Unit 138

Algorithmic finger exercises

Expansion of $\sqrt[k]{n}$, $k,n\in\mathbb{N}$ into an infinite branched nested expression – continued fraction hybrid

We consider the infinite branched nested expression – continued fraction hybrid

$$\sqrt[k]{n} = 1+\frac{1}{k}\cdot\frac{n-1}{n}\left(1+\frac{1}{k\left(1-\frac{k-1}{|k+1|}\right)}\cdot\frac{n-1}{n}\left(1+\frac{1}{k\left(1-\frac{k-1}{|k+1|}-\frac{1}{|2|}\right)}\cdot\frac{n-1}{n}\left(1+\frac{1}{k\left(1-\frac{k-1}{|k+1|}-\frac{1}{|2|}-\frac{1}{|2|}\right)}\cdot\frac{n-1}{n}\left(1+\frac{1}{k\left(1-\frac{k-1}{|k+1|}-\frac{1}{|2|}-\frac{1}{|2|}-\frac{1}{|2|}\right)}\cdot\frac{n-1}{n}\left(1+\cdots\right.\right.\right.\right.\right.$$

$k,n\in\mathbb{N}$ (1)

↓ z(0) ↓ z(1) ↓ z(2) ↓ z(3) ↓ z(4) ↓ z(5)

– and the related nested expression hybrid

$$\sqrt[k]{n} = 1+\left(\frac{0*k+1}{1*k}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(1+\left(\frac{1*k+1}{2*k}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(1+\left(\frac{2*k+1}{3*k}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(1+\left(\frac{3*k+1}{4*k}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(1+\left(\frac{4*k+1}{5*k}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)(1+\cdots)\right)\right)\right)\right)$$

$$\sqrt[k]{n} = 1+\frac{1}{b_1}*\frac{n-1}{n}\left(1+\frac{1}{b_2}*\frac{n-1}{n}\left(1+\frac{1}{b_3}*\frac{n-1}{n}\left(1+\frac{1}{b_4}*\frac{n-1}{n}\left(1+\frac{1}{b_5}*\frac{n-1}{n}(1+\cdots)\right)\right)\right)\right)$$

$$b_1 = k$$

$$b_2 = k\left(1-\frac{k-1}{k+1}\right)$$

$$b_3 = k\left(1-\frac{k-1}{k+1}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)\right)$$

$$b_4 = k\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\left(1 + \frac{1}{2k+1}\left(1 + \frac{k+1}{3k+1}\right)\right)\right)$$

$$b_5 = k\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\left(1 + \frac{1}{2k+1}\left(1 + \frac{k+1}{3k+1}\left(1 + \frac{2k+1}{4k+1}\right)\right)\right)\right)$$

$$b_6 = k\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\left(1 + \frac{1}{2k+1}\left(1 + \frac{k+1}{3k+1}\left(1 + \frac{2k+1}{4k+1}\left(1 + \frac{3k+1}{5k+1}(1 + \cdots)\right)\right)\right)\right)\right)$$

(2.1,2)

** Bestimmen Sie die Anzahl α(k,n) der Glieder der rechten Seite von Gl. (1), die für eine 95%ige Approximation von $\sqrt[k]{n}$ erforderlich ist:

$z(\alpha(k,n)) = 0.95\sqrt[k]{n}$. (3)

** Generieren und diskutieren Sie eine 3D-Reliefdarstellung von α(k,n).

** Wie reagiert Gl. (1) auf spezielle „Inputwerte“ für k und n, z.B. 0 oder 1?

** Testen Sie, ob Gl. (1) auch für n ⇨ $x \in \mathbb{R}_+$ und k^{-1} ⇨ $y \in \mathbb{R}+$ gültig ist und damit aus Gl. (1) folgt.

$$x^y =$$

$$1 + \frac{x-1}{x} * \frac{y}{a_1(y)}\left(1 + \frac{x-1}{x} * \frac{y}{a_2(y)}\left(1 + \frac{x-1}{x} * \frac{y}{a_3(y)}(1 + \cdots)\right)\right)$$

$$\frac{y}{a_i(y)} = \frac{y+i-1}{i} \rightarrow$$

$$x^y =$$

$$1+\frac{x-1}{x}*\frac{y+0}{1}\left(1+\frac{x-1}{x}*\frac{y+1}{2}\left(1+\frac{x-1}{x}*\frac{y+2}{3}(1+\cdots)\right)\right)$$

(4.1,2)

Example 1

$x=3,\ y=\frac{1}{2}$

$3^{\frac{1}{2}}=\sqrt[2]{3}=1.732050808\ldots=$

$$1+\frac{1}{3}\left(1+\frac{3}{6}\left(1+\frac{5}{9}\left(1+\frac{7}{12}\left(1+\frac{9}{15}(1+\cdots)\right)\right)\right)\right)$$

↓ z(0) ↓ z(1) ↓ z(2) ↓ z(3) ↓ z(4) ↓ z(5) …

(5)

