)n (1.1)

$y_i \rightarrow \cos\alpha_i$; i=1(1)n . (1.2)

Startrampe
n=3, Dreieck

$$2\text{area}\Delta P_1P_2P_3 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \quad (2)$$

$$\downarrow$$

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha_1 & \sin\alpha_2 & \sin\alpha_3 \\ \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \end{vmatrix} =$$

$$\sin(\alpha_1 - \alpha_2) + \sin(\alpha_2 - \alpha_3) + \sin(\alpha_3 - \alpha_1) =$$

$$-f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad (3.1)$$

$$\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_3, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 180° \quad (3.2)$$

Beispiele

** α_1=α_2=$\alpha_3 = 60°$

reguläres [1] (gleichseitiges) Dreieck

f(60°, 60°, 60°) = 0 (4)

** α_1=α_2=45°, $\alpha_3 = 90°$

gleichschenkliges (symmetrisches) rechtwinkliges Dreieck

f(45°,45°,90°) = 0 (5)

** $\alpha_1 = \alpha_2, \alpha_3 = 180° - 2\alpha_1$

gleichschenkliges (symmetrisches) Dreieck

f($\alpha_1, \alpha_1, 180° - 2\alpha_1$) = 0 (6)

** $\alpha_1 = 30°, \alpha_2 = 60°, \alpha_3 = 90°$

unsymmetrisches rechtwinkliges Dreieck

f(30°,60°,90°) = $-1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}$ =.0.133974596 ... (7)

** $\alpha_1 = 15°, \alpha_2 = 65°, \alpha_3 = 100°$

unsymmetrisches stumpfwinkliges Dreieck

f(15°,65°,100°) = 0.343426181 ... (8)

** $\alpha_1 = 3°, \alpha_2 = 4°, \alpha_3 = 173°$

unsymmetrisches stumpfwinkliges Dreieck

f(3°,4°,173°) = 0.034613224 ... (9)

** $\alpha_1 = 35°, \alpha_2 = 65°, \alpha_3 = 80°$

unsymmetrisches spitzwinkliges Dreieck

f(35°,65°,80°) = 0.051712264 ... (10)

** $\alpha_1 = 45°, \alpha_2 = 60°, \alpha_3 = 75°$

„allgemeines“ Dreieck nach [6]

f(45°,60°,75°) = 0.01763809… (11)

** $\alpha_1 = 3°, \alpha_2 = 88°, \alpha_3 = 89°$

unsymmetrisches spitzwinkliges Dreieck

f(3°,88°,89°) = 0.051679088… (12)

** $\alpha_1 = 57°,\ \alpha_2 = 61°,\ \alpha_3 = 62°$
unsymmetrisches spitzwinkliges Dreieck
f(57°,61°,62°) = 0.000053137… (14)

→ min f$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ = 0, (15)
max f$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ = ? open problem, discussion! (16)

→ f$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ist ein (noch näher zu spezifizierender) „Formfaktor“.

→ $\frac{f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}{f(\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3)}$ = ?? etc. (17)

→ Extension 3 → n.

References

[1] Weisstein, Eric W. "Regular Polygon." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/RegularPolygon.html

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Regular_polygon

[3] Weisstein, Eric W. "Triangle." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/Triangle.html

[4] https://de.wikipedia.org/wiki/Dreieck

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Triangle

[6] http://www.holger-lang.de/haupt/mathe/dreieck/dreieck.html

15.05.2019 EPS