Unit 135, part 3, appendix 1

Aus der Schülerinformatik vor 20 Jahren [27]

Baustein 3 „Turings Weinberg“

„In unserem Weinberg liegt ein Schatz, grabt nur danach!“ – „An welchem Platz?“
...
„Grabt nur!“ ...

Gottfried August Bürger

1 Vorbereitung

Wir betrachten ein abstraktes (mathematisches) Modell eines informationsverarbeitenden Systems vom Typ „erweiterte Turingmaschine“.
Während die ursprüngliche Form der Turingmaschine der mathematischen Präzisierung des Algorithmusbegriffes dient („Ein Algorithmus ist eine Turingmaschine.“), lassen sich problemangepaßte Erweiterungsformen (mehrere Wertebänder, mehrere Köpfe, zweidimensionales Werteband,..), obwohl sie bezüglich der Präzisierung des Algorithmusbegriffes keine höhere Qualität erbringen, mit beträchtlichem Gewinn

- als Denkmodell und Werkzeug zur Konstruktion effizienter Algorithmen
- und als Notierungssystem für Algorithmen

benutzen.
Diesen praktischen Nutzen sollen Sie im folgenden (als Grundlage für eigenes „Graben“) an einem Beispiel ausloten.

2 Eine erweiterte Turingmaschine

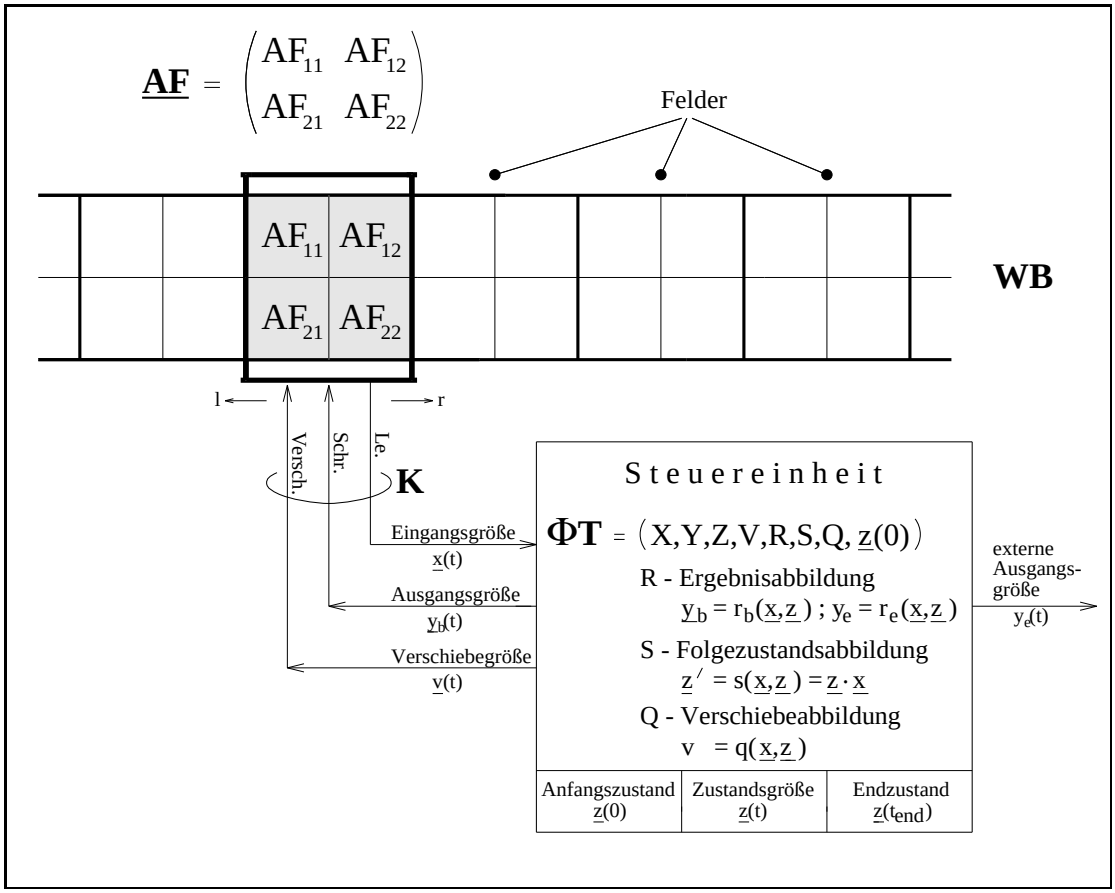


Bild 1: Erweiterte Turingmaschine **eTM2**

Die hier betrachtete erweiterte Turingmaschine **eTM2** (Bild 1) besitzt

- ein beidseitig unendlich ausgedehntes zweispuriges Werteband **WB**, dessen Felder in je 4 Teilfelder unterteilt sind,
- einen entsprechend in 4 Teilköpfe unterteilten Lese-Schreib-Kopf **K**, der in jedem Taktzeitpunkt auf dem feststehenden WB in bezug auf das jeweilige Arbeitsfeld **AF** auch um mehrere Felder nach links (l^a, $a \in \mathbb{N}$) bzw. rechts (r^b, $b \in \mathbb{N}$) verschoben werden kann
- und eine Steuereinheit $\Phi\mathbf{T}$, die neben dem WB–Ausgang auch mit einem externen Ausgang versehen ist.

