Unit 15, part 59.1

Aphorisms, advices, anecdotes, brain teasers, curious stories, epigrams, epigraphs, epitaphs, crazy-creative ideas, suggestions and set pieces for thriller and mystery writers, koans, memorabilia, mottos, poems, proverbs, riddles, quotations, sayings, slogans, scurrilities, besun, etc.
collected for encouragement and the advantage of my students and of myself.

Wort-Fundstücke, Gehörtes, Gelesenes, Zugelaufenes, Angeschwemmtes, …

Das Fortsetzungssyndrom

Wer sich dagegen zutraut, ein Geheimnis mit allen damit verbundenen Konsequenzen wahren zu können, dem eröffnen sich Möglichkeiten, die das „eigentliche“ Leben nicht bieten kann.

U. Nuber. Lass mir mein Geheimnis. Warum es gut ist, nicht alles preiszugeben.
Campus 2007 ISBN 978-3-593-38234-0
Diskussion!!

Ein gutes Produkt kann immer noch besser gemacht werden.
James Dyson https://en.wikipedia.org/wiki/James_Dyson
Predictive analytics
https://en.wikipedia.org/wiki/Predictive_analytics
Was wir wissen ist ein Tropfen,
was wir nicht wissen, ist ein Ozean.
Isaak Newton
Alles ist Zahl.
Pythagoras
Der Buddhismus glaubt nicht an die Existenz eines Schöpfergottes oder von Göttern. Stattdessen konzentriert er sich hauptsächlich auf drei Konzepte:
1) Nichts ist permanent.
2) Alle Handlungen haben Konsequenzen.
3) Änderungen sind möglich.
→ Algorithmics
https://www.msn.com/de-de/nachrichten/panorama/buddhismus-fakten-%C3%BCber-eine-der-gr%C3%B6%C3%9Ften-religionen-der-welt/ss-BBIdiwq#image=8
If in doubt – do it.
If it's a good idea, go ahead and do it. It is much easier to apologize than it is to get permission.
A ship in a harbor is safe, but that is not what a ship is built for.
Grace Hopper https://en.wikipedia.org/wiki/Grace_Hopper
Nakamatsu diving into the Akasha ocean.

Slightly ironic collage

E. Reichardt. Hochbegabt?: Potenziale erkennen und fördern.
Irisiana 2018, ASIN: B077BWZVDJ

… **frei**e, nicht-verplante und nicht-visuell hochgetaktete Zeit …
www.aerzteblatt.de/lit4117

Die Sherlock-Holmes-Methode
S. Anderl. Das Universum und ich. Die Philosophie der Astrophysik.
Hanser Verlag 2017 ISBN 978-3-446-25663-7

Wie schön, dass Du geboren bist,
wir hätten Dich sonst sehr vermisst.
Aus einem Geburtstagslied

Fallböen, scheinbar aus dem Nichts.

Mathematics is an antihypertensive.
Mathematics shamanism

Der Weise fragt nach dem, was ihm enthüllt sein soll.
PRN11,258

Schleppnetzfischerei

Erst der Verlust von Gen-Schaltern machte uns zu Menschen.
Ph. L. Reno. Paläoanthropologie. Per DNA-Verlust zum Menschen?
Spektrum der Wissenschaft 2.18, S. 30-35
Die Rolle von „Schaltern“ in Algorithmen??

Kommunikation mit Insekten

Epigenetics – Epialgorithmics

Nocturne fantastique

Wir betrachten infinite konvergente Folgen $\langle x(t)\rangle_{t=0}^{\infty}$,

** erzeugt durch

** einen Formelausdruck, der $t\in\mathbb{N}_0$ enthält,

** eine Rekursionsformel mit der

Laufvariablen $t\in\mathbb{N}_0$,

** die gegen einen rationalen/ irrationalen/transzendenten Grenzwert $x(\infty)$ konvergieren.

Der zugehörige Differenzenquotient $dx(t)=\frac{x(t+1)-x(t)}{x(t+2)-x(t+1)}$ konvergiert gegen einen rationalen/irrationalen/transzendenten Grenzwert $dx(\infty)$.

