Unit n°12.A
Ein Oldie

Rund um den Kugelkondensator

Für die Kapazität eines Kugelkondensators, bestehend aus zwei gleichgroßen Metallkugeln mit dem Radius r, die im Abstand a voneinander angeordnet sind (Bild 1),

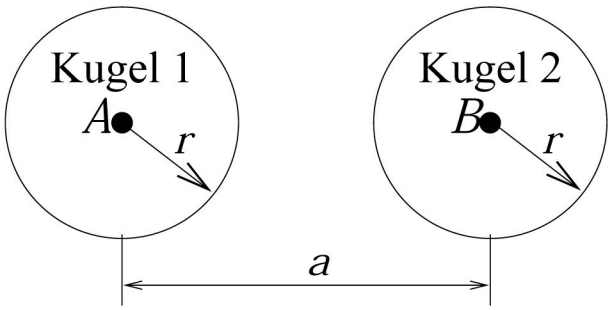




Bild 1: Kugelkondensator

erhält man nach der "Methode der Bildladungen" [1]

$$C = 2\,\pi\varepsilon\, r f\left(\frac{a}{r}\right). \tag{1}$$

Die Funktion $f(x)$ ist wie folgt als unendliche Reihe darstellbar:

$$f(x) = 1 + \frac{1}{|x|} + \frac{1}{\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix}} + \frac{1}{\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix}} + \frac{1}{\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}} + \ldots$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{D_i(x)}\;;\; x > 2\,. \tag{2}$$

Hierbei ist

$$D_0(x) = 1 \tag{3}$$

$$D_1(x) = x \tag{4}$$

$$D_i(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 & x \end{vmatrix} \quad \text{(Determinante } i\text{–ter Ordnung).} \tag{5}$$

$f(x)$ besitzt dann den im Bild 2 dargestellten Verlauf.

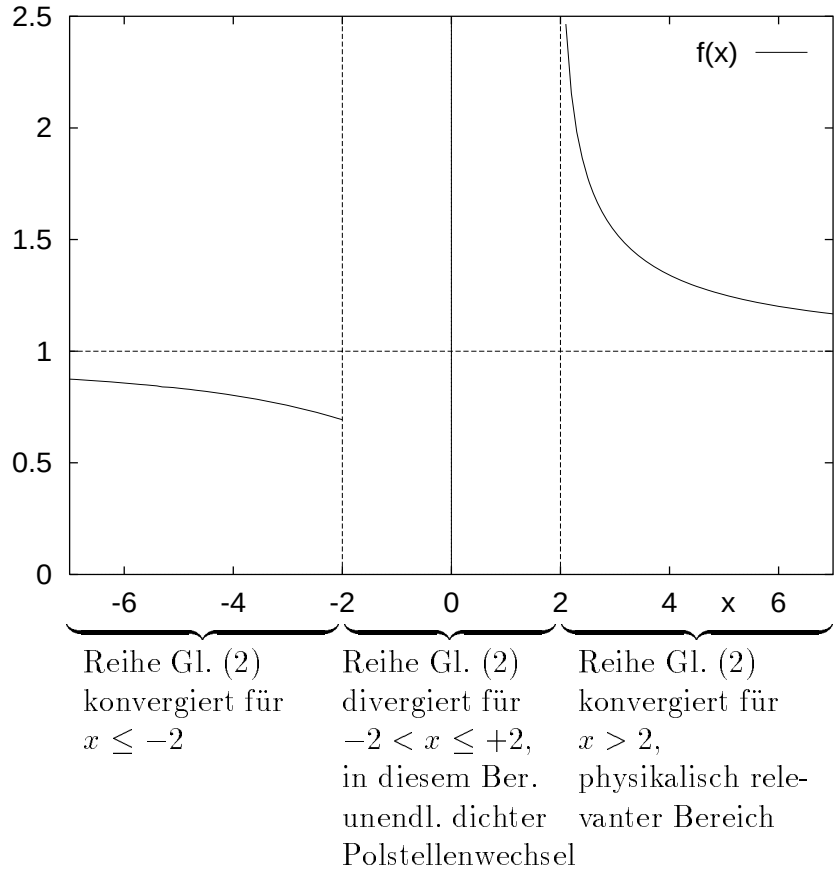


Bild 2: Verlauf der Funktion $f(x)$

Aufgaben

12.1 Leiten Sie die Gln. (1) und (2) nach der Methode der Bildladungen her.

12.2 Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Reihe Gl. (2) für repräsentative x-Werte (vgl. Bild 2).