Eingangs-, WB-Ausgangs- und Zustandsvariable von ΦT sind 2×2 Matrizen über $\mathbb{R}$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} , \tag{1}$$

$$\underline{y}_b = \begin{pmatrix} y_{b11} & y_{b12} \\ y_{b21} & y_{b22} \end{pmatrix} , \tag{2}$$

$$\underline{y}_e = \begin{pmatrix} y_{e11} & y_{e12} \\ y_{e21} & y_{e22} \end{pmatrix} , \tag{3}$$

$$\underline{z} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} , \tag{4}$$

die externe Ausgangsvariable ist der Mediant [25] von

$$\underline{y}_e = \begin{pmatrix} y_{e11} & y_{e12} \\ y_{e21} & y_{e22} \end{pmatrix} \tag{3}$$

oder von

$$\underline{y}_e \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{e12} \\ y_{e22} \end{pmatrix} \tag{5}$$

über $(\mathbb{R}; +, \cdot)$, d.h. es gilt

$$y_e = \left\langle \begin{array}{lcl} m(\underline{y}_e) & = & \dfrac{y_{e21} + y_{e22}}{y_{e11} + y_{e12}} \\ \\ m(\underline{y}_e \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) & = & \dfrac{y_{e22}}{y_{e12}} \end{array} \right. . \tag{6}$$

Für die Verschiebung von K auf dem feststehenden WB in bezug auf AF gilt

$$v = \begin{cases} l^a & - \text{ Verschiebung um } a \text{ Felder nach links; } a \in \mathbb{N} \\ r^b & - \text{ Verschiebung um } b \text{ Felder nach rechts; } b \in \mathbb{N} \\ 0 & - \text{ keine Verschiebung} \end{cases} . \tag{7}$$

Ergebnisabbildung R und Folgezustandsabbildung S von ΦT lauten in Matrizennotation über $(\mathbb{R}; +, \cdot)$

$$R: \ \underline{y}_b = r_b(\underline{x}, \underline{z}) = \left\langle \begin{array}{ll} \underline{x} & - \text{ Nur-Lese-Betrieb} \\ \\ \underline{y}_e & - \text{ Lese-Schreib-Betrieb} \end{array} \right. \tag{8}$$

$$\underline{y}_e = \underline{z}\,\underline{x} \qquad - \text{ inneres Matrizenprodukt} \tag{9}$$

$$y_e = r_e(\underline{x}, \underline{z}) = \left\langle \begin{array}{ll} m(\underline{y}_e) & - \text{ Mediant der Spalten 1 und 2 von } \underline{y}_e \\ \\ m(\underline{y}_e \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) & - \text{ Mediant der Spalte 2 von } \underline{y}_e \end{array} \right. \tag{10}$$

$$S: \ \underline{z}' = s(\underline{x}, \underline{z}) = \underline{z}\,\underline{x} \, . \tag{11}$$

eTM2 arbeitet

- determiniert (R, S und Q sind eindeutige Abbildungen) und
- getaktet, d.h. nur in den diskreten Taktzeitpunkten

$$t \in \mathbb{N}(0, t_{end}) \; . \tag{12}$$

eTM2 stoppt in dem Taktzeitpunkt t_{end}, für den erstmalig die outputabhängige Haltbedingung B erfüllt ist:

$$t_{end} = \mu t \, [b(y_e(t-1), y_e(t)) = 1] \tag{13}$$

$$b(y_e(t-1), y_e(t)) = \; '' \, abs(y_e(t-1) - y_e(t)) < \varepsilon \, '' \tag{14}$$

$$v(t_{end}) = 0 \; . \tag{15}$$

In τ (fester, aber beliebiger Taktzeitpunkt)

- befindet sich K auf $\underline{\text{AF}}(\tau)$, K liest $\underline{x}(\tau) = < \underline{\text{AF}}(\tau) >$,
- werden in ΦT aus
  - dem Eingangswert $x(\tau)$ und
  - dem im Intervall $(\tau - 1, \tau]$ gespeicherten "alten" Zustandswert $z(\tau)$

  die Ausgangswerte $\underline{y_b}(\tau)$ und $y_e(\tau)$, der "neue" Zustandswert $z(\tau + 1)$ und der Verschiebewert $v(\tau)$ gebildet,
- schreibt K $\underline{y_b}(\tau)$ auf $\underline{\text{AF}}(\tau)$ (Überschreiben von $\underline{x}(\tau)$ mit $\underline{y_b}(\tau)$),
- wird in ΦT $z(\tau)$ mit $z(\tau + 1)$ überschrieben; $z(\tau + 1)$ bleibt im Intervall $(\tau, \tau + 1]$ in ΦT gespeichert,
- wird K um $v(\tau)$ auf das neue Arbeitsfeld $\underline{\text{AF}}(\tau + 1)$ verschoben; K verbleibt bis zum Taktzeitpunkt $\tau + 1$ auf $\underline{\text{AF}}(\tau + 1)$.

3 Experimente mit eTM2

3.1 Experiment 1

Anfangsbandinschrift:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	···
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	···

K bei t=0

Verhaltensweise von ΦT:

$$\underline{y_b} = \underline{x} \tag{16}$$

$$\underline{y_e} = \underline{z}\,\underline{x} \tag{9}$$

$$y_e = m(\underline{y_e}) \tag{10}$$

$$z' = \underline{z}\,\underline{x}$$

$$v = \begin{cases} r & b = 0 \\ \text{für} & \\ 0 & b = 1 \end{cases} \tag{17}$$

Initialisierung von ΦT:

$$\underline{z}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Haltbedingung:

$$b(y_e(t-1), y_e(t)) = \text{ }''\, abs(y_e(t-1) - y_e(t)) < \varepsilon\,'' \tag{14}$$

$$t_{end} = \mu t\,[b(y_e(t-1), y_e(t)) = 1] \tag{13}$$

$$v(t_{end}) = 0 \tag{15}$$

Automatenband:

siehe S. 6

Ergebnis:

$y_e(t_{end}) = 2,718281828459..$,

d.h. eTM2,4.3.1 realisiert einen schnellen Algorithmus zur Berechnung von e !

