Unit n°12.C

Andocken an den Kugelkondensator
Docking on the spherical capacitor

12.C.1

In Unit 12A wurde die Kapazität C eines Kugelkondensators berechnet, der durch zwei gleichgroße Metallkugeln mit dem Radius r gebildet wird, die im Abstand a voneinander angeordnet sind (Bild 1).

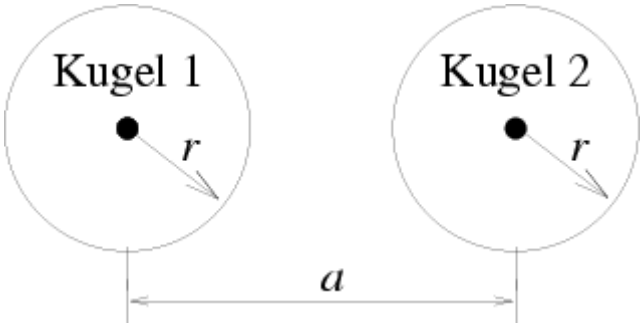


Bild 1: *Kugelkondensator*

Mit der „Methode der Bildladungen“ ergibt sich die Darstellung von C durch die unendliche Reihe (1)

$$\frac{C(x)}{C(\infty)} = 1 + \frac{1}{|x|} + \frac{1}{\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix}} + \frac{1}{\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix}} + \frac{1}{\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}} + \dots$$

$$C(\infty) = 2\pi\varepsilon r, \; x = \frac{a}{r}.$$

Diese Reihendarstellung ist Samenkorn für eine Reihe von interessanten Fragen.

12.C.1.1

Verlauf der Funktionen

$$f(x) = 1+\frac{1}{|x|}+\frac{1}{\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix}}+\frac{1}{\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix}}+\frac{1}{\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}}+\ldots \quad (2)$$

und

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} \quad (3)$$

speziell für

** $x \in \mathbb{R}$ und $-2 \leq x \leq +2$ (4)

** $x \in \mathbb{C}$ (5)

12.C.1.2

Reihendarstellung reeller Funktionen h(x) analog zur Taylorreihe

$$h(x) = a_0+\frac{a_1}{|x|}+\frac{a_2}{\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix}}+\frac{a_3}{\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix}}+\frac{a_4}{\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}}+\ldots (6)$$

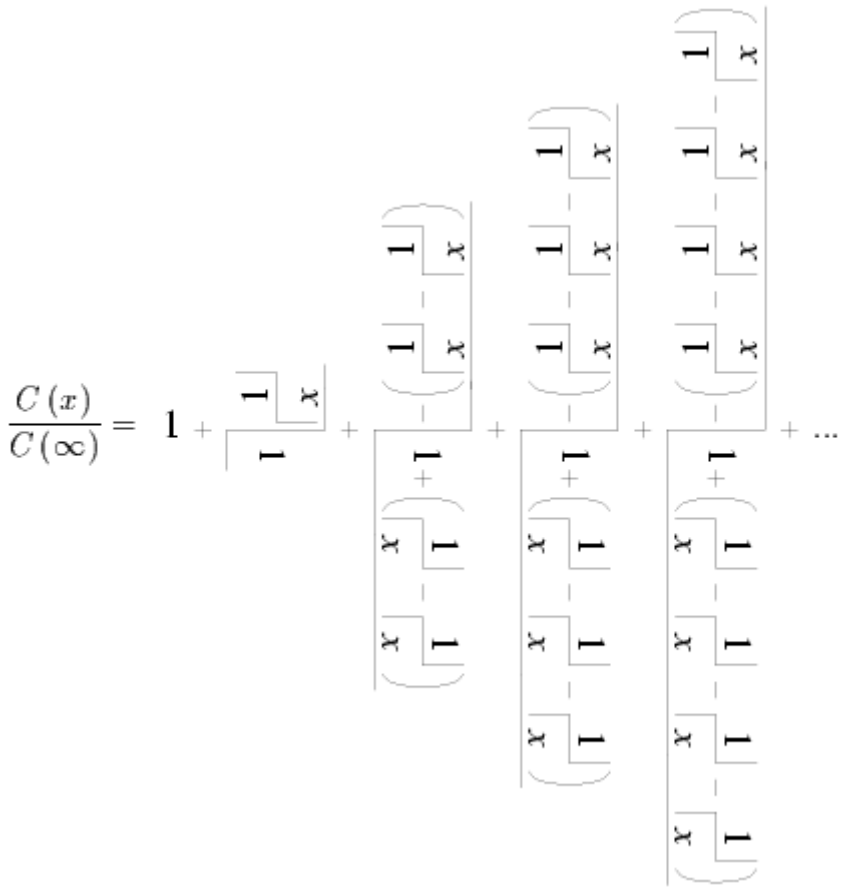
Wie können die a_i aus h(x) berechnet werden?