12.3 Geben Sie einen möglichst einfachen Algorithmus zur genügend genauen näherungsweisen Berechnung von $f(x)$ bei gegebenem x im Konvergenzbereich der Reihe Gl. (2) an.

12.4 Untersuchen Sie die Eigenschaften der Polynome $D_n(x)$. □(Sto)

Lösungen

12.1

Die Potentialdifferenz zwischen Kugel 1 und Kugel 2 betrage U, Kugel 1 besitze das

Potential $+\frac{1}{2}U$, Kugel 2 das Potential $-\frac{1}{2}U$. Wäre nur Kugel 1 vorhanden, könnte man sich das elektrostatische Feld außerhalb dieser Kugel erzeugt denken durch eine Punktladung Q_A in deren Mittelpunkt A, Kugel 1 ist dann Äquipotentialfläche mit $+\frac{1}{2}U$ (Bild 1) und es gilt

$$\frac{1}{2}U = \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon r}. \tag{6}$$

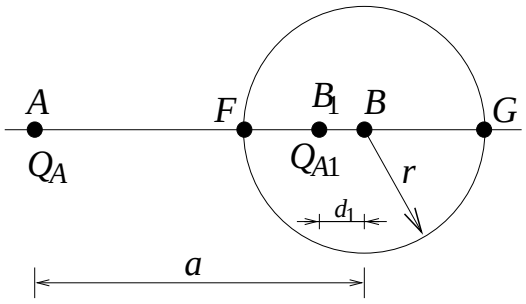
Q_A in A würde auf der Kugel 2 ein zusätzliches Potential erzeugen, dieses muß nun durch eine weitere in B_1 lokalisierte Ladung Q_{A1} (elektrisches Bild von Q_A in A bezüglich Kugel 2) zu Null kompensiert werden.
Das ist möglich: In der Ladungskonstellation Bild 3a) gibt es genau eine kugelförmige Äquipotentialfläche mit dem Potential

$$\varphi_F = \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon(a-r)} + \frac{Q_{A1}}{4\pi\varepsilon(r-d_1)} = 0 \tag{7}$$

$$\varphi_G = \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon(a+r)} + \frac{Q_{A1}}{4\pi\varepsilon(r+d_1)} = 0\,, \tag{8}$$

eben Kugel 2.

a)



b)

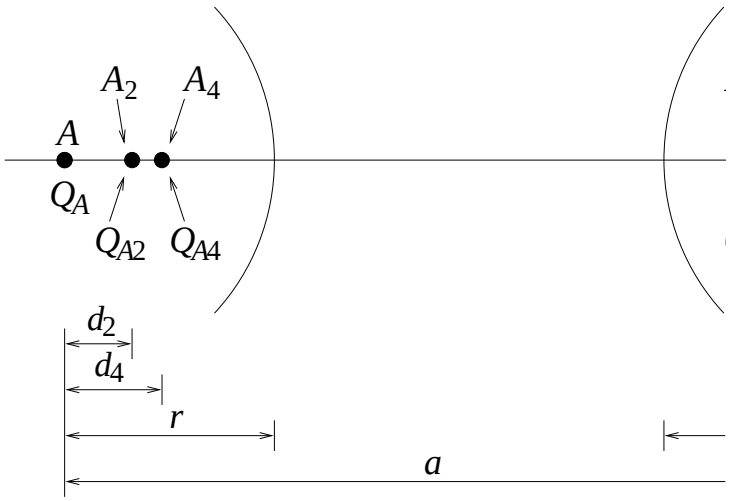


Bild 3: Methode der elektrischen Bilder

Aus Gl. (7) und (8) folgt für das elektrische Bild von Q_A in A bezüglich Kugel 2