Automatenband:

t	0	1	2	3	4	5	$t_{end} = 6$
$\underline{x}(t) =$ $\underline{y}_b(t)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 & 13 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}$
$z(t)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 32 & 39 \\ 87 & 106 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 465 & 536 \\ 1264 & 1457 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8544 & 9545 \\ 23225 & 25946 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 190435 & 208524 \\ 517656 & 566827 \end{pmatrix}$
$\underline{y}_e(t)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 32 & 39 \\ 87 & 106 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 465 & 536 \\ 1264 & 1457 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8544 & 9545 \\ 23225 & 25946 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 190435 & 208524 \\ 517656 & 566827 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5204556 & 5603515 \\ 14147450 & 15231933 \end{pmatrix}$
$y_e(t)$	$3/1 =$ $3,0$	$19/7 =$ $2,714285714286$	$193/71 =$ $2,718309859155$	$2721/1001 =$ $2,718281718282$	$49171/18089 =$ $2,718281828736$	$1084483/398959 =$ $2,718281828459$	$29379383/10808071 =$ $2,718281828459$

Aufgabe 1

(a) Berechnen und Interpretieren Sie den Verlauf

- des Differenzenquotienten von $y_e(t)$

$$dy_e(t) = \frac{y_e(t) - y_e(t+1)}{y_e(t+1) - y_e(t+2)} \tag{19}$$

- sowie des Medianten der Transponierten von $\underline{y}_e(t)$

$$y_{ee}(t) = m(\underline{y}_e^T) \; . \tag{20}$$

(b) Vergleichen Sie eTM2,4.3.1 mit anderen Algorithmen zur Berechnung von e.

Lösung:

eTM2,4.3.1 mit der veränderten Anfangsbandinschrift:

	$2 \cdot 1 - \frac{1}{2}$	$3 \cdot 1 - \frac{2}{2}$	$6 \cdot 5 - \frac{1}{2}$	$7 \cdot 5 - \frac{2}{2}$	$10 \cdot 9 - \frac{1}{2}$	$11 \cdot 9 - \frac{2}{2}$	$14 \cdot 14 - \frac{1}{2}$	$15 \cdot 14 - \frac{2}{2}$	···
	$2 \cdot 2 - \frac{0}{2}$	$3 \cdot 2 - \frac{1}{2}$	$6 \cdot 6 - \frac{0}{2}$	$7 \cdot 6 - \frac{1}{2}$	$10 \cdot 10 - \frac{0}{2}$	$11 \cdot 10 - \frac{2}{2}$	$14 \cdot 14 - \frac{0}{2}$	$15 \cdot 14 - \frac{1}{2}$	···

Ergebnis:

$\lim_{t \to \infty} y_e(t) = e \, .$

Aufgabe 2

Berechnen und Interpretieren Sie $y_e(t_{end})$ der eTM2, 4.3.1 für die veränderten Anfangsbandinschriften:

(a)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	···
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...

(b)

	1	2	3	4	5	6	7	8	8	10	11	12	13	14	···
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...

(c)

	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	···
	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	...

(d)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	···
	1	2	3	4	**0**	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...

'' Bandfehler '' **!**

:

3.2 Experiment 2

Anfangsbandinschrift:

	n-1	n	n+1	n+2	n+3	n+4	n+5	n+6	n+7	n+8	···
	n	n+1	n+2	n+3	n+3	n+5	n+6	n+7	n+8	n+7	···

$n \in \mathbb{N}$

Verhaltensweise von ΦT:

R und S wie bei Experiment 1

$$v = \begin{cases} r^n & b = 0 \\ \text{für} & \\ 0 & b = 1 \end{cases} \tag{21}$$

Initialisierung von ΦT:

wie bei Experiment 1

Haltbedingung:

wie bei Experiment 1

Ergebnis:

$\lim_{t\to\infty} y_e(t) = \sqrt[n]{e}\ ;\ n \in \mathbb{N}\,.$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie experimentell den Verlauf von t_{end} in Abhängigkeit von n und ε.

3.3 Experiment 3

Anfangsbandinschrift:

	1-x	1	3-x	3	5-x	5	7-x	7	9-x	9	···
	1	1+x	3	3+x	5	5+x	7	7+x	9	9+x	···

Verhaltensweise von ΦT:

R und S wie bei Experiment 1

Initialisierung von ΦT:

wie bei Experiment 1

Haltbedingung:

wie bei Experiment 1

Ergebnis:

$\lim_{t\to\infty} y_e(t) = e^x \; ; \; x \in \mathbb{R}\,.$

Aufgabe 4

(a) Bestimmen Sie experimentell den Verlauf von t_{end} in Abhängigkeit von x und ε.

(b) Vergleichen Sie eTM2,4.3.3 mit anderen Algorithmen zur Berechnung von e^x.

Lösung a:

eTM2,4.3.1 mit der veränderten Anfangsbandinschrift:

	$1 \cdot (3\text{-}x) + \frac{1}{2}x(x\text{-}2)$	$1 \cdot 3\text{-}x$	$5 \cdot (7\text{-}x) + \frac{1}{2}x(x\text{-}2)$	$5 \cdot 7\text{-}x$	$9 \cdot (11\text{-}x) + \frac{1}{2}x(x\text{-}2)$	$9 \cdot 11\text{-}x$	$13 \cdot (15\text{-}x) + \frac{1}{2}x(x\text{-}2)$	$13 \cdot 15\text{-}x$	···
	$1 \cdot 3+x$	$(1+x) \cdot 3 + \frac{1}{2}x(x\text{-}2)$	$5 \cdot 7+x$	$(5+x) \cdot 7 + \frac{1}{2}x(x\text{-}2)$	$9 \cdot 11+x$	$(9+x) \cdot 11 + \frac{1}{2}x(x\text{-}2)$	$13 \cdot 15+x$	$(13+x) \cdot 15 + \frac{1}{2}x(x\text{-}2)$	...