Dabei existieren häufig folgende $x(\infty)$-$dx(\infty)$-Paarungen

1) $x(\infty)$ – transzendente Zahl
$dx(\infty)$ – natürliche Zahl
Wie kann das sein?
Beispiele
Beispiel 1

$$x(t) = \left(\frac{2^{t+1}+1}{2^{t+1}-1} \right)^{2^t}$$

$x(\infty) = e;\ \ dx(\infty) = 4$

Berechnen Sie die Grenzwerte der zugehörigen höheren Differenzenquotienten

$$d^{(k+1)}x(t) = \frac{d^{(k)}x(t+1) - d^{(k)}x(t)}{d^{(k)}x(t+2) - d^{(k)}x(t+1)} \ ; t=1,2,3,...$$

$$d^{(1)}x(t) = dx(t)$$

Gibt es damit ein diskretes Analogon zur Taylorreihe?

Beispiel 2

Input: $x := 0;\ y := 1$
$i = 0(1)t$
$z := y - x$
$x := \frac{1}{2}(x+y)$
$y := \sqrt{x\,y}$
$d := \frac{z}{y-x}$
Output: $y(t)\,;\ d(t)$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{t\to\infty} d(t) = 4$$

Untersuchen Sie andere Input-Output-Paare.

Lateral zu Beispiel 2

$$f(t) = \prod_{i=2}^{t} \frac{i^2}{i^2-1} = 2 \cdot \frac{1-t^{-1}}{1-t^{-2}}$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \prod_{i=2}^{\infty} \frac{i^2}{i^2-1} = 2$$

$$\prod_{i=2}^{\infty} \frac{i^2+1}{i^2-1} = \frac{\sinh(\pi)}{\pi}$$

$$2\prod_{i=2}^{\infty} \frac{p_i^2}{p_i^2-1} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \; ; \; p_2 = 3\,,\; p_3 = 5\,,\; p_4 = 7\,,\; p_5 = 11\,,\; \ldots$$

$$2\prod_{i=2}^{\infty} \frac{p_i^2+1}{p_i^2-1} = 3$$

$$\frac{3\cdot 3}{1\cdot 5}\cdot\frac{5\cdot 5}{3\cdot 7}\cdot\frac{7\cdot 7}{5\cdot 9}\cdot\frac{9\cdot 9}{7\cdot 11}\cdot\ldots = 3$$

$$\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\frac{8\cdot 8}{7\cdot 9}\cdot\ldots = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{3\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{5\cdot 5}{4\cdot 6}\cdot\frac{7\cdot 7}{6\cdot 8}\cdot\frac{9\cdot 9}{8\cdot 10}\cdot\ldots = 1{,}2732394\ldots \in \mathbb{R} \quad (\text{für } \; t = 2600000)$$

$$\frac{2\,|}{|\,1} + \frac{3\,|}{|\,2} + \frac{4\,|}{|\,3} + \frac{5\,|}{|\,4} + \frac{6\,|}{|\,5} + \ldots = \left.\frac{i+1\,|}{|\,i}\right|_{i=1}^{\infty} = 1 \in \mathbb{N}$$

$$\frac{1\,|}{|\,2} + \frac{2\,|}{|\,3} + \frac{3\,|}{|\,4} + \frac{4\,|}{|\,5} + \frac{5\,|}{|\,6} + \ldots = \left.\frac{i\;\;|}{|\,i+1}\right|_{i=1}^{\infty} = \frac{3-e}{e-2} \in \mathbb{R}$$

$$= [0; 2, 1, \underline{1, 4, 1}, \underline{1, 6, 1}, \underline{1, 8, 1}, \underline{1, 10, 1}, \ldots]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3\,|}{|\,3} + \frac{4\,|}{|\,4} + \frac{5\,|}{|\,5} + \frac{6\,|}{|\,6} + \frac{7\,|}{|\,7}\right) = \frac{1}{2}\left(\left.\frac{i\,|}{|\,i}\right|_{i=3}^{\infty}\right)$$