12.C.1.3

Zahlentheoretische Bedeutung von f(x) bzw. g(x)?

12.C.1.4

Darstellung von C durch einen verzweigten Kettenbruch



$$C(\infty) = 2\pi\varepsilon r,\; x = \frac{a}{r}.$$

(7)

12.C.2

Verwandte in der Elektrotechnik

Problemstellung

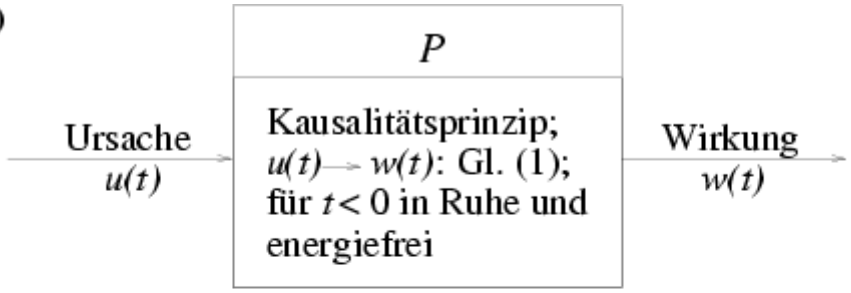
In einem physikalischen System P (das dem Kausalitätsprinzip unterliegt) werde der Zusammenhang zwischen Ursache *u(t)* und Wirkung *w(t)* durch eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$a_2 w''(t) + a_1 w'(t) + a_0 w(t) = b_2 u''(t) + b_1 u'(t) + b_0 u(t)\,;\; a_2 = 1 \qquad (1)$$

beschrieben.

P befinde sich für $t<0$ in Ruhe und enthalte keine Energie.

a)



b)

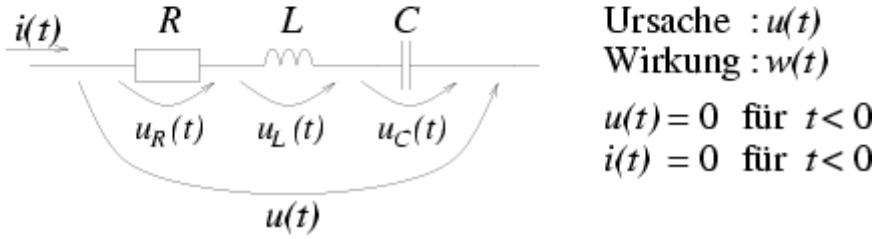


Bild 1: a) *Physikalisches System P*

b) *Beispiel: elektrischer Reihenschwingkreis*

Ein typisches Beispiel für ein solches physikalisches System ist der in Bild 1b) dargestellte elektrische Reihenschwingkreis. Sein Verhalten wird durch die Differentialgleichung

$$i''(t) + \frac{R}{L} i'(t) + \frac{1}{L\,C} i(t) = \frac{1}{L} u'(t) \qquad (2)$$

mit

$$i(t) = 0 \;\text{ für }\; t \le 0 \;\; (\text{kein Strom durch } L) \qquad (3)$$

$$u_C(t) = 0 \;\text{ für }\; t \le 0 \;\; (\text{keine Ladung auf } C) \qquad (4)$$

beschrieben.

Spezialfall

$$u(t) = u(0) \cdot 1(t) \tag{5}$$

$$1(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ \text{für} & \\ 0 & t < 0 \end{cases} \text{(Einheitssprung)}\,, \tag{6}$$

→ Sprungantwort (Übergangsfunktion, transient response) von P,

dargestellt als verzweigter Kettenbruch

$$\frac{i(t)_{|\,u(t)=u(0)\,1(t)}}{\frac{u(0)}{R}} = \cfrac{x}{1} + \cfrac{\frac{x}{2}}{\frac{2}{x} - 1} + \cfrac{\frac{x}{3}}{\frac{3}{x} - 1 - \left(\frac{1}{8}\right)} + \cfrac{\frac{x}{4}}{\frac{4}{x} - 1 - \left(\frac{1}{8} - \left(\frac{1}{8} - \frac{\delta}{1}\right)\right)} + \ldots$$