Ergebnis:

$\lim_{t\to\infty} y_e(t) = e^x \; ; \; x \in \mathbb{R}\,.$

Spezialfall: $x = 2$

eTM2,4.3.1 mit der veränderten Anfangsbandinschrift:

	1·1	3·1-2	5·5	7·5-2	9·9	11· 9-2	13·13	15·13-2	···
	1·3+2	3·3	5·7+2	7·7	9·11+2	11· 11	13·15+2	15·15	···

Ergebnis:

$\lim_{t\to\infty} y_e(t) = e^2 = 7,389056098931..$ (Automatenband siehe S. 11)

Lösung b:

eTM2,4.3.1 mit der veränderten Anfangsbandinschrift:

	1	1-x	x^2	$5x^2$	x^2	$9x^2$	x^2	$13x^2$	···
	1	1+x	3	$3\cdot5+x^2$	7	$7\cdot9+x^2$	11	$11\cdot13+x^2$	···

Ergebnis:

$\lim_{t\to\infty} y_e(t) = e^{2x}$.

Spezialfall: $x = 1$

eTM2, 4.3.1 mit der Anfangsbandinschrift:

	1	0	1	5	1	9	1	13	···
	1	2	3	4^2	7	8^2	11	12^2	···

Ergebnis:

$\lim_{t\to\infty} y_e(t) = e^2$.

(c) Untersuchen Sie Möglichkeiten zur Konvergenzverbesserung von eTM2,4.3.3.

Automatenband:

t	0	1	2	3	4
$\underline{x}(t) =$ $\underline{y}_b(t)$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 25 & 33 \\ 37 & 49 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 81 & 97 \\ 101 & 121 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 169 & 193 \\ 197 & 225 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 289 & 321 \\ 325 & 361 \end{pmatrix}$
$z(t)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 62 & 82 \\ 458 & 606 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 13304 & 15936 \\ 98304 & 117752 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5387768 & 6153272 \\ 39810520 & 45466872 \end{pmatrix}$
$y_e(t)$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 62 & 82 \\ 458 & 606 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 13304 & 15936 \\ 98304 & 117752 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5387768 & 6153272 \\ 39810520 & 45466872 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3556878352 & 3950804720 \\ 26281973680 & 29192717712 \end{pmatrix}$
$y_e(t)$	$14/2 =$ $7,0$	$1064/144 =$ $7,3\overline{8}$	$216056/29240 =$ $7,389056087551$	$85277392/11541040 =$ $7,38905609893$	$55474691392/7507683072 =$ $7,389056098931$

Aufgabe 5

(a) Zeigen Sie experimentell und beweisen Sie, daß

eTM2,4.3.3 mit der Initialisierung $z(0) = ..$	die Funktion $f(x) = ..$ berechnet.
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	e^x
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	e^{-x}
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\tanh\frac{x}{2}$
$\vdots$	$\vdots$

(b) Wie ist eTM2,4.3.3 zur Berechnung von

- $\tanh x$ und $\tan x$
- $\operatorname{artanh} x$ und $\arctan x$
- $\sinh x$ und $\cosh x$
- $\sin x$ und $\cos x$
- $\ln x$

zu modifizieren ?

Lösungen:

Anfangsbandinschrift:

	1	1	$\pm x^2$	$\pm \mathbf{5} x^2$	$\pm x^2$	$\pm \mathbf{9} x^2$	$\pm x^2$	$\pm \mathbf{13} x^2$	$\pm x^2$	$\pm \mathbf{17} x^2$	...
	0	x	**3**	$3 \cdot 5 \pm x^2$	**7**	$7 \cdot 9 \pm x^2$	**11**	$11 \cdot 13 \pm x^2$	**15**	$15 \cdot 17 \pm x^2$	...

Ergebnis:

$$\lim_{t\to\infty} y_e(t) = \left\langle \begin{array}{l} \tanh x \\ \\ \tan x \end{array} \right. .$$

Anfangsbandinschrift:

	1	1	$\pm(1x)^2$	$\pm\mathbf{5}(1x)^2$	$\pm(3x)^2$	$\pm\mathbf{9}(3x)^2$	$\pm(5x)^2$	$\pm\mathbf{13}(5x)^2$	$\pm(7x)^2$	$\pm\mathbf{17}(7x)^2$	···
	0	x	**3**	$3\cdot5\pm(2x)^2$	**7**	$7\cdot9\pm(4x)^2$	**11**	$11\cdot13$ $\pm(6x)^2$	**15**	$15\cdot17$ $\pm(8x)^2$	···

Ergebnis:

$$\lim_{t\to\infty} y_e(t) = \left\langle \begin{array}{l} \arctan x \\ \\ \operatorname{artanh} x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x} \end{array} \right. .$$

Spezialfall: $x = 1$

Für $x = 1$ erhält man nach geringfügiger Umformung die Anfangsbandinschriften für tanh1 und arctan1:

	1	1	1	5	1	9	1	13	1	17	···
	0	1	3	4^2	7	8^2	11	12^2	15	16^2	···

Ergebnis:

$$\lim_{t\to\infty} y_e(t) = \tanh 1 = \frac{e^2-1}{e^2+1} = 0,7615941559558...$$

	1	1	1^2	$5\cdot1^2$	3^2	$9\cdot3^2$	5^2	$13\cdot5^2$	7^2	$17\cdot7^2$	···
	0	1	3	$5\cdot2^2$-1	7	$5\cdot4^2$-1	11	$5\cdot6^2$-1	15	$5\cdot8^2$-1	···

Ergebnis:

$$\lim_{t\to\infty} y_e(t) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} = 0,7853981633974...$$

Anfangsbandinschrift:

	1	1	1^2x	1^2x(3-2x)	3^2x	3^2x(5-4x)	5^2x	5^2x(7-6x)	7^2x	7^2x(9-8x)	···
	0	x	2-x	3·2-1x(3-2x)	4-3x	5·4-3x(5-4x)	6-5x	7·6-5x(7-6x)	8-7x	9·8-7x(9-8x)	···

Ergebnis:

$$\lim_{t\to\infty} y_e(t) = \ln(1+x)\ ;\ -1 < x \leq 1$$

Spezialfall: $x = 1$

Für $x = 1$ erhält man nach geringfügiger Umformung die Anfangsbandinschrift für ln2:

	1	1	1^2	1^2	3^2	3^2	5^2	5^2	7^2	7^2	...
	0	1	1	2^2+1	1	4^2+1	1	6^2+1	1	8^2+1	...

