Unit n°127

Aus der „Schülerinformatik“ vor 20 Jahren [127] Damalige Unit 50 Mittelwertautomaten

一月普现一切水，

一切水月一月摄。

永嘉玄觉 (665—713)

Ein Mond spiegelt sich in allen Wassern,

Alle Monde im Wasser sind ein und derselbe Mond.

Meister Yung-Chia Hsüan-chüeh

50.1 Mittelwerte und Mittelwert - Algorithmen, historische Reflexionen

50.1.1 Babylon

Bereits die babylonischen (mesopothamischen) Mathematiker (ca. 2000 – 300 v. Chr.) befaßten sich mit dem Problemkreis Mittelwertbildung [1, 2, 3]. So fand die Bildung des arithmetischen Mittels bei der numerischen Berechnung von $\sqrt{2}$ Anwendung (vgl. [4], Baustein 2).

50.1.2 Griechenland

Basierend auf diesen Kenntnissen wurden von den Altpythagoräern (2. Hälfte des 6. Jh. Bis Mitte des 5. Jh. v. Chr.) die Begriffe

arithmetisches Mittel $$\boxed{a(x,y) = \frac{x+y}{2}} \tag{50.1}$$

geometrisches Mittel $$\boxed{g(x,y) = \sqrt{x\,y}} \tag{50.2}$$

$$= (x \cdot y)^{\frac{1}{2}} = \exp\left(\frac{\ln x + \ln y}{2}\right)$$

$$= \exp\left(a(\ln x, \ln y)\right) \qquad \text{und} \tag{50.3}$$

harmonisches Mittel $$\boxed{h(x,y) = \frac{2\,x\,y}{x+y}} \tag{50.4}$$

$$= \left(\frac{1}{2}(x^{-1} + y^{-1})\right)^{-1}$$

$$= \left(a(x^{-1}, y^{-1})\right)^{-1} \tag{50.5}$$

$$= \frac{(g(x,y))^2}{a(x,y)} \tag{50.6}$$

in die griechische Mathematik eingeführt [1].

Aufgabe 1

(a) Geben Sie eine simultane Veranschaulichung $a(x,y)$, $g(x,y)$ und $h(x,y)$ an.

Lösung 1:

$a(x,y) = \frac{x+y}{2}$ – Radius eines Thaleskreises (50.1)

$(g(x,y))^2 = x \cdot y$ – Höhensatz (50.7)

$\frac{h(x,y)}{g(x,y)} = \frac{g(x,y)}{a(x,y)}$ – ähnliche rechtwinklige Dreiecke (50.8)

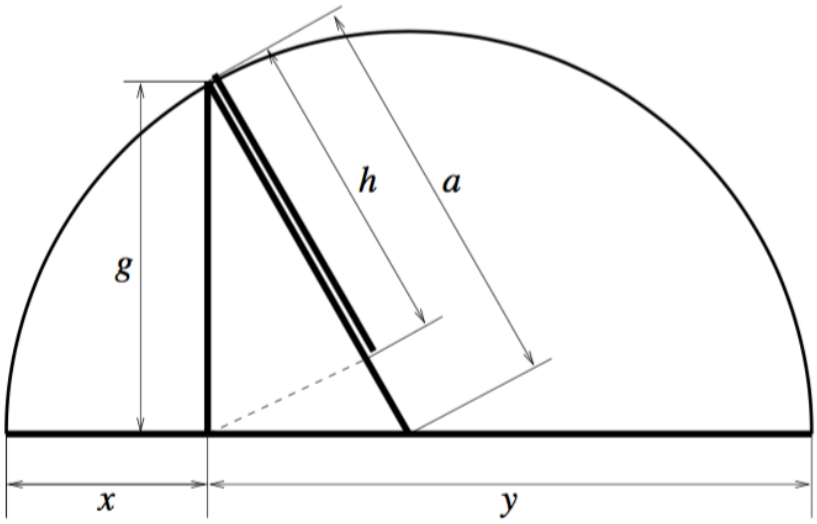


Bild1: Simultane geometrische Veranschaulichung von $a(x,y) \geq g(x,y) \geq h(x,y)$ für $x < y$ nach Pappos von Alexandria (ca. 320 n. Chr.) [5]

Bild 1 besitzt folgende interessante Verallgemeinerung (Pappos-Leiter), die im Bild 2 dargestellt ist.