$$Q_{A1} = -Q_A \frac{d_1}{r} \tag{9}$$

$$d_1 = r \frac{r}{a}\,. \tag{10}$$

Q_{A1} in B_1 würde nun wiederum auf Kugel 1 ein zusätzliches Potential erzeugen, dessen Nullkompensation erfolgt durch eine in A_2 lokalisierte Ladung Q_{A2} (Bild 3b)) mit

$$Q_{A2} = -Q_{A1} \frac{d_2}{r} \tag{11}$$

$$d_2 = r \frac{r}{a - d_1}\,. \tag{12}$$

Dem folgt die Kompensationsladung Q_{A3} in B_3 mit

$$Q_{A3} = -Q_{A2} \frac{d_3}{r} \tag{13}$$

$$d_3 = r \frac{r}{a - d_2}\,, \tag{14}$$

Q_{A4} in A_4 mit

$$Q_{A4} = -Q_{A3} \frac{d_4}{r} \tag{15}$$

$$d_4 = r \frac{r}{a - d_3}\,, \tag{16}$$

und so fort.
Man hat also die Rekursionsgleichungen

$$Q_{A,i+1} = -Q_{Ai} \frac{d_{i+1}}{r} \tag{17}$$

mit

$$Q_{A1} = -Q_A \frac{d_1}{r} \tag{18}$$

und

$$\frac{d_{i+1}}{r} = \frac{1}{\frac{a}{r} - \frac{d_i}{r}} \tag{19}$$

mit

$$\frac{d_1}{r} = \frac{1}{\frac{a}{r}}\,. \tag{20}$$

Bei Einführung der Normierungen

$$\frac{a}{r} = x\,;\ \frac{d_i}{r} = y_i \tag{21}$$

gewinnen die Gln. (17) – (21) die Gestalt

$$\begin{aligned} Q_{A,i+1} &= -Q_{Ai}\, y_{i+1} && (22)\\ Q_{A1} &= -Q_A\, y_1 && (23)\\ y_{i+1} &= \frac{1}{x - y_i}\,;\ i = 1,2,3,\ldots && (24)\\ y_1 &= \frac{1}{x}\,. && (25) \end{aligned}$$

Die vorstehende Überlegung wird jetzt in der gleichen Weise mit Kugel 2 beginnend durchgeführt. Diese ist dann Äquipotentialfläche mit $-\frac{1}{2}U$, erzeugt durch die Ladung Q_B:

$$-\frac{1}{2}\,U = \frac{Q_B}{4\,\pi\,\varepsilon\,r}\,. \tag{26}$$

Aus den Gln. (6) und (7) folgt sofort

$$Q_B = -Q_A \tag{27}$$

und damit auch

$$Q_{Bi} = -Q_{Ai}\,;\ i = 1,2,3,\ldots\,. \tag{28}$$

Um die Gesamtladung von Kugel 1 zu erhalten, sind alle von Q_A in A und Q_B in B herrührenden Bildladungen zu addieren:

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_A + Q_{A2} + Q_{A4} + Q_{A6} + \ldots \\ &\quad + Q_{B1} + Q_{B3} + Q_{B5} + \ldots \\ &= Q_A - Q_{A1} + Q_{A2} - Q_{A3} + Q_{A4} - Q_{A5} + Q_{A6} \mp \ldots\,. \end{aligned} \tag{29}$$

Entsprechend hat man für die Gesamtladung von Kugel 2 natürlich sofort

$$Q_2 = -Q_1\,. \tag{30}$$

Für die Kapazität

$$C = \frac{Q}{U} \tag{31}$$

des Kugelkondensators gemäß Bild 1 und mit den Gln. (6), (29), (9), (11), (13), (15), (22) und (23) erhält man dann

$$\begin{aligned} C &= \frac{Q_1}{U} = 2\,\pi\,\varepsilon\,r\,\frac{Q_1}{Q_A} = 2\,\pi\,\varepsilon\,r\left(1 - \frac{Q_{A1}}{Q_A} + \frac{Q_{A2}}{Q_A} - \frac{Q_{A3}}{Q_A} + \frac{Q_{A4}}{Q_A} \mp \ldots\right) \\ &= 2\,\pi\,\varepsilon\,r\,(1 + y_1 + y_1\,y_2 + y_1\,y_2\,y_3 + y_1\,y_2\,y_3\,y_4 + \ldots) \end{aligned} \tag{32}$$