Ergebnis:

$$\lim_{t\to\infty} y_e(t) = \ln 2\,.$$

Anfangsbandinschrift:

	1	1	$-\frac{x^2}{3}$	$-\left(\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}\right)$	$-\frac{x^2}{7}$	$-\left(\frac{x^2}{7}+\frac{x^4}{9}\right)$	$-\frac{x^2}{11}$	$-\left(\frac{x^2}{11}+\frac{x^4}{13}\right)$	$-\frac{x^2}{15}$	$-\left(\frac{x^2}{15}+\frac{x^4}{17}\right)$	...
	0	x	$\frac{1}{1}+\frac{x^2}{3}$	$\frac{1}{1}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}$	$\frac{1}{5}+\frac{x^2}{7}$	$\frac{1}{5}+\frac{x^2}{7}+\frac{x^4}{9}$	$\frac{1}{9}+\frac{x^2}{11}$	$\frac{1}{9}+\frac{x^2}{11}+\frac{x^4}{13}$	$\frac{1}{13}+\frac{x^2}{15}$	$\frac{1}{13}+\frac{x^2}{15}+\frac{x^4}{17}$	...

Ergebnis:

$$\lim_{t\to\infty} y_e(t) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\ ;\ -1 < x < 1\,.$$

Spezialfälle:

$$x = \frac{1}{3} \longrightarrow \lim_{t\to\infty} y_e(t) = \frac{1}{2}\ln 2\,,$$

$$x = \frac{1}{2} \longrightarrow \lim_{t\to\infty} y_e(t) = \frac{1}{2}\ln 3\,.$$

3.4 Experiment 4

Anfangsbandinschrift:

	0	1	b	2ab	b	2ab	b	2ab	b	2ab	...
	1	a	2a	$(2a)^2+b$	2a	$(2a)^2+b$	2a	$(2a)^2+b$	2a	$(2a)^2+b$	...

Verhaltensweise von ΦT:
wie bei Experiment 1

Initialisierung von ΦT:
wie bei Experiment 1

Haltbedingung:
wie bei Experiment 1

Ergebnis:

$\lim_{t\to\infty} y_e(t) = \sqrt{a^2+b}\,;\ a,b \in \mathbb{N}\,.$

Aufgabe 6

Die Anfangsbandinschrift von eTM2,4.3.4 lautet	zur Berechnung von $\sqrt{p}$, $\lim_{t\to\infty} y_e(t) = \sqrt{p}$ p – Primzahl
0 1 1 2 ... 1 1 2 5 ...	2
0 1 1 2 ... 1 1 1 3 ...	3
0 1 1 4 ... 1 2 4 17 ...	5
0 1 3 12 ... 1 2 4 19 ...	7
0 1 1 6 ... 1 3 3 19 ...	11
0 1 2 12 ... 1 3 3 20 ...	13

Bestimmen Sie experimentell den Verlauf von t_{end} in Abhängigkeit von p und ε.

Aufgabe 7

Untersuchen Sie Möglichkeiten zur Konvergenzverbesserung von eTM2,4.3.4 .

3.5 Experiment 5

Anfangsbandinschrift:

	1	1	q	pq	q	pq	q	pq	q	pq	···
	0	p	p	p^2+q	p	p^2+q	p	p^2+q	p	p^2+q	···

Verhaltensweise von ΦT:

wie bei Experiment 1

Initialisierung von ΦT:

wie bei Experiment 1

Haltbedingung:

wie bei Experiment 1

Ergebnis:

$\lim_{t\to\infty} y_e(t) = x_{bmax}$.

x_{bmax} – betragsmäßig größte Wurzel der quadratischen Gleichung
$x^2 - px - q = 0$; $p, q \in \mathbb{R}$; $\frac{p^2}{4} + q > 0$

Aufgabe 8

(a) Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten von eTM2,4.3.5 wie in Baustein 2, Aufgabe (a) gefordert.

(b) Untersuchen Sie Möglichkeiten zur Konvergenzverbesserung von eTM2,4.3.5 .

(c) Zeigen Sie experimentell und analytisch, daß eTM2,4.3.5 mit der veränderten Anfangsbandinschrift

	1	1	q	pq	q	pq	q	pq	q	pq	···
	x(0)	x(1)	p	p^2+q	p	p^2+q	p	p^2+q	p	p^2+q	···

die normierte stationäre Lösung der linearen Differenzengleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$x(t+2) - p\,x(t+1) - q\,x(t) = 0$; $p, q \in \mathbb{R}_+$

mit den Anfangswerten $x(0)$ und $x(1)$ liefert:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} y_e(t) &= \lim_{t\to\infty} \frac{x(t)}{x(t)}_{|x(0)=x(1)=1} \\ &= \frac{x(1) - x(0)\cdot\left(\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4}+q}\right)}{1-\left(\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4}+q}\right)}\,.\end{aligned}$$

Spezialfälle:

$$\begin{aligned} p=q=1 \quad &\longrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} y_e(t) = \tau x(1) + \tau^2 x(0) \\ &\qquad\quad \tau = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \\ p+q=1 \quad &\longrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} y_e(t) = \frac{x(1)+qx(0)}{1+q} \\ p=q=\frac{1}{2} \quad &\longrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} y_e(t) = \frac{2}{3}x(1) + \frac{1}{3}x(0)\,. \end{aligned}$$

3.6 Experiment 6

$g(x)$ sei eine formelmäßig gegebene, beliebig oft differenzierbare reelle Funktion. Die Gleichung

$$g(x) = a\ ,\ a \in \mathbb{R} \tag{22}$$

besitze reelle Lösungen, eine davon sei $\overline{x}$.
$\overline{x}$ soll iterativ mittels eines möglichst gut konvergierenden Verfahrens mit gegebener Genauigkeit ε berechnet werden.

