Unit n° 136

Determinant patterns

Die lineare Rekursionsgleichung

$$b(i+1) = \sum_{j=0}^{n} a(j)b(i-j);\ i = n(1)\infty$$

mit der endlichen Initialisierungssequenz

$$\underline{b(0),b(1),b(2),\ldots,b(n)} \qquad (1.2)$$

generiert die unendliche Folge

$$\underline{b(0),b(1),b(2),\ldots,b(n)},b(n+1),b(n+2),\ldots. \qquad (1.3)$$

Die Elemente dieser rekursiv erzeugten Folge sind die Koeffizienten der unendlichen Potenzreihe in x^{-1}

$$g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b(i)}{x^i} \ . \qquad (2.1)$$

Im Konvergenzfalle lässt sich g(x) dann als Quotient zweier endlicher Potenzreihen in x darstellen:

$$g(x) = \frac{h2(x)}{h1(x)} \qquad (2.2)$$

$$h1(x) = x^{n+1} - \sum_{j=0}^{n} a(j)x^{n-j}$$

$$= x^{n+1} - a(0)x^{n} - a(1)x^{n-1} - a(2)x^{n-2} - \ldots$$

$$- a(n-1)x - a(n) \qquad (2.3)$$

$$h2(x) = b(0)x^{n+1} - \begin{vmatrix} b(0) & b(1) \\ 1 & a(0) \end{vmatrix} x^{n}$$

$$- \begin{vmatrix} b(0) & b(1) & b(2) \\ 0 & 1 & a(0) \\ 1 & 0 & a(1) \end{vmatrix} x^{n-1}$$

$$+ \begin{vmatrix} b(0) & b(1) & b(2) & b(3) \\ 0 & 0 & 1 & a(0) \\ 0 & 1 & 0 & a(1) \\ 1 & 0 & 0 & a(2) \end{vmatrix} x^{n-2}$$

$$+\begin{vmatrix} b(0) & b(1) & b(2) & b(3) & b(4) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a(0) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a(1) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a(2) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & a(3) \end{vmatrix} x^{n-3} \ldots$$

$$vz\begin{vmatrix} b(0) & b(1) & b(2) & b(3) & b(4) & \ldots & b(n) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a(0) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & a(1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a(2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & a(3) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a(n-1) \end{vmatrix} x$$

Determinante (n+1)-ter Ordnung

(2.4.1)

bestehend aus

** dem (n+1)-komponentigen Zeilenvektor

$$\vec{b} = \left(b(0),b(1),b(2),b(3),...,b(n)\right) , \quad (2.4.2)$$

** dem n-komponentigen Spaltenvektor

$$a\downarrow = \begin{pmatrix} a(0) \\ a(1) \\ a(2) \\ a(3) \\ \vdots \\ a(n) \end{pmatrix} \quad (2.4.3)$$

** und der Antidiagonal-Einheitsmatrix

$$\underline{e}\swarrow = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \iddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4.4)$$

$$vz = (-1)^{int(\frac{n+1}{2})} \quad (2.4.5)$$

In normierter Notation

$$h2(x) = b(0)x^{n+1} - \frac{\begin{vmatrix} b(0) & b(1) \\ 1 & a(0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} x^{n}$$

$$- \frac{\begin{vmatrix} b(0) & b(1) & b(2) \\ 0 & 1 & a(0) \\ 1 & 0 & a(1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} x^{n-1}$$

$$- \frac{\begin{vmatrix} b(0) & b(1) & b(2) & b(3) \\ 0 & 0 & 1 & a(0) \\ 0 & 1 & 0 & a(1) \\ 1 & 0 & 0 & a(2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} x^{n-2}$$

$$-\frac{\begin{vmatrix} b(0) & b(1) & b(2) & b(3) & b(4) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a(0) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a(1) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a(2) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & a(3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} x^{n-3} - \ldots$$

$$\begin{vmatrix} b(0) & b(1) & b(2) & b(3) & b(4) & \dots & b(n) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a(0) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & a(1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a(2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & a(3) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a(n-1) \end{vmatrix}$$

Determinante (n+1)-ter Ordnung

$$- \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot x$$

Det. (n+1)-ter Ordnung

Beispiel 1

n=3, a(0)=1, a(1)=2, a(2)=3, a(3)=4,
b(0)=5, b(1)=0, b(2)=-1, b(3)=6,
x=10 (4.1)