und als infinitely nested expression (vgl. Modul 9, [2] und [3], Abschn. 3.2) notiert

$$C = 2\,\pi\,\varepsilon\,r\,(1 + y_1\,(1 + y_2\,(1 + y_3\,(1 + y_4\,(1 + \ldots \quad = 2\,\pi\,\varepsilon\,r\left[\begin{array}{c} y_i \\ 1\,;\ 1 \\ 1 \end{array}\right]_{i=1}^{\infty} . \tag{33}$$

Aus den Gln. (24) und (25) folgt schließlich

$$\frac{1}{y_i\,y_{i+1}} = \frac{x}{y_i} - 1\,;\ i = 1, 2, 3, \ldots \tag{34}$$

$$\frac{1}{y_1} = x \tag{35}$$

und damit

$$\frac{1}{\prod_{j=1}^{i+1} y_j} = \frac{x}{\prod_{j=1}^{i} y_j} - \frac{1}{\prod_{j=1}^{i-1} y_j}\,;\ i = 2, 3, 4, \ldots \tag{36}$$

$$\frac{1}{\prod_{j=1}^{1} y_j} = x\,. \tag{37}$$

Mit

$$P_i(x) = \frac{1}{\prod_{j=1}^{i} y_j} \tag{38}$$

lauten die Gln. (37) und (38)

$$P_{i+1}(x) = x\,P_i(x) - P_{i-1}(x)\,;\ i = 2, 3, 4, \ldots \tag{39}$$

$$P_1(x) = x\,,\ P_2(x) = x^2 - 1 \tag{40}$$

und in Determinantenschreibweise

$$P_i(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 & x \end{vmatrix} \quad \text{(Determinante } i\text{–ter Ordnung)}, \tag{41}$$

d.h. es ist

$$P_i(x) = D_i(x)\,, \tag{42}$$

$$\prod_{j=1}^{i} y_i = \frac{1}{D_i(x)} \tag{43}$$

und damit

$$C = 2\,\pi\,\varepsilon\,r \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{D_n\left(\frac{a}{r}\right)} = 2\,\pi\,\varepsilon\,r f\left(\frac{a}{r}\right). \tag{44}$$

Anmerkungen

- Zeigen Sie, daß für y_i gilt

$$\lim_{i\to\infty} y_i = \frac{x}{2} - \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1} \tag{45}$$

$$\lim_{i\to\infty} \prod_{j=1}^{i} y_j = 0\,. \tag{46}$$

- Vereinfachen Sie die vorstehende Herleitung von Gl. (44).
- Berechnen Sie auf dieser Basis die Kapazität des Kugelkondensators gemäß Bild 1 für Kugeln mit unterschiedlichen Radien (vgl. [4]).

12.3

Zur praktischen Berechnung der Funktionswerte von $f(x)$ werden im Konvergenzbereich der unendlichen Reihe Gl. (2) nur die ersten n Glieder benutzt:

$$f(x) \approx f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{D_i(x)}\,. \tag{47}$$

Für $f_n(x)$ folgen aus Gl. (47) und Gl. (3) Rekursions– und Startgleichung

$$f_{i+1}(x) = f_i(x) + \frac{1}{D_{i+1}(x)}\,;\; i = 0, 1, 2, \ldots \tag{48}$$

$$f_0(x) = 1\,. \tag{49}$$

Auch die Determinanten $D_i(x)$ lassen sich leicht rekursiv berechnen (in Gl. (5) Entwicklung nach 1. Zeile):

$$D_{i+1}(x) = x\,D_i(x) - D_{i-1}(x) = \begin{vmatrix} D_i(x) & 1 \\ D_{i-1}(x) & x \end{vmatrix} \tag{50}$$

$$D_0(x) = 1\,,\; D_1(x) = x\,, \tag{51}$$

in Matrizennotation:

$$\begin{pmatrix} D_i(x) \\ D_{i+1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{i-1}(x) \\ D_i(x) \end{pmatrix} \tag{52}$$

$$\begin{pmatrix} D_0(x) \\ D_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}. \tag{53}$$

Die näherungsweise Berechnung von $f(x)$ wird beendet, wenn $\mathrm{abs}\left(\frac{1}{D_n(x)}\right)$ die gegebene Genauigkeit ε zum ersten Male unterschreitet.
Damit hat man den nachstehenden einfachen Algorithmus (A1) (in Struktogrammnotation [5,6]) zur näherungsweisen Berechnung von $f(x)$.