Lösung: mittels eTM2

- Die Funktion

  $$f(x) = g(x) - a \tag{23}$$

  hat dann für $\overline{x}$ eine Nullstelle.

- Bilde die normierten Ableitungen

  $$n_i(x) = \frac{1}{i}\frac{f^{(i)}(x)}{f^{(i-1)}(x)}\ ;\ i = 1,2,3\,. \tag{24}$$

- Wähle einen geeigneten Startwert x_0 (0–ter Näherungswert für $\overline{x}$).

Regel	Bedingung	Aktion	VA
1		$x := x_0$	
2		Berechne $n_i(x)$; $i = 1, 2, 3$	
3		Berechne die Unterdeterminanten a(x), b(x) und c(x) von c(x) b(x) a(x) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & n_2(x) & n_1(x) \\ n_1(x) & n_2(x) & n_3(x) \end{vmatrix}$	
4		Berechne mittels eTM2,4.3.1 für die Anfangsbandinschrift 0 1 a(x) -b(x) a(x) -b(x) a(x) -b(x) ... 1 x -b(x) c(x) -b(x) c(x) -b(x) c(x) ... bei gegebener Genauigkeit $\varepsilon_{\mathrm{TM}}$ $y_e(t_{end})$	
5	$f(y_e(t_{end})) > \varepsilon$	$x := y_e(t_{end})$	goto r2
6		$\overline{x} := y_e(t_{end})$	stop

(A1)

Aufgabe 9

Testen Sie das beschriebene Verfahren anhand möglichst vieler charakteristischer Beispiele auf seine Leistungsfähigkeit.

B e i s p i e l

Gegeben:

$g(x) = x\ln x$
$a = 4,3$

Gesucht:

$\overline{x}$

Lösung:

- $f(x) = x\ln x - 4,3$
  $f'(x) = 1 + \ln x$
  $f''(x) = x^{-1}$
  $f'''(x) = -x^{-2}$

- $n_1(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1+\ln x}{x\ln x - 4,3}$

  $n_2(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{f''(x)}{f'(x)} = \dfrac{1}{2x(1+\ln x)}$

  $n_3(x) = \dfrac{1}{3}\dfrac{f'''(x)}{f''(x)} = -\dfrac{1}{3x}$

- Plausibler Startwert $x_0 = a = 4,3$

- $n_1(x_0) = 1,2467339865$
  $n_2(x_0) = 0,0472945413$
  $n_3(x_0) = -0,0775193798$

- $a(x_0) = 1,0$
  $b(x_0) = 1,1994394452$
  $c(x_0) = 1,4327519655$

- **Automatenband:** $(x_0) \longrightarrow x_1$

t	0	1	2	3
$\underline{x}(t) =$ $\underline{y_b}(t)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4,3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1,1994394452 \\ -1,1994394452 & 1,4327519699 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1,1994394452 \\ -1,1994394452 & 1,4327519699 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1,1994394452 \\ -1,1994394452 & 1,4327519699 \end{pmatrix}$
$z(t)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4,3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1,1994394452 & 1,4327519655 \\ -4,1575896144 & 4,9613940064 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2,9179386678 & 3,4914331773 \\ -10,1084812889 & 12,0952239948 \end{pmatrix}$
$y_e(t)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4,3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1,1994394452 & 1,4327519655 \\ -4,1575896144 & 4,9613940064 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2,9179386678 & 3,4914331773 \\ -10,1084812889 & 12,0952239948 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -7,1057013410 & 8,5022484841 \\ -24,6159700467 & 29,4539671406 \end{pmatrix}$
$y_e(t)$	$5,3/1 =$ $5,3$	$0,8038043921/0,2333125203 =$ $3,4451832881$	$1,9867427059/0,5734945095 =$ $\underline{3,4642}750242$	$4,8379970939/1,3965471431 =$ $\underline{3,4642}561977$

- Abbruch der Berechnung von $y_e(t_{end})$ mittels (A1),r4 bei einer erreichten Genauigkeit von 4 Nachkommastellen

  $\longrightarrow \quad t_{end} \quad = \quad 3$

  $\longrightarrow \quad y_e(t_{end}) \quad = \quad 3,4642$

- $f(y_e(t_{end})) = 0,0042051944$

  $\longrightarrow \qquad x_1 = 3,4642$

- $n_1(x_1) = 533,2647043861$
  $n_2(x_1) = \quad 0,0643632750$
  $n_3(x_1) = -0,0962223120$

- $a(x_1) = \quad 1,0$
  $b(x_1) = \quad 533,2003411111$
  $c(x_1) = 284302,5934251900$

- **Automatenband:** $(x_1) \longrightarrow x_2$

t	0	1	2
$\underline{x}(t) =$ $\underline{y_b}(t)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3,4642 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -533,2003411111 \\ -533,2003411111 & 284302,5934251900 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -533,2003411111 \\ -533,2003411111 & 284302,5934251900 \end{pmatrix}$
$z(t)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3,4642 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -533,2003411111 & 284302,5934251900 \\ -1846,1126216771 & 984347,8438024322 \end{pmatrix}$
$y_e(t)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3,4642 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -533,2003411111 & 284302,5934251900 \\ -1846,1126216771 & 984347,8438024322 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -151590772,9934228063 & 80828248930,8926544189 \\ -524856452,2000542879 & 279853629173,4049072266 \end{pmatrix}$
$y_e(t)$	$4,4642/1 =$ $4,4642$	$982501,7311807551/283769,3930840789 =$ $\underline{3,4623245323}$	$279328772721,2048339844/80676658157,8992309570 =$ $\underline{3,4623245323}$

- Abbruch der Berechnung von $y_e(t_{end})$ mittels (A1),r4 bei einer erreichten Genauigkeit von 10 Nachkommastellen

  $\longrightarrow \; t_{end} \;\; = \;\; 2$

  $\longrightarrow \; y_e(t_{end}) \; = \; 3,4623245323$

- $f(y_e(t_{end})) = 0,0000000001 \longrightarrow$ stop

  $\longrightarrow \; \underline{\underline{\overline{x} = 3,4623245323}}$

- Begründen Sie das beschriebene Verfahren,
- leiten Sie in Zusammenhang damit den Algorithmus (A1) her,
- formulieren Sie Konvergenzbedingungen für (A1) und
- untersuchen Sie in Analogie zu Baustein 2, Abschnitt 3.2 die Konvergenzdynamik von (A1);
- Literatur [17,18].