$$\frac{2\,|}{|\,1} + \frac{4\,|}{|\,3} + \frac{6\,|}{|\,5} + \frac{8\,|}{|\,7} + \frac{10\,|}{|\,9} + \ldots = \left.\frac{2k\;\;|}{|\,2k-1}\right|_{k=1}^{\infty} = 1 \in \mathbb{N}$$

$$\frac{1}{|2|}+\frac{3}{|4|}+\frac{5}{|6|}+\frac{7}{|8|}+\frac{9}{|10|}+\ldots=\frac{2k-1}{|2k|}\Bigg|_{k=1}^{\infty}=0,37973195474099563280210 63\ldots\in\mathbb{R}$$

$$\frac{3}{|2|}+\frac{5}{|4|}+\frac{7}{|6|}+\frac{9}{|8|}+\frac{11}{|10|}+\ldots=\frac{2k+1}{|2k|}\Bigg|_{k=1}^{\infty}=1\in\mathbb{N}$$

$$\frac{2}{|3|}+\frac{4}{|5|}+\frac{6}{|7|}+\frac{8}{|9|}+\frac{10}{|11|}+\ldots=\frac{2k}{|2k+1|}\Bigg|_{k=1}^{\infty}=\frac{2-\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}\in\mathbb{R}$$

$$=[0;1,\underline{1,5},1,\underline{1,9},1,\underline{1,13},1,\underline{1,17},1,\ldots]$$

Beispiel 3

A Pascal's triangle story

3.1 Pascal's triangle, determinant notation

$$\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0\\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 & 0 & 0\\
1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1 & 0\\
1 & 9 & 36 & 84 & 126 & 126 & 84 & 36 & 9 & 1
\end{vmatrix}$$

3.2 Red & blue determinants and π^2

$$r(k=7) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 15 & 15 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 35 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 28 & 70 & 28 \end{vmatrix}$$

$$\lim_{k\to\infty} \binom{2k+4}{2} \frac{r(k)}{r(k+1)} = \frac{\pi^2}{2}$$

Recursion equation

$$r(k)=\sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i-1} \binom{k+1}{k+1-2i} r(k-i)$$

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^{i} \binom{k+1}{k+1-2i} r(k-i)=0$$

$r(0)=0,\ r(1)=1$

$$b(k=7) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 20 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 21 & 35 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 56 & 56 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 36 & 126 & 84 \end{vmatrix}$$

$$\lim_{k\to\infty} \binom{2k+6}{3} \frac{b(k)}{b(k+1)} = \frac{4\,\pi^2}{3}$$

Find the recursion equation for b(k).

3.3 Red execution record

$$k \quad x(k)=\binom{2k+4}{2} \frac{r(k)}{r(k+1)} \to \frac{\pi^2}{2}$$

1 5.0

2 4.941176470588235294..

3 4.935483870967741935..

4 4.934876989869753979..

5 4.934803118434457259..

6 4.934802302476570680..

7 4.934802211868223784..

8 4.934802201802462333..

9 4.934802200684462774..

10 4.934802200560210664..

11 4.9348022005464050098..

12 4.934802200544 8710537..

13 4.934802200544 7006143..

14 4.9348022005446816766..

15 4.93480220054467 95724..

16 4.9348022005446793386..

17 4.93480220054467930 8..

18 4.93480220054467930 95..

→19 4.9348022005446793094..

20 4.9348022005446793094..

$$\frac{\pi^2}{2} = 4.9348022005446793094..$$

The red execution record shows:

1* The sequence $\langle x(k)\rangle_{k=1}^{\infty}$ converges to the transcendent number $\pi^2/2$.