;

$$x = \frac{R}{L}\, t \geq 0\,;\ \delta = \frac{L}{R^2\, C}\,. \tag{7}$$

$$\frac{u_R(t)_{|\,u(t)=u(0)\,1(t)}}{u(0)} = \cfrac{x}{1} + \cfrac{\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}} + \cfrac{\frac{x}{3}\left(1-\frac{\delta}{1}\right)}{\left(1-\frac{\delta}{1}\right)1-\frac{x}{3}} + \cfrac{\frac{x}{4}\left(1-\frac{\delta}{1}-\frac{\delta}{1}\right)}{\left(1-\frac{\delta}{1}-\frac{\delta}{1}\right)1-\frac{x}{4}} + \ldots$$

$$x = \frac{R}{L}\,t \geq 0;\ \delta = \frac{L}{R^2\,C} \tag{8}$$

$$\frac{u_L(t)_{|\,u(t)=u(0)\,1(t)}}{u(0)} = \cfrac{1}{1} + \cfrac{x}{x-1} + \cfrac{\frac{x}{2}\left(1-\frac{\delta}{1}\right)}{\left(1-\frac{\delta}{1}\right)\frac{2}{x}-1} + \cfrac{\frac{x}{3}\left(1-\frac{\delta}{1}-\frac{\delta}{1}\right)}{\left(1-\frac{\delta}{1}-\frac{\delta}{1}\right)\frac{3}{x}-1} + \ldots$$

;

$$x = \frac{R}{L}\,t \geq 0;\ \delta = \frac{L}{R^2\,C} \tag{9}$$

$$\frac{u_C(t)_{|\,u(t)=u(0)\,1(t)}}{u(0)\,\delta} = \cfrac{x^2}{1+\cfrac{x}{3-\cfrac{1}{x+\cfrac{x\left(1-\delta\right)}{\left(1-\delta\right)4-\cfrac{1}{x+\cfrac{x\left(1-\delta\right)}{\left(1-\delta\right)5-\cfrac{1}{x+\cfrac{x\left(1-\delta\right)}{\left(1-\delta\right)}}}}}}}} + \ldots$$

$$x = \frac{R}{L}\,t \geq 0\,;\ \delta = \frac{L}{R^2\,C}\,. \tag{10}$$

12.C.3
In der Höhle des Löwen:
Verzweigter Kettenbruch und Co. - Eine Baustelle

12.C.3.1
Transformation eines zweiseitig verzweigten einfachen Kettenbruchs Gl. (1) in die einseitig verzweigte einfache Kettenstruktur (nested expression) - (continued fraction) Gl. (2)

$$a_0 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{a_1}} + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\left(\cfrac{1}{a_1} - \cfrac{1}{a_2}\right)}{\left(\cfrac{a_1}{a_2} - \cfrac{1}{a_2}\right)}} + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\left(\cfrac{1}{a_1} - \cfrac{1}{a_2} - \cfrac{1}{a_3}\right)}{\left(\cfrac{a_1}{a_3} - \cfrac{a_2}{a_3} - \cfrac{1}{a_3}\right)}} + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\left(\cfrac{1}{a_1} - \cfrac{1}{a_2} - \cfrac{1}{a_3} - \cfrac{1}{a_4}\right)}{\left(\cfrac{a_1}{a_4} - \cfrac{a_2}{a_4} - \cfrac{a_3}{a_4} - \cfrac{1}{a_4}\right)}} + \ddots \tag{1}$$

$$= a_0 + \frac{1}{a_1}\left(1 + \frac{1}{\left(\frac{a_1}{a_2} - \frac{1}{a_2}\right)}\left(1 + \frac{1}{\left(\frac{a_1}{a_3} - \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_3}\right)}\left(1 + \frac{1}{\left(\frac{a_1}{a_4} - \frac{1}{a_4} - \frac{1}{a_4} - \frac{1}{a_4}\right)}\left(1 + \ldots\right)\right)\right)\right); \tag{2}$$

12.C.3.2
Beispiele für die Darstellung mathematischer Konstanten bzw. von Funktionswerten einstelliger Funktionen durch die Kettenstruktur Gl. (2)

Beispiel 1:

$$\frac{\pi}{2} = 1+\cfrac{1}{3\,\Big\rfloor 1+\cfrac{1}{3\,\Big\rfloor 1+\cfrac{1}{3\,\Big\rfloor 1+\cfrac{1}{3\,\Big\rfloor 1+\ldots}}}} = 1.57079\,6326\ldots. \tag{3}$$