4 Ad astra

4.1 Dekodierung $\longrightarrow$ Kodierung

Die Experimente 1 bis 6 haben Ihnen gezeigt, daß die erweiterte Turingmaschine eTM2 eine durchaus beachtliche Leistungsfähigkeit

- bei der Berechnung der Zahlenwerte mathematischer Konstanten
- bei der Berechnung der Funktionswerte einstelliger reeller Funktionen sowie
- bei der iterativen Lösung von Gleichungen mit einer Unbekannten

besitzt.

Die zugehörigen Berechnungsvorgänge von $\lim\limits_{t\to\infty} y_e(t)$ können auch als Dekodierung der Anfangsbandinschrift von eTM2 aufgefaßt werden. Diese Dekodierung ist eindeutig, der Dekodierungsalgorithmus ist durch die Verhaltensweise (R, S, Q) und den Anfangszustand $\underline{z}(0)$ von ΦT gegeben.

Aus dieser Sicht entsteht natürlich sofort die Frage nach der Umkehrbarkeit und der Umkehrung der Dekodierung:

Gegeben: – eTM2
– $\lim\limits_{t\to\infty} y_e(t)$
Gesucht: zugehörige Anfangsbandinschrift.

Wie die Experimente 1 und 3 zeigen, ist dieses "Kodierungsproblem" i.a. nicht eindeutig lösbar, so gibt es z.B. zur Berechnung von e mehrere voneinander verschiedene Anfangsbandinschriften.

Aufgabe 10

(a) Analysieren Sie detailliert die ja bisher nur experimentell nachvollzogene Arbeitsweise von eTM2 (Dekodierung der Anfangsbandinschrift).

(b) Generieren Sie auf der Basis des so gewonnenen vollen Verständnisses der Arbeitsweise von eTM2 einen möglichst einfachen und evidenten Kodierungsalgorithmus (A2) und testen Sie ihn anhand des vorliegenden experimentellen Materials.

(c) Bestimmen Sie mittels (A2) möglichst einfache und systematisch aufgebaute Anfangsbandinschriften ($\widehat{=}$ Kodewörter) für die

- Berechnung von $\sqrt[3]{2}$,
- Berechnung der Feigenbaumkonstanten
  $\delta = 4,669201609102990671853 2..$ [19,20,21,22],

($\widehat{=}$ Entwicklung einer reellen Zahl in eine Anfangsbandinschrift von eTM2)

- iterative Lösung der Gleichung

  $x^n + x^{n-1} - 1 = 0 \; ; \; n = 2, 3, .. \; .$

(d) Implementieren Sie den Euklidischen Algorithmus zur Berechnung von ggT(a,b) und zur Lösung der linearen diophantischen Gleichung mit zwei Unbekannten (vgl. [23,24,25,26]) auf eTM2 mit Lese-Schreib-Betrieb (Gleichung (8)).

4.2 Zweispuriges Werteband $\longrightarrow$ dreispuriges Werteband

Mit dem bis hierher erreichten Erkenntnisstand über Arbeitsweise, Handhabung, Anwendungsspektrum und Leistungsfähigkeit von eTM2 liegt es nahe, über eine erweiterte Turingmaschine mit dreispurigem (allgemeiner: n-spurigem) Werteband, eTM3 (Bild 2), nachzudenken:

- Wie ist die Verhaltensweise von ΦT zu erweitern, z.B.
  - $\underline{x}$, $\underline{y}_b$, $\underline{y}_e$, $\underline{z}$ sind 3×3 –Matrizen
  - $\underline{y}_b = \underline{x}$ bzw. $\underline{y}_e$
  - $\underline{y}_e = \underline{z}\,\underline{x}$
  - $y_e = m(\underline{y}_e) = ?$
  - $\underline{z}' = \underline{z}\,\underline{x}$,
- damit sich bei den betrachteten Anwendungen die Leistungsfähigkeit von eTM3 gegenüber eTM2 wesentlich erhöht?
- Lassen sich mit eTM3 neue Anwendungsfelder erschließen?

Experimentieren Sie unter diesen Gesichtspunkten mit eTM3!