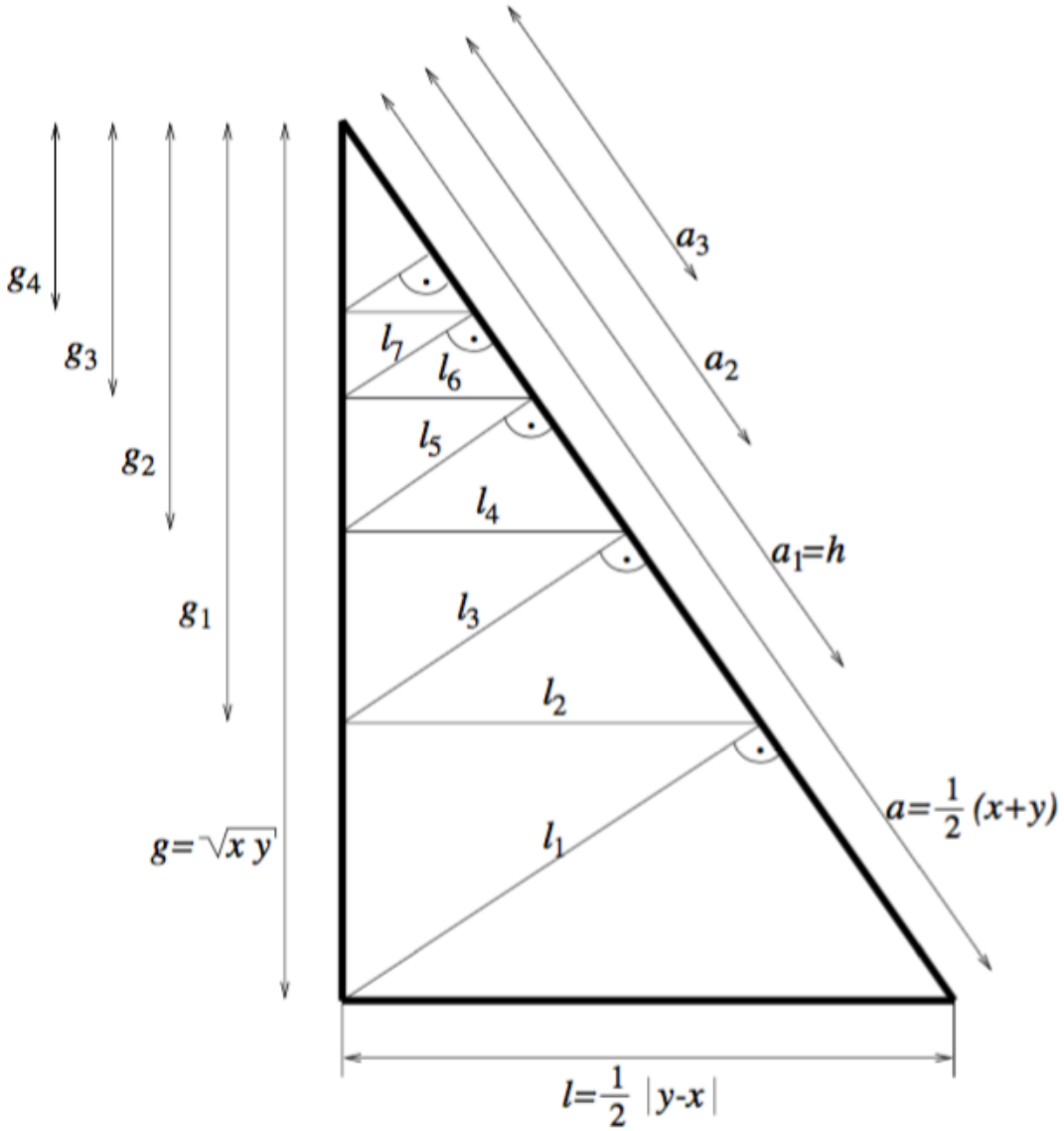


Bild 2: Pappos-Leiter

Hierbei hat man:

$$l_i = l \cdot \left(\frac{g}{a}\right)^i ;\ i = 1, 2, 3, \ldots \tag{50.9}$$

$$a_i = a \cdot \left(\frac{g}{a}\right)^{2i} ;\ i = 1, 2, 3, \ldots \tag{50.10}$$

$$g_i = g \cdot \left(\frac{g}{a}\right)^{2i} ;\ i = 1, 2, 3, \ldots \tag{50.11}$$

Lösung 2:

$$\left.\begin{array}{l} a(x,y) \\ g(x,y) \\ h(x,y) \end{array}\right\} \text{ ist Lösung } z \text{ der Verhältnisgleichung } \quad \frac{z-x}{y-z} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 \\ \frac{x}{z} \\ \frac{x}{y} \end{cases} . \qquad (50.12)$$

Lösung 3:

$a(x,y), g(x,y)$ und $h(x,y)$ sind Speizialfälle des quasiarithmetischen Mittels (arithmetisches Mittel bzgl. Der Funktion *f(z)* mit der Umkehrfunktion inv *f(z)*)

$$qa_f(x,y) = inv\, f(\tfrac{f(x)+f(y)}{2}) , \qquad (50.13)$$

Vgl. Tabelle 1 [6, 7].

$f(z)$	$\mathrm{inv} f(z)$	$qa_f(x,y)$
z	z	$a(x,y)$
$\ln z$	e^z	$g(x,y)$
z^{-1}	z^{-1}	$h(x,y)$
z^2	$z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{z}$	$\sqrt{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ quadratisches Mittel
z^p	$z^{\frac{1}{p}}$	$\sqrt[p]{\frac{1}{2}(x^p+y^p)}$ p–tes Potenzmittel
z^p $p \to +\infty$	z^{-p}	$\max(x,y)$
$p \to -\infty$		$\min(x,y)$

Tabelle 1: Spezielle $qa_f(x,y)$

(b) Loten Sie die in (a) betrachteten Lösungen weiter aus.

(c) Zeigen Sie, daß alle in Tabelle 1 angegebenen Spezialfälle des $qa_f(x,y)$ auf Spezialfälle von

$$f(z) = z^p \qquad (50.14)$$

Zurückgeführt werden können (vgl. [7]). Erweitern Sie Tabelle 1 durch Hinzunahme weiterer charakteristischer Funktionen $f(z)$.

Wird fortgesetzt.

Reference:

[127] E.P. Stoschek. Abenteuer Algorithmus.
Teil 3. S. 21-24
Dresden University Press 1998
ISBN 3-931828-77-8