2* The related difference quotient converges linearly to the natural number 9

$$dx = \lim_{k\to\infty} \frac{x(k+1)-x(k)}{x(k+2)-x(k+1)} = 9$$

$dx(k+1) \approx dx(k)$,

implicit and in shortened determinant representation (see Unit 19)

$$\lim_{k\to\infty} \begin{vmatrix} x(k) & x(k+1) & x(k+2) \\ x(k+1) & x(k+2) & x(k+3) \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Interpretation:

Mit steigendem k liegen die drei aufeinanderfolgenden Punkte $(x(k),x(k+1))$, $(x(k+1),x(k+2))$ und $(x(k+2),x(k+3))$

immer genauer auf einer Geraden. Der Anstieg dieser Geraden ist dx = 9, ein Maß für die „Konvergenzgeschwindigkeit“.

3.4 Tripelaccelerator

Die gegebene Sequenz $\langle x(k)\rangle_{k=1}^{\infty} \to \frac{\pi^2}{2}$ kann mittels des Tripelacceleratorsors

** in expliziter Notation

$$x1(t) = \frac{\begin{vmatrix} x(t) & x(t+1) \\ x(t+1) & x(t+2) \end{vmatrix}}{\Delta^2 x(t)}$$

$$\Delta x(t) = x(t+1) - x(t)$$

$$\Delta^2 x(t) = \Delta x(t+1) - \Delta x(t) \qquad ,$$

$$= x(t+2) - 2x(t+1) + x(t)$$

$$\Delta^3 x(t) = \Delta^2 x(t+1) - \Delta^2 x(t)$$

$$= x(t+3) - 3x(t+2) + 3x(t+1) - x(t)$$

** in implizierter Notation, verkürzte Determinantendarstellung

$$\begin{vmatrix} x(t) & x(t+1) & x(t+2) & x(t+3) \\ x(t) & x(t+1) & x1(t) & x1(t) \end{vmatrix} = 0$$

in eine schneller konvergierende Sequenz

$$\langle x1(k)\rangle_{k=1}^{\infty} \to \frac{\pi^2}{2}$$

transformiert werden:

$$x1(k) = \frac{\begin{vmatrix} x(k) & x(k+1) \\ x(k+1) & x(k+2) \end{vmatrix}}{\Delta^2 x(k)} \to \frac{\pi^2}{2}$$

k	x1(k)
1	4.934873949579831932 8
2	4.934804570473071831 7

3	4.9348022866200000678
4	4.934802203820408730 8
5	4.9348022006723638231
6	4.9348022005497185981
7	4.9348022005448794847
8	4.9348022005446872877
9	4.9348022005446796280
10	4.9348022005446793221
11	4.9348022005446793099
12	→ 4.9348022005446793094
13	4.9348022005446793094

Diskutieren Sie Genesis, Struktur, geometrische Interpretation und mögliche Extensionen des Tripelaccelerators, z.B. zu

$$x1^*(t) = \frac{\begin{vmatrix} x(t) & x(t+1) & x(t+2) \\ x(t+1) & x(t+2) & x(t+3) \end{vmatrix}}{\Delta^3 x(t)} .$$

Was geschieht, wenn man die Tripelacceleration auf die Sequenz $\langle x1(k) \rangle_{k=1}^{\infty} \to \frac{\pi^2}{2}$ u.s.f. anwendet? Acceleratorkaskade?

Versuchen Sie die Tripelacceleration in die red-Rekursionsgleichung zu integrieren, um so eine von vornherein besser konvergierende Rekursionsgleichung für x1(k) zu erhalten.

Wie könnten mechanische, elektrische, biologische, … Analoga der Tripelacceleration aussehen? Anwendungen in Physik und Technik?

3.5 Go to blue

$$\lim_{k\to\infty} \binom{2k+4}{2} \frac{r(k)}{r(k+1)} = \frac{\pi^2}{2}$$

$$\lim_{k\to\infty} \binom{2k+6}{3} \frac{b(k)}{b(k+1)} = \frac{4\pi^2}{3}$$

Führen Sie nun die Untersuchungen in 3.3 und 3.4 auch mit blue durch.

3.6 Red & blue and Φ^2

The quotient of two immediately consecutive

$$\left\{\begin{array}{l}\text{row sums}\\ \\ \text{column sums}\end{array}\right. \text{ of the determinants } r(k) \text{ and}$$

$b(k)$ converges to $\left\{\begin{array}{l}\Phi^2 = \frac{1}{2}(3+\sqrt{5})\\ \\ 2\end{array}\right.$ for k to ∞ .