Eingabe: x, ε
$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$; $s := 1$
$s := s + \frac{1}{v}$
$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$
$\frac{1}{v} \leq \varepsilon$
$f(x) := s$
Ausgabe: $f(x)$

Algorithmus (A1): Näherungsweise Berechnung von $f(x)$

12.4

- Aus den Gln. (50) und (51) folgt die Formeldarstellung von $D_n(x)$:

$$D_n(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^i \binom{n-i}{i} x^{n-2i}, \tag{54}$$

$$D_n(x \pm 2) = \sum_{i=0}^{n} (\pm 1)^i \binom{2n+1-i}{i} x^{n-i}. \tag{55}$$

- Die Polynome $D_n(x)$; $n = 0(1)8$ haben die in Bild 4 dargestellten Verläufe, die den Verläufen der Chebyshev–Polynome $T_n(x)$ sehr ähnlich sind (vgl. [7], Abb. 19.8).

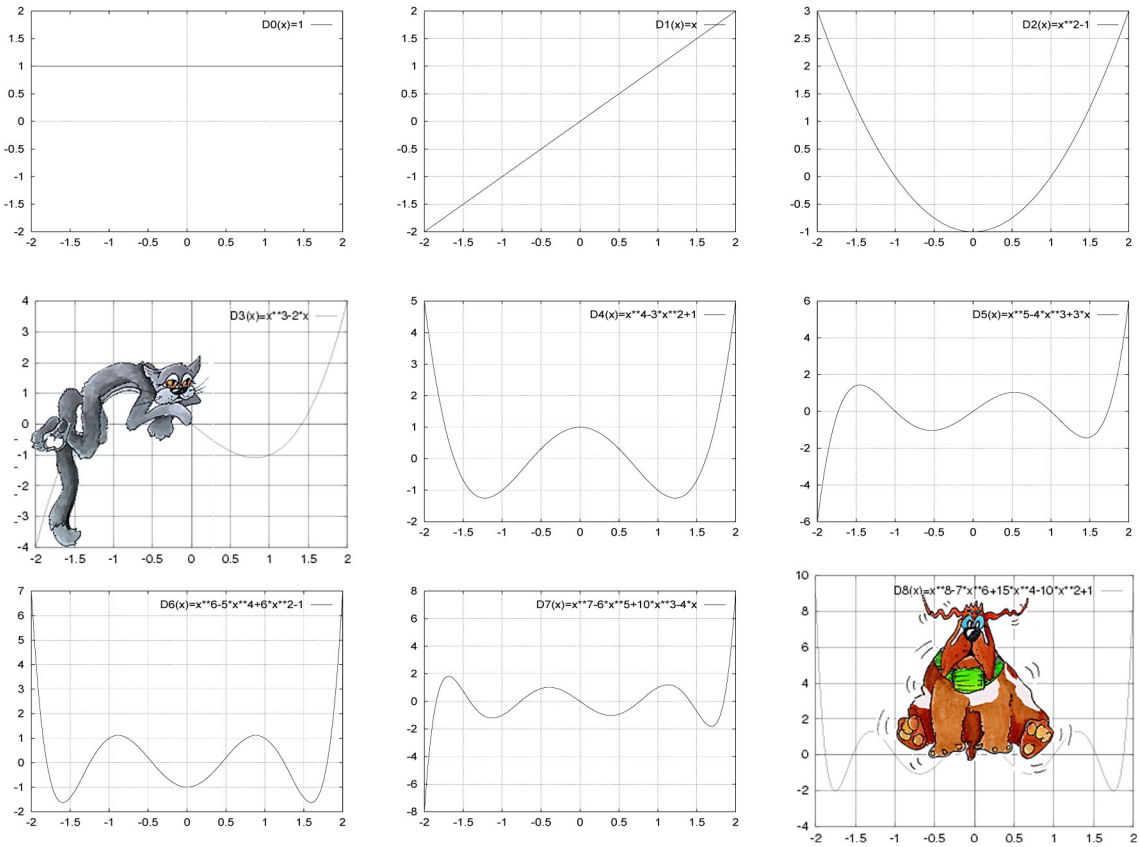


Bild 4: Werteverlauf der Polynome $D_n(x)$; $n = 0(1)8$ im Intervall $[-2, +2]$

Man erkennt:

– Alle Nullstellen von $D_n(x)$ liegen im Intervall $(-2, +2)$.

–

Im	ist	
"Durchlaßbereich" $0 \leq \|x\| \leq 2$	$0 \leq \|D_n(x)\| \leq n+1$	(56)
"Oszillationsbereich"	$0 \leq \|D_n(x)\| \leq 2$	(57)
"Sperrbereich" $\|x\| \geq 2$	$\|D_n(x)\| \geq n+1\,.$	(58)

Diskutieren Sie mögliche Anwendungen dieses "Filterverhaltens" (vgl. [7], Abschn. 19).

– $D_n(-x) = (-1)^n\, D_n(x)$ (59)

– $D_n(0) = \overline{1, 0, -1, 0}$ (60)

$D_n(1) = \overline{1, 1, 0, -1, -1, 0}$ (61)

$D_n(2) = n+1$ (62)

$$D_n(3) \;=\; \mathrm{fib}\,(2\,n+1)\;\;^{1} \tag{63}$$

- Aus den Gln. (52) und (53) folgt die Matrizendarstellung von $D_n(x)$

$$\begin{pmatrix} D_n(x) \\ D_{n+1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} D_0(x) \\ D_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \tag{64}$$

- Die Chebyshev–Polynome erster Art $T_n(x)$ [8,9,10] in Matrizendarstellung

$$\begin{pmatrix} T_n(x) \\ T_{n+1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\,x \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix};\; n = 0, 1, 2, \ldots\,, \tag{65}$$

stehen in engem Zusammenhang mit den Polynomen $D_n(x)$:

$$T_n(x) \;=\; \frac{1}{2}\,(D_n(2\,x) - D_{n-2}(2\,x))\,;\; n = 2, 3, 4, \ldots \tag{66}$$

$$\;=\; x\,D_{n-1}(2\,x) - D_{n-2}(2\,x) = \begin{vmatrix} D_{n-1}(x) & 1 \\ D_{n-2}(x) & x \end{vmatrix};\; n = 2, 3, 4, \ldots \tag{67}$$

$$T_0(x) \;=\; D_0(x)\,,\; T_1(x) = D_1(x) \tag{68}$$

$$D_{2\,k+1}(x) \;=\; 2\sum_{i=0}^{k} T_{2\,i+1}(x)\,;\; k = 1, 2, 3, \ldots \tag{69}$$

$$D_{2\,k}(x) \;=\; T_0(x) + 2\sum_{i=1}^{k} T_{2\,i}(x)\,;\; k = 1, 2, 3, \ldots \tag{70}$$

- Während die Chebychev–Polynome $T_n(x)$ bezüglich einer Gewichtsfunktion orthonormal sind:

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{T_m(x)\,T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 \quad \text{für} & m = n \neq 0 \\ 2 & m = n = 0 \end{cases}, \tag{71}$$

gilt für die $D_n(x)$ eine eingeschränktere Beziehung

$$\frac{1}{\pi}\int_{-2}^{+2} \frac{D_m(x)\,D_n(x)}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \begin{cases} 0 & \text{ungerade} \\ \text{für } m+n & \\ 1 + \min(m,n) & \text{gerade} \end{cases}. \tag{72}$$

Diskutieren Sie Anwendungen der Gln. (70) und (71) (vgl. [7,11]).