Zum Vergleich hat man:

$$\frac{C(3)}{C(\infty)} = 1+\cfrac{1}{3\,\Big\rfloor 1+\cfrac{1}{3\,\Big\rfloor 1+\cfrac{1}{3\,\Big\rfloor 1+\cfrac{1}{3\,\Big\rfloor 1+\ldots}}}} = 1.53537\,0508\ldots. \tag{4}$$

$$1+\cfrac{1}{2\,\Big\rfloor 1+\cfrac{1}{2\,\Big\rfloor 1+\cfrac{1}{2\,\Big\rfloor 1+\cfrac{1}{2\,\Big\rfloor 1+\ldots}}}} = 2.28312\,3811\ldots. \tag{5}$$

$$1+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2-\frac{1}{4}}\left(1+\frac{1}{2-\frac{1}{4-\frac{1}{4}}}\left(1+\frac{1}{2-\frac{1}{4-\frac{1}{4-\frac{1}{4}}}}\left(1+\ldots\right.\right.\right.\right.\right. = 2.17570\,5989\ldots. \tag{6}$$

$$1+\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}\left(1+\frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}\left(1+\ldots\right.\right.\right.\right.\right. = 1.46817\,7321\ldots. \tag{7}$$

Beispiel 2:

$$\sqrt{2} = 1+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4\left(1-\frac{1}{3}\right)}\left(1+\frac{1}{4\left(1-\frac{1}{3-\frac{1}{2}}\right)}\left(1+\frac{1}{4\left(1-\frac{1}{3-\frac{1}{2-\frac{1}{2}}}\right)}\left(1+\frac{1}{4\left(1-\frac{1}{3-\frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac{1}{2}}}}\right)}\left(1+\ldots\right.\right.\right.\right.\right. \tag{8}$$

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}}\left(1 + \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{\frac{1}{3}}{2 - \frac{1}{2}}}\left(1 + \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{\frac{1}{3}}{2 - \frac{\frac{1}{2}}{1}}}\left(1 + \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{\frac{1}{3}}{2 - \frac{\frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{2}}}}\left(1 + \ldots\right.\right.\right.\right.\right. \tag{9}$$

$$\sqrt{n} = 1 + \frac{n-1}{2n}\left(1 + \frac{n-1}{2n\left(1 - \frac{1}{3}\right)}\left(1 + \frac{n-1}{2n\left(1 - \frac{\frac{1}{3}}{2 - \frac{1}{2}}\right)}\left(1 + \frac{n-1}{2n\left(1 - \frac{\frac{1}{3}}{2 - \frac{\frac{1}{2}}{2}}\right)}\left(1 + \frac{n-1}{2n\left(1 - \frac{\frac{1}{3}}{2 - \frac{\frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{2}}}\right)}\left(1 + \ldots\right.\right.\right.\right.\right. \tag{10}$$

Beispiel 3:

$$\sqrt[3]{2} = 1 + \frac{1}{6}\left(1 + \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{2}}\left(1 + \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{\frac{1}{2}}{4 - \frac{1}{4}}}\left(1 + \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{\frac{1}{2}}{4 - \frac{\frac{1}{4}}{1}}}\left(1 + \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{\frac{1}{2}}{4 - \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}}}}\left(1 + \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{\frac{1}{2}}{4 - \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{\frac{1}{4}}{1}}}}\left(1 + \ldots\right.\right.\right.\right.\right. \tag{11}$$

$$\sqrt[3]{n} = 1 + \frac{n-1}{3n}\left(1 + \frac{n-1}{3n\left(1 - \frac{1}{2}\right)}\left(1 + \frac{n-1}{3n\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)}\left(1 + \frac{n-1}{3n\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{1}\right)}\left(1 + \frac{n-1}{3n\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{1} - \frac{1}{4}\right)}\left(1 + \frac{n-1}{3n\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{1} - \frac{1}{4} - \frac{1}{1}\right)}\left(1 + ..\right.\right.\right.\right.\right.\right. \tag{12}$$

Beispiel 4:

$$\Phi = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right) = 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{5}\left(1 + \frac{1}{7 - \frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{7 - \frac{1}{5}}\left(1 + \frac{1}{7 - \frac{1}{7 - \frac{1}{2}}}\left(1 + \frac{1}{7 - \frac{1}{7 - \frac{1}{5}}}\left(1 + \right.\right.\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.\left.\left.\frac{1}{7 - \frac{1}{7 - \frac{1}{7 - \frac{1}{2}}}}\left(1 + \frac{1}{7 - \frac{1}{7 - \frac{1}{7 - \frac{1}{5}}}}\left(1 + \frac{1}{7 - \frac{1}{7 - \frac{1}{7 - \frac{1}{2}}}}\left(1 + \frac{1}{7 - \frac{1}{7 - \frac{1}{7 - \frac{1}{5}}}}\left(1 + ...\right.\right.\right.\right.\right.\right.\right.\right. \tag{14}$$