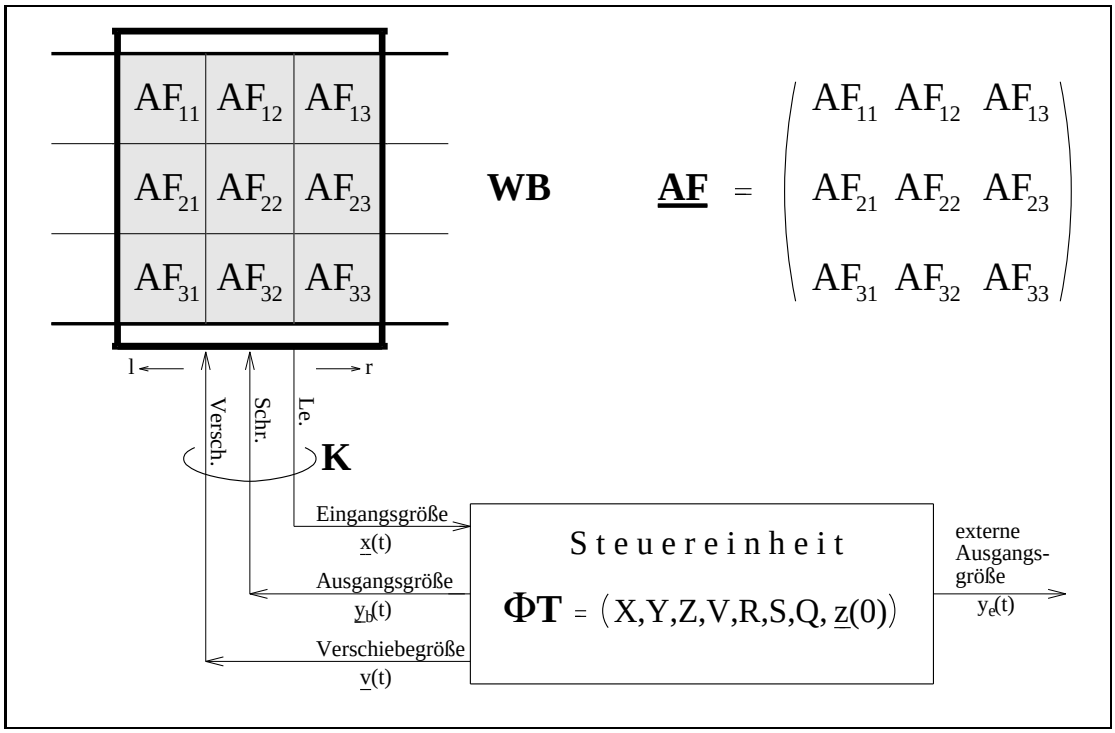


Bild 2: Erweiterte Turingmaschine **eTM3**

5 Schlußbetrachtung

Das in diesem Baustein vorgestellte mathematische Modell einer erweiterten Turingmaschine mit zweidimensionalem Werteband, eTM2, erweist sich als ein interessantes und leistungsfähiges Darstellungsmittel für die innere Struktur von mathematischen Konstanten und Funktionen, das aber auch unmittelbar zu deren numerischer Berechnung und darüber hinaus zur iterativen numerischen Lösung von Gleichungen Einsatz finden kann.

Experimentieren Sie mit eTM2 und seiner Fortschreibung eTM3 (dreispuriges Werteband) im Sinne der eingangs genannten Zielstellung selbständig und loten Sie diese eTM produktiv aus. Verifizieren Sie die erhaltenen Ergebnisse analytisch. Versuchen Sie dabei, wenn möglich, auch eine mathematische Analyse der Dynamik der zugrundeliegenden Algorithmen.

6 Literatur

[**1**] U. Schöning. *Theoretische Informatik kurz gefaßt.* Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich 1992

[**2**] K.W. Wagner. *Einführung in die Theoretische Informatik.* Berlin, Heidelberg, New York,.. Budapest 1994

[**3**] A. Turing. *On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem.* Proceedings of the London Mathematical Society 42(1936)2, p. 230–265, 43(1937)2, p. 544–546

[**4**] K. Jacobs. *Selecta Mathematica II.* Berlin, Heidelberg, New York 1970

[**5**] A. Hodges, A. Turing. *The Enigma.* New York 1980

[**6**] D. Harel. *Algorithmics – The Spirit of Computing.* Reading 1987

[**7**] R. Herken. *The Universal Turing Machine – A Half Century Survey.* Hamburg 1988

[**8**] W. Brauer. *Grenzen maschineller Berechenbarkeit.* Informatik–Spektrum 13(1990)2, S. 61–70

[**9**] B. Heintz. *Die Herrschaft der Regel. Zur Grundlagengeschichte des Computers.* Frankfurt/M. 1993

[**10**] Ch. Ketelsen. *Die Gödelschen Unvollständigkeitssätze: Zur Geschichte ihrer Entstehung und Rezeption.* Stuttgart 1994

[**11**] A. Schönhage, A. Grotefeld, E. Vetter. *Fast Algorithms. A Multitape Turing Machine Implementation.* Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich 1994

[**12**] R.H. Schulz. *Mathematische Aspekte der Angewandten Informatik.* Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich 1994

[**13**] H.W. Franke. *Das P–Prinzip. Naturgesetze im Rechnenden Raum.* Frankfurt/M., Leipzig 1995

[**14**] I. Stewart. *Mathematische Unterhaltungen.* Spektrum der Wissenschaft 16(1995)2, S. 10–13

[**15**] K. Dewdney. *Der neue Turing Omnibus.* Heidelberg,.. 1995

[**16**] R. Vollmar, T. Worsch. *Modelle der Parallelverarbeitung.* Stuttgart 1995

[**17**] N.J. Wilenkin. *Methoden der schrittweisen Näherung.* Moskau, Leipzig 1974

[**18**] *Enzyklopädie der Elementarmathematik. Band II, Algebra.* Berlin 1978

[**19**] K. Briggs. *How to Calculate the Feigenbaum Constants on Your PC.* The Australian Mathematical Society Gazette 16(1989)4, p. 89–92

[**20**] K. Briggs. *A Precise Calculation of the Feigenbaum Constants.* Mathematics of Computation 57(1991)195, p. 435–439

[**21**] H.–O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe. *Chaos and Fractals. New Frontiers of Science.* New York, Berlin,.. , Budapest 1992

[**22**] J. Argyris, G. Faust, M. Haase. *Die Erforschung des Chaos.* Braunschweig, Wiesbaden 1994

[**23**] A.O. Gelfond. *Die Auflösung von Gleichungen in ganzen Zahlen.* Berlin 1960

[**24**] P. Hoster. *Kryptologie.* Mannheim, Wien, Zürich 1985

[**25**] R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik. *Concrete Mathematics. A Foundation of Computer Science.* Reading 1990

[**26**] H. Scheid. *Zahlentheorie.* Mannheim, Wien, Zürich 1991

[**27**] E.P. Stoschek. *Abenteuer Algorithmus.* Dresden University Press 1996, ISBN 3-931828-31-X