Beispiel 2

n=4, a(0)=1, a(1)=1, a(2)=1, a(3)=1, a(4)=1

b(0)=1, b(1)=1, b(2)=1, b(3)=1, b(4)=1

x=20 (5.1)

Beispiel 3

n=4, a(0)=1, a(1)=1, a(2)=1, a(3)=1, a(4)=1

b(0)=2, b(1)=0, b(2)=-2, b(3)=3, b(4)=1

x=20 (6.1)

Beispiel 4

n=4, a(0)=1, a(1)=2, a(2)=3, a(3)=4, a(4)=5

b(0)=2, b(1)=0, b(2)=-2, b(3)=3, b(4)=1

x=20 (7.1)

Spezialfälle von h2(x)

** b(0)=1, b(1)=b(2)=b(3)=…=b(n)=0

$$h2(x) = x^{n+1} - a(0)x^{n} - a(1)x^{n-1} - a(2)x^{n-2} - \ldots - a(n-1)x - a(n) = h1(x) \quad (8)$$

** a(0)=a(1)=a(2)=a(3)=…=a(n)=1

$$h2(x) = b(0)x^{n+1} + (b(1) - b(0))x^{n} + (b(2) - b(0) - b(1))x^{n-1} + (b(3) - b(0) - b(1) - b(2))x^{n-2} + \ldots + (b(n) - b(0) - b(1) - b(2) - \ldots - b(n-1))x$$

$$= b(0)x^{n+1} + \sum_{i=1}^{n}\left(b(i) - \sum_{j=0}^{i-1} b(j) \right)x^{n+1-i} \qquad (9)$$

** $b(0)=b(1)=b(2)=b(3)=\ldots=b(n)=1$

$$h2(x) = x^{n+1} - (a(0) - 1)x^{n} - (a(0) + a(1) - 1)x^{n-1} - (a(0) + a(1) + a(2) - 1))x^{n-2} - \ldots - (a(0) + a(1) + a(2) + \ldots + a(n-1) - 1)x$$

$$= x^{n+1} - \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i-1} a(j) - 1 \right)x^{n+1-i} \qquad (10)$$

Zu bearbeitende Probleme:

136.1

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten von Gl. (2.1) in Abhängigkeit von $\vec{b}$ und a $\downarrow$ und damit den Gültigkeitsbereich der Verbundgleichungen (1) und (2).

136.2
Untersuchen Sie den Verlauf von g(x)
Gl. (2.1) im Konvergenzbereich in
Abhängigkeit von $\vec{b}$ und a ↓
136.3
Finden Sie einen möglichst einfachen heuristischen Weg, aus einem genügend großen numerischen Material (vgl. Unit 15, part 37) die Verbundgleichungen (1) und (2) zu „destillieren“ oder durch ein Gegenbeispiel zu falsifizieren.
136.4
Beweisen Sie im positiven Falle die Vgln (1,2) durch vollständige Induktion.
136.5
Finden Sie andere „semantische Belegungen“ für das „**determinant pattern**“ in Gl. (2.4).
136.6
Versuchen Sie Gl. (2.4.1) zu einer Determinante zu komprimieren (vgl. Unit 20).
Lösungshinweis:

$$g(x) = \frac{b(0)x^2 - \begin{vmatrix} b(0) & b(1) \\ 1 & a(0) \end{vmatrix} x}{x^2 - a(0)x - a(1)} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & b(0) & b(1) \\ x & 0 & 1 \\ x^2 & 1 & a(0) \end{vmatrix}}{x^2 - a(0)x - a(1)}$$

(5)

136.7

Diskutieren Sie:
Gln (1,2) zur mathematischen Beschreibung von Strukturen und Prozessen in Science und Engineering.

(2.4)-similar determinant patterns

Go to Unit 6
19
20
42
61
63
100

Reference:

** Go to Unit 15, part 36
** G. Loria, Spezielle Algebraische und Transscendente Ebene Kurven: Theorie und Geschichte.

Forgotten Books 2016
ISBN 978-1334633171
** http://mathworld.wolfram.com/GeneratingFunction.html
** https://en.wikipedia.org/wiki/Generating_function
** D.E. Knuth, R.L. Graham. Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science.
Addison Wesley Pub Co Inc 1994
ISBN 978-0201558029

17.02.2017 EPSinv, DScalc.