Allgemein gilt:

$$\frac{\sqrt{k^2+l}+k}{2\,k} = 1+\frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{q}\left(1+\frac{1}{c}\left(1+\frac{1}{c}\left(1+\frac{1}{c}\left(1+\frac{1}{c}\left(1+\right.\right.\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.\left.\left.\frac{1}{c}\left(1+\frac{1}{c}\left(1+\frac{1}{c}\left(1+\frac{1}{c}\left(1+\ldots\right.\right.\right.\right.\right.\right. \qquad (15.1)$$

Hierbei ist

$$a = \frac{4\,k^2+l}{l}\,,\; b = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix}\,,\; c = a+b = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a+2 \end{vmatrix}\,. \qquad (15.2)$$

Diese Kettenstruktur zeigt verglichen mit den Beispielen 1 bis 3 eine sehr gute Konvergenz. In Bild 1 ist die Anzahl m der bei zwanzigstelliger Genauigkeit in die Berechnung einzubeziehender Glieder des nested expression in Abhängigkeit von k und l dargestellt.

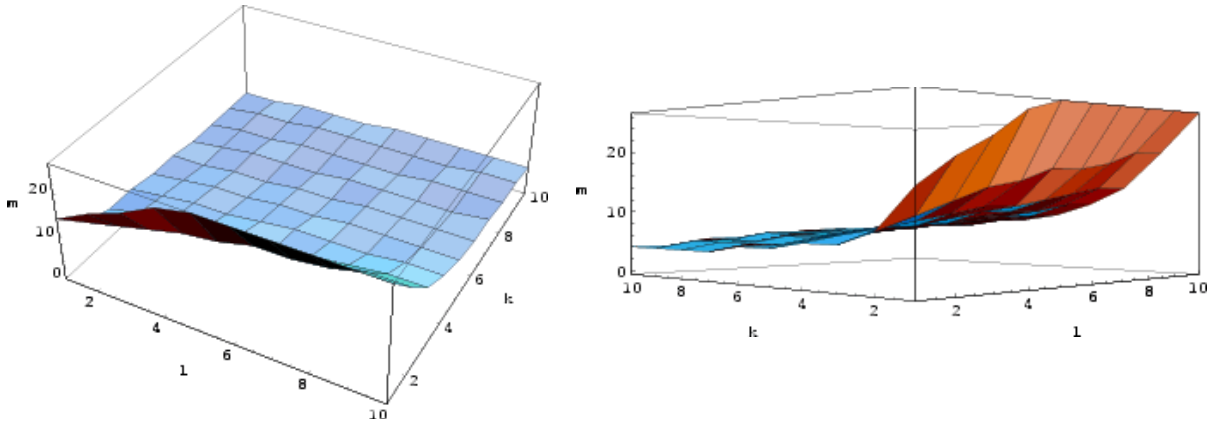


Bild 1: m=f(k,l) *bei Zugrundelegung einer zwanzigstelligen Genauigkeit.*

12.C.3.3
Einseitig verzweigter einfacher Kettenbruch

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1} + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}} + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4}}}} + \ldots + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ldots + \cfrac{1}{a_n}}}}} \quad ; \; a_i \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Seine Berechnungsvorschrift, d.h. die Vorschrift zu seiner Umwandlung in eine Bruchzahl

$$\frac{C_n}{B_n} \; ; \; B_n, C_n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

und damit in eine rationale Zahl läßt sich leicht in Matrizennotation angeben:

$$\begin{pmatrix} B_{n-1} & B_n \\ C_{n-1} & C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & b_{n-1} \\ b_{n-1} & c_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b_n \\ 1 & c_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_{n-1} & b_n \\ c_{n-1} & c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_3 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Die sequentielle Realisierung erfolgt mittels Algorithmus (A1).

Eingabe: $n, (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$
$\underline{m} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\underline{M} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_0 \end{pmatrix}$
$i = 1(1)n$
$\underline{m} := \underline{m} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_i \end{pmatrix}$
$\underline{M} := \underline{M} \begin{pmatrix} 0 & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{pmatrix}$
$B_n := M_{12}$, $C_n := M_{22}$

Algorithmus (A1): *Umwandlung des verzweigten Kettenbruches Gl. (1) in eine Bruchzahl C_n/B_n*

- Konstruieren Sie einen Algorithmus zur Darstellung bzw. Approximation einer positiven reellen Zahl r durch einen verzweigten Kettenbruch Gl. (1).
- Geben Sie repräsentative Beispiele für eine solche Kettenbruchentwicklung an und untersuchen Sie deren Konvergenz.