---

[1] fib (i) – Fibonacci–Zahl:
fib $(i+2)$ =fib $(i+1)$+fib (i)
fib (0) =fib $(1) = 1$

- Das Polynom $D_n(x)$ ist Lösung der Differentialgleichung

$$(4-x^2)\,y'' - 3\,x\,y' + n\,(n+2)\,y = 0\,. \tag{73}$$

- Der Quotient zweier aufeinanderfolgender Polynome $D_n(x)$ läßt sich als Kettenbruch [12,13] darstellen:

$$\frac{D_{n+1}(x)}{D_n(x)} = x + \underbrace{\frac{-1\,|}{|\,x} + \frac{-1\,|}{|\,x} + \ldots + \frac{-1\,|}{|\,x}}_{n-\text{mal}} \tag{74}$$

$$\frac{D_n(x+2)}{D_n(x+2) - D_n(x+1)} = 1 + \underbrace{\frac{1\,|}{|\,x} + \frac{1\,|}{|\,1}}_{1.} + \underbrace{\frac{1\,|}{|\,x} + \frac{1\,|}{|\,1}}_{2.} + \ldots + \underbrace{\frac{1\,|}{|\,x} + \frac{1\,|}{|\,1}}_{n\text{te Periode}} \tag{75}$$

Anmerkungen:

- Beweisen Sie die Gln. (54), (55), (64) und (70).

- Untersuchen Sie den Zusammenhang der Polynome $D_n(x)$ mit den Hermiteschen Polynomen $H_n(x)$ [14]

$$\begin{pmatrix} H_n(x) \\ H_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -n & x \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}. \tag{76}$$

- Zeigen Sie, daß sich $D_n(x)$ wie folgt in Parameterform darstellen läßt:

$$D_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\,(n+1)\,t}{\sin t}\,,\ x = 2\,\cos t \ \text{ für } \ 0 \le x \le 2 \\[2ex] \dfrac{\sinh\,(n+1)\,t}{\sinh t}\,,\ x = 2\,\cosh t \ \text{ für } \ 2 \le x \end{cases} \tag{77}$$

$$D_n(-x) = (-1)^n\,D_n(x)\,. \tag{78}$$

Daraus erhält man für die n Nullstellen von $D_n(x)$

$$x_k = 2\,\cos\frac{k}{n+1}\,\pi\,,\ k = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{79}$$

Geben Sie einen ähnlichen Formelausdruck für die Extremwertstellen im Bereich $(-2, +2)$ an. □(Sto)

Literatur

[**1**] K. Küpfmüller. *Einführung in die theoretische Elektrotechnik.* Berlin, Göttingen, Heidelberg 1955

[**2**] S. Rabinowitz, S. Wagon. *A spigot algorithm for the digits of* π. American Mathematical Monthly 102(1995)3, 195–203

[**3**] E.P. Stoschek. *Abenteuer Algorithmus. Ein Arbeitsbuch zur Algorithmenkonstruktion. Teil 2* Dresden 1997

[**4**] E. Philippow. *Grundlagen der Elektrotechnik.* Berlin 1988

[**5**] E. Schwarzenberg. *Struktogramme.* München 1990

[**6**] H.–U. Karl, B. Speck. *Grundlagen der Informatik.* Studienliteratur Informatik. Hamburg, Dresden 1995

[**7**] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, G. Musiol, H. Mühlig. *Taschenbuch der Mathematik.* Thun, Frankfurt am Main 1995

[**8**] M. Abramowitz, C.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.* New York, Dover 1972

[**9**] T.J. Rivlin. *Chebyshev Polynomials.* New York 1990

[**10**] E.W. Weisstein. *Chebyshev Polynomial of the First Kind.* http://www.astro.virginia.edu/~eww6n/math/ChebyshevPolynomialoftheFirstKind.html

[**11**] C.R. Mac Cluer. *Boundary Value Problems and Orthogonal Expansions: Solving Physical Problems from a Sobolev Viewpoint.* IEEE Press 1994

[**12**] C.D. Olds. *Continued Fractions.* Washington 1963

[**13**] *Continued Fractions.* Bibliography/Sources http://www.calvin.edu/~edu/~avtyl52/wnfrac/biblio.html

[**14**] H. Scheid. *Duden. Rechnen und Mathematik.* Mannheim, Wien, Zürich 1985

Bilder

Anett Zschoppe - Z&Z Agentur Dresden
http://zzagentur.de/impressum