Execution and linear convergence acceleration record

i	z(i)	$dz(i)=\frac{z(i+1)-z(i)}{z(i+2)-z(i+1)}$	$z1(i)=\frac{d*z(i+1)-z(i)}{d-1}$
0	1.0		
1	$1,3_{per}$		
2	1.5		
3	$1.(592)_{per}$		
4	1.646604938…		
5	1.679012346…		
6	1.698816872…		
7	1.711076818…	1.58823496…	
8	1.718739283…		
9	1.723563799…		
10	1.724027331…		

11 1.728563751…1.560001658…
12 1.729806023… 1.555552951…
13 1.730602351… 1.551728214…
14 1.731114277… 1.732038017…
15 1.731444184… 1.545449930…
16 1.731657249…
17 1.731795115…

$$\downarrow$$
$$d = \lim_{i\to\infty} dz(i)$$
$$= \frac{3}{2}$$

Example 2

$x = 3,\ y = \frac{1}{3}$

$$3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3} = 1.44224957\ldots =$$

$$1 + \frac{2}{9}\left(1 + \frac{8}{18}\left(1 + \frac{14}{27}\left(1 + \frac{20}{36}\left(1 + \frac{26}{45}(1 + \cdots)\right)\right)\right)\right)$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$

z(0) z(1) z(2) z(3) z(4) z(5) …

(6)

Execution and nonlinear convergence acceleration record

i z(i)

$$z2(i) = \frac{\left|\begin{matrix} z(i) & z(i+1) \\ z(i+1) & z(i+2) \end{matrix}\right|_{(\pm,*)}}{\left|\begin{matrix} z(i) & z(i+1) \\ z(i+1) & z(i+2) \end{matrix}\right|_{(\pm,+)}}$$
$$= \frac{z(i)*z(i+2)-(z(i+1))^2}{z(i)+z(i+2)-2z(i+1)}$$

0	1.0	
1	1.2_{per}	
2	1.320987654...	
3	1.372199360…	
4	1.400650307…	
5	1.417088633…	
6	1.426829862…	
7	1.432705525…	
8	1.436296207…	
9	1.438512678…	
10	1.439891815...	1.44223820…
11	1.440755518…	
12	1.441299330…	1.44224 5459…
13	1.441643280…	
14	1.441861661…	

Example 3

Lateral 1 $\frac{\pi}{2}$ (vgl.Deb 280.1) Gl. (1)

$\frac{\pi}{2}$ = 1.570796327…

$$= 1 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{5}\left(1 + \frac{3}{7}\left(1 + \frac{4}{9}\left(1 + \frac{5}{11}(1 + \cdots)\right)\right)\right)\right)$$

z(0) z(1) z(2) z(3) z(4) z(5) …

(7)

Execution and nonlinear convergence acceleration record

$$z2(i) = \frac{\begin{vmatrix} z(i) & z(i+1) \\ z(i+1) & z(i+2) \end{vmatrix}_{(\pm,*)}}{\begin{vmatrix} z(i) & z(i+1) \\ z(i+1) & z(i+2) \end{vmatrix}_{(\pm,+)}} = \frac{z(i)*z(i+2)-(z(i+1))^2}{z(i)+z(i+2)-2z(i+1)}$$

$$dz(i) = \frac{z(i+1)-z(i)}{z(i+2)-z(i+1)}$$

i	z(i)		
0	1.0		
1	1.3_{per}		
2	1.46_{per}		
3	1.523809524…		
4	1.549206349…		
5	1.560750361…	1.570740508…	
6	1.566078366…	1.570774903…	
7	1.568564769…	1.570788070…	
8	1.569734840…		
9	1.570289085…		2.0909…
10	1.570553011…	1.570794911…	2.083_{per}
11	1.570679236…	1.570796117…	2.0768…
12	1.570739824…		
13	1.570768997…		

$$\downarrow$$

$$d = \lim_{i\to\infty} dz(i) = 2$$

$$z22(i) = \frac{\begin{vmatrix} z2(i) & z2(i+1) \\ z2(i+1) & z2(i+2) \end{vmatrix}_{(\pm,*)}}{\begin{vmatrix} z2(i) & z2(i+1) \\ z2(i+1) & z2(i+2) \end{vmatrix}_{(\pm,+)}}$$

i

$$= \frac{z2(i)*z2(i+2)-(z2(i+1))^2}{z2(i)+z2(i+2)-2z2(i+1)}$$

5 1.570796

Kommentar

Eine konvergente Folge reeller Zahlen in Dezimaldarstellung z(0), z(1), z(2), z(3), … mit dem Grenzwert z(∞) und konvergierendem Differenzenquotienten

$$\lim_{i\to\infty} \frac{z(i+1)-z(i)}{z(i+2)-z(i+1)} = dz(\infty) \qquad (8)$$

werde durch ein deterministisches Bildungsgesetz (Formelausdruck oder Algorithmus) erzeugt