Läßt sich aus red(k) bzw. blue(k) eine „Fibonacci Bomb“ (siehe Unit 30.1) generieren?

Lateral zu 3.4
Quadratische Konvergenz

In Unit 1 ist ein quadratisch konvergierender Rekursionsprozess beschrieben. Für den Differenzenquotient

$$dx(k) = \frac{x(k+1) - x(k)}{x(k+2) - x(k+1)}$$

der generierten Wertesequenz $\langle x(k)\rangle_{k=1}^{\infty}$ gilt hier

** im Gegensatz linearen Konvergenz mit $dx(k+1) \approx dx(k)$ **

für steigendes k mit steigender Genauigkeit $dx(k+1) \approx (dx(k))^2$, nach Umformung

$$\lim_{k\to\infty}(xxx'' + xx'x''' + xx'x''' + x'x'x''$$
$$+ x'x'x'' + x'x'x'' + x'x'x'' + x''x''x''$$
$$- xxx''' - xx'x'' - xx'x'' - x'x'x'$$
$$- x'x'x''' - x'x''x'' - x'x''x'' - x'x''x'') = 0 ,$$

hierbei ist

x = x(k), x' = x(k+1), x '' = x(k+2), x ''' = x(k+3) .

Formen Sie diese Zeichenkettendarstellung nun in eine verkürzte Determinantendarstellung um. Diskutieren Sie die erhaltene Struktur.

2) x(∞) und dx(∞) sind gleichlaufend

Example 1

Find a simple and fast algorithm for the numeric calculation of $x = \sqrt{2} + \sqrt{3} = 3.1462643\ldots$.

Solution

$$x = \sqrt{2} + \sqrt{3} \rightarrow \quad x^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 \rightarrow \left(x^2 - 5\right)^2 = 24 \rightarrow$$
$$x^4 - 10x^2 + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{(10x^2 - 1)}{x^3}$$

$\rightarrow$ "Babylon" approach:

$$x := \frac{1}{2}\left(x + \frac{10x^2 - 1}{x^3}\right) \rightarrow$$ Execution record

t	x(t)
0	5.0
1	3.496
2	3.166504067
3	3.146532320
4	3.146267115
5	3.146264398
6	3.146264370
7	3.146264370 →

$$\lim_{t\to\infty} dx(t) = \frac{x(t+1)-x(t)}{x(t+2)-x(t+1)} = \lim_{t\to\infty}\left(x(t)\right)^4 = 97.98979485566...$$

$$= \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^4$$

Check $\lim_{t\to\infty} d^{(k)}x(t)$. Discussion!

Extend the recursion equation to

$x := \varphi(x)$

with

$\lim_{t\to\infty} x(t) = a$

and

$\lim_{t\to\infty} dx(t) = a^n$

Find more examples for this function $\varphi(x)$.

Find a general solution for this problem.

Lateral to example 1

$$[5;\overline{1,1,1,2*5}]^2 = 2^5 = 32$$

$[5;1,1,1,2*5]^2 =$

31.99316406250000000

$[5;1,1,1,2*5,1,1,1,2*5]^2 =$

31.999994075673955562476672966 2...

$[5;1,1,1,2*5,1,1,1,2*5,1,1,1,2*5]^2 =$

$[5;(1,1,1,2*5)^{\underline{3}}]^2 =$

31.999999948662642625556266303...

$[5;(1,1,1,2*5)^{\underline{4}}]^2 =$

31.999999999955513521725827571...

$[5;(1,1,1,2*5)^{\underline{5}}]^2 =$

31.999999999999961450163189250...

$[5;(1,1,1,2*5)^{\underline{6}}]^2 =$

31.999999999999999966594570400...

$[5;(1,1,1,2*5)^{\underline{7}}]^2 =$

31.999999999999999999971052466...

$[5;(1,1,1,2*5)^{\underline{8}}]^2 =$

31.999999999999999999999974915...