Mittels des Tripeloperators

$$z2(i) = \frac{\begin{vmatrix} z(i) & z(i+1) \\ z(i+1) & z(i+2) \end{vmatrix}_{(\pm,*)}}{\begin{vmatrix} z(i) & z(i+1) \\ z(i+1) & z(i+2) \end{vmatrix}_{(\pm,+)}} = \frac{z(i)*z(i+2)-(z(i+1))^2}{z(i)+z(i+2)-2z(i+1)}, \qquad (9)$$

„der das Bildungsgesetz nicht kennt“, wird aus drei aufeinanderfolgenden Werten $z(i),\ z(i+1),\ z(i+2)$ dieser Folge ein Wert z2(i) berechnet. Dieser approximiert z(∞) wesentlich besser als z(i+2), d.h. besitzt eine größere Anzahl gültiger Stellen von z(∞) als z(i+2). Der Tripeloperator Gl. (9) realisiert eine „Konvergenzverbesserung“ und damit in bezug auf die schon berechnete Teilfolge z(i), z(i+1), z(i+2) eine „Prediktion weiterer gültiger Stellen von z(∞) ohne sie mit dem eigentlichen Bildungsgesetz berechnet zu haben.“

Daraus ergibt sich eine Reihe von Denkansätzen:

1) Wiederholte Anwendung des Tripeloperators:

$z(i) \rightarrow z2(i) \rightarrow z22(i) \rightarrow \ldots ?$ (10)

2) Wirkung des Tripeloperators bei nichtdeterministisch erzeugten konvergenten Folgen reeller Zahlen?
3) Zahlentheoretische Relevanz des Tripeloperators?
4) Integration von Bildungsgesetz der untersuchten Folge und Tripeloperator?
5) Erweiterungen des Tripeloperators, z.B. zu

$$\frac{\begin{vmatrix} z(i) & z(i+1) \\ z(i+1) & z(i+2) \end{vmatrix}_{(\pm,*)}}{\begin{vmatrix} z(i) & z(i+1) \\ z(i+1) & z(i+2) \end{vmatrix}_{(\pm,+)}} \rightarrow \frac{\begin{vmatrix} z(i) & z(i+1) & z(i+2) \\ z(i+1) & z(i+2) & z(i+3) \\ z(i+2) & z(i+3) & z(i+4) \end{vmatrix}_{(\pm,*)}}{\begin{vmatrix} z(i) & z(i+1) \\ z(i+1) & z(i+2) \end{vmatrix}_{(\pm,*)}}$$

(11)

Ausloten von Leistungsfähigkeit und Anwendungsmöglichkeiten

6) ……..

Example 4

Lateral 2 ln(e*x)

ln(e*x) =

$$1 + \frac{x-1}{x}\left(1 + \frac{x-1}{x} * \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x-1}{x} * \frac{2}{3}\left(1 + \frac{x-1}{x} * \frac{3}{4}(1 + \cdots)\right)\right)\right)$$

$x > \frac{1}{2}$ (12)

** Suchen Sie weitere infinite nested expression

Darstellungen des Typs Gl. (4.2) und Gl. (13).
** von Standardfunktionen in der Mathematik
** in Natur- und Ingenieurwissenschaften, vgl. Unit 12.

** Finden Sie einen Algorithmus zur Entwicklung einer reellen Funktion f(x) in einen infinite nested expression

$$f(x) = 1 + A_0 \frac{x-1}{x}\left(1 + A_1 \frac{x-1}{x}\left(1 + A_2 \frac{x-1}{x}\left(1 + A_3 \frac{x-1}{x}(1 + \cdots)\right)\right)\right) \quad (14)$$

Example 5

5.1 Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten von Gl. (4.2) für charakteristische (x,y)-Werte.

5.2 Bestimmen sie dabei

$$d = \lim_{i\to\infty} d(i) = \lim_{i\to\infty} \frac{z(i+1)-z(i)}{z(i+2)-z(i+1)} \quad (15)$$

(Wertetabelle von d in Abhängigkeit von x und y, d(x,y)).

5.3 Induzieren Sie daraus einen Formelausdruck für d(x,y).

$$d(x,y) = \frac{x}{x-1} \quad ?? \quad (16)$$

5.4 Erzeugen Sie damit aus Gl. (4.2) und dem „linearen Konvergenzbeschleuniger“

$$z1(i) = \frac{d*z(i+1)-z(i)}{d-1} \quad (17)$$

einen besser konvergierenden infinite nested expression für x^y.

5.5 Läßt sich diese Prozedur wiederholen?

Offene Probleme

Mehrfach verzweigter Kettenbruch und nested expression via Lindenmayer-System [1].

Riemannsche Zetafunkton [2] im Lichte von Unit 138.

References

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/L-system

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_zeta_function

18.06.2020 EPSalg Dscalc