$[5;(1,1,1,2*5)^{\underline{9}}]^2 =$

31.999999999999999999999999978...

. The related difference quotient is

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[5;(1,1,1,10)^{\underline{n+1}}\right]^2 - \left[5;(1,1,1,10)^{\underline{n}}\right]^2}{\left[5;(1,1,1,10)^{\underline{n+2}}\right]^2 - \left[5;(1,1,1,10)^{\underline{n+1}}\right]^2}$$

$$= 1153.99913344822277991108899947$$

$$75568160564261251538... = (1+\sqrt{2})^8$$

Discussion!

Example 2

$$x(k) = \sqrt{5+\sqrt{5+...+\sqrt{5}}} = \sqrt{5}_{k}$$

k times

Execution record

k	x(k)
1	2.236067978…
2	2.689994047855829307840235875 54…
3	2.773083851573159572034831337 04…
4	2.788025080872329522099182935 24…
5	2.790703330859862202077893376 20…
6	2.791183141762622175872532757 08…
7	2.791269091607368151181887731 15…
8	2.791284487759599209853828269 34…
9	2.791287245655595225998323072 80…
10	2.791287739674216250076064895 60…

$$\lim_{k\to\infty} x(k) = \frac{1}{2}(1+\sqrt{21}) = 2.791287847...$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x(k+1)-x(k)}{x(k+2)-x(k+1)} = 1+\sqrt{21} = 2*\lim_{k\to\infty} x(k)$$

$$= 5.582575695...$$

Generalization

$$x(n,k) = \underbrace{\sqrt{n+\sqrt{n+\ldots+\sqrt{n}}}}_{k \text{ times}} = \sqrt[k]{n} \;;\; k \in \mathbb{N},\; n \in \mathbb{R}_+$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{4n+1}\right)$$

$$dx(n,k) = 1+\sqrt{4n+1} = 2 * x(n,k)$$

Example 3
Transformation
continued fraction to common fraction

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ddots + \cfrac{b_n}{a_n}}}} = a_0 + \frac{b_1|}{|a_1} + \frac{b_2|}{|a_2} + \frac{b_3|}{|a_3} + \ldots + \frac{b_n|}{|a_n} \Rightarrow \frac{A(n)}{B(n)}$$

$$a_i, b_i, A(n), B(n) \in \mathrm{N}$$

via 2 by 2 matrix chain product representation

$$\begin{bmatrix} & B(n) \\ & A(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 1 & a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 1 & a_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b_3 \\ 1 & a_3 \end{bmatrix}\ldots\begin{bmatrix} 0 & b_n \\ 1 & a_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A(n) & B(n) \\ & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\ldots\begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Example 3.1

$$1+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|6}+\frac{1|}{|8} \Rightarrow \frac{A(3)}{B(3)} = \frac{106}{57}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 6 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 8 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} 7 & B(3)=57 \\ \hline 13 & A(3)=106 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|c} 8 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} 6 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} A(3)=106 & B(3)=57 \\ \hline 13 & 7 \end{array}\right]$$

Example 3.2
e-experiment: 2 by 2 matrix tuning

$$\mathrm{e} = 2+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|2}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|4}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|6}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|8}+\frac{1|}{|1}+..$$

$$\left[\begin{array}{c|c} & B(\infty) \\ \hline & A(\infty) \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 \end{array}\right]\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 \end{array}\right]}_{\downarrow}\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 4 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 \end{array}\right]}_{\downarrow}\ldots$$

$$=\left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 \end{array}\right]\qquad\left[\begin{array}{c|c} 2 & 3 \\ \hline 3 & 4 \end{array}\right]\qquad\left[\begin{array}{c|c} 4 & 5 \\ \hline 5 & 6 \end{array}\right]$$

$$=\prod_{i=0}^{\infty}\left[\begin{array}{c|c} 2i & 2i+1 \\ \hline 2i+1 & 2i+2 \end{array}\right]$$

Example 3.3

$$\frac{1|}{|2}+\frac{2|}{|3}+\frac{3|}{|4}+\frac{4|}{|5}+\frac{5|}{|6}+\frac{6|}{|7}+..=\frac{3-e}{e-2}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} & B(\infty) \\ \hline & A(\infty) \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} 0 & 2 \\ \hline 1 & 3 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} 0 & 3 \\ \hline 1 & 4 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} 0 & 4 \\ \hline 1 & 5 \end{array}\right]..$$

$$\frac{2|}{|1}+\frac{3|}{|2}+\frac{4|}{|3}+\frac{5|}{|4}+\frac{6|}{|5}+\frac{7|}{|6}+..=1\ !!$$

$$\left[\begin{array}{c|c} & B(\infty) \\ \hline & A(\infty) \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} 0 & 2 \\ \hline 1 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} 0 & 3 \\ \hline 1 & 2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} 0 & 4 \\ \hline 1 & 3 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} 0 & 5 \\ \hline 1 & 4 \end{array}\right]..$$

Example 3.4

$$e^k \Rightarrow \left[\begin{array}{c|c} & B(\infty) \\ \hline & A(\infty) \end{array}\right] = \prod_{i=0}^{\infty} \left[\begin{array}{c|c} 2i+1-k & 2i+1 \\ \hline 2i+1 & 2i+1+k \end{array}\right]$$

$$\sqrt[k]{e} \Rightarrow \left[\begin{array}{c|c} & B(\infty) \\ \hline & A(\infty) \end{array}\right] = \prod_{i=0}^{\infty} \left[\begin{array}{c|c} k(2i+1)-1 & k(2i+1) \\ \hline k(2i+1) & k(2i+1)+1 \end{array}\right]$$

Find similar compact 2by2 matrix chain product representations for the difference quotient

$$\mathrm{d}\frac{A(n)}{B(n)} = \frac{\frac{A(n+1)}{B(n+1)} - \frac{A(n)}{B(n)}}{\frac{A(n+2)}{B(n+2)} - \frac{A(n+1)}{B(n+1)}} \quad \text{of} \quad \frac{A(n)}{B(n)} \ .$$

And then, in the case of linear convergence, for the convergence accelerator

$$\frac{A}{B}acc(n) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}-1}\frac{A(n+1)}{B(n+1)} - \frac{1}{\mathrm{d}-1}\frac{A(n)}{B(n)} \ ;$$

$$\mathrm{d} = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \mathrm{d}\frac{A(n)}{B(n)} \ .$$

References

[1] A.O. Gelfond. Differenzenrechnung.
Berlin 1958

[2] J. Aczel. Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen.
Berlin 1961

[3] M.J. Atallah. Algorithms and Theory of Computation Handbook.
CRC Press LLC 1999, ISBN 0-8493-2649-4

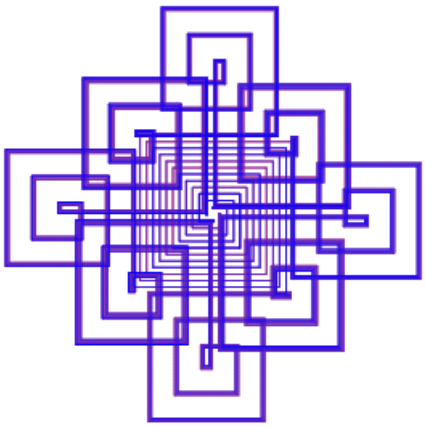
[4] S. Wolfram. A New Kind of Science.
Champaign 2002, ISBN 1579550088

[5] R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik. Concrete Mathematics.

Addison-Wesley 2008, ISBN 0-201-55802-5
[6] https://de.wikipedia.org/wiki/Differenzenrechnung
[7] Weisstein, Eric W. "Nested Radical." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/NestedRadical.html
[8] https://en.wikipedia.org/wiki/Nested_radical
[9] http://en.wikipedia.org/wiki/Pascal's_triangle

Links to
Deb65.1, Deb66
U15.p58+61, U42, U902

12.02.2018 EPSnoct DScalc



e.t.i.c.