Unit n° 11.1

New

Places of interest near Benford`s Law backloaded

DAC Modul 45 von 2002 überarbeitet

In großen Mengen von Dezimalzahlen, die gleichartige natürliche oder soziale Systeme, Objekte, Situationen,... beschreiben,

z.B. Oberflächen von Seen in einem Land,
Halbwertszeiten der α-Umwandlung radioaktiver Isotope,
jährliche Stromrechnungen in einer Großstadt,
mathematische, physikalische und statistische Tabellen,

gilt sehr oft (vgl. [6,8,10,19,20,21] in Näherung für die relative Häufigkeit (→ Wahrscheinlichkeit) p_k, dass in einer solchen Zahl die linksseitig erste Ziffer $k \in \{1,2,3,..,9\}$ ist:

$$p_k = \lg\left(1+\frac{1}{k}\right) \quad - \quad \text{Benford`s Law [1-4,7,8,25-29,33-37]} \qquad (1)$$

Dieser zunächst empirische Befund [27,28] ist in der Literatur mit unterschiedlichstem Material gut belegt [1,2,6,8,11,14]. Eine umfassende mathematische Fundierung (Erklärung, Herleitung, Gültigkeitsbereich,..) existiert bisher nicht (vgl. [7], aber auch [6,8,10,19,20,21,33-37]). In [29] ist gezeigt, dass Benford`s Law skalierungsinvariant ist (also bei Wechsel der Maßeinheit bzw. Multiplikation aller Zahlen der betreffenden Zahlenmenge mit einem konstanten Faktor ebenfalls gilt). Die nachstehenden Beispiele zeigen, dass Benford`s Law überraschenderweise auch für (dimensionslose) Zahlenmengen Gültigkeit besitzt, die durch bestimmte rein mathematische „Generatoren“ erzeugt werden.

<u>Beispiel 1</u>

Berechnet man für $n >> 1$ im Intervall [0,2π] zufällig ausgewählte x-Werte,

$$x = \text{random}[0, 2\pi] \; ; \; x \notin \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi\right\} \tag{2}$$

aus dem Ausdruck

$$y = \tan^2(x) \tag{3}$$

die zugehörigen y-Werte, so sind deren linksseitig erste Ziffern Benford-verteilt [5]. Bild 1 und Bild 2 zeigen experimentell erhaltene Verläufe der $p_k(n)$.

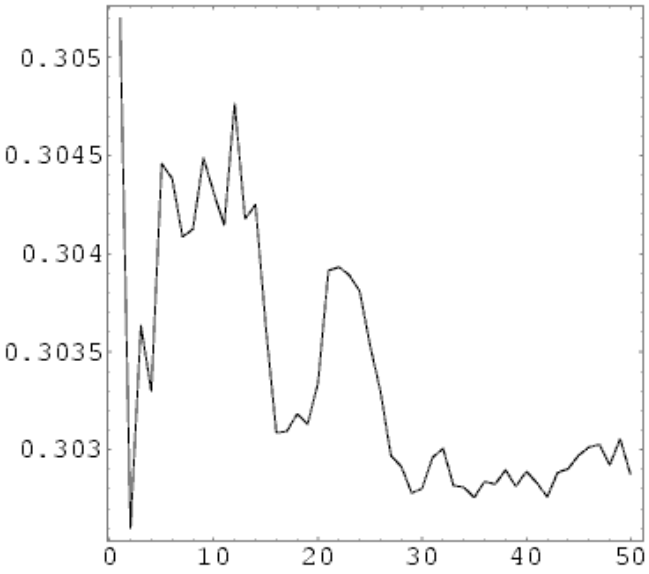


Bild 1

Verlauf von $p_1(n)$
für $n = 10^4 \left(10^4\right) 50 \times 10^4$

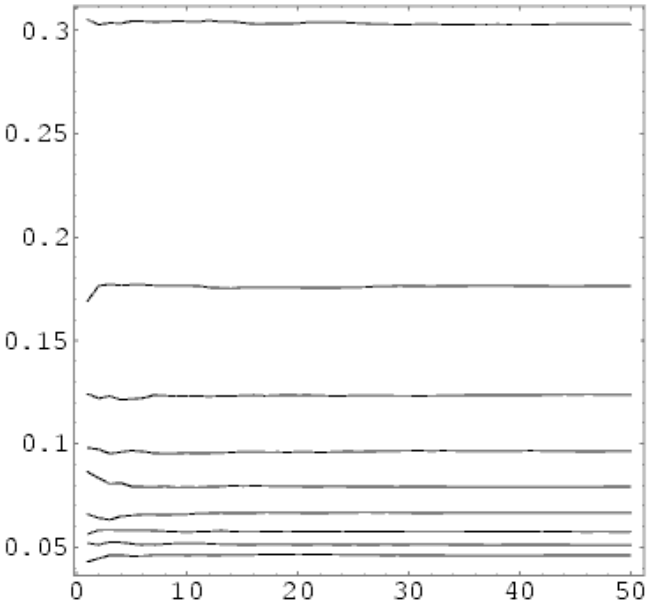


Bild 2

Verläufe der $p_k(n)$
für $k = 1(1)9$ und
$n = 10^4 \left(10^4\right) 50 \times 10^4$

Schon für n = 10^5 stimmen die experimentell erhalten $p_k(n)$ - Werte sehr gut mit Gl. (1) überein!

k	Experiment $p_k\left(10^5\right)$	Benford p_k
1	0,30038	0,30103
2	0,17721	0,17609
3	0,12501	0,12494
4	0,09664	0,09691
5	0,07911	0,07918
6	0,06742	0,06695
7	0,05857	0,05799
8	0,05027	0,05115
9	0,04539	0,04576

17.1.

Untersuchen Sie in der gleichen Weise die Generatoren

$$y = |\tan(x)| \quad ; \quad x = \text{random}[0, 2\pi] \tag{4}$$

$$y = \sin^2(x) \quad ; \quad x = \text{random}[0, 2\pi] \tag{5}$$

$$y = (\text{artanh}(x))^2 \quad ; \quad x = \text{random}[-1, +1] \tag{6}$$

sowie weitere von Ihnen ausgewählte Generatoren. Diskutieren Sie die erhaltenen Ergebnisse.

17.2.

Zeigen Sie wie in Beispiel 1 experimentell, dass auch für

$$y = A \cdot \tan^2(x);\ x = \text{random}[0, 2\pi]\ ;\ A \in R_+ \tag{7}$$

die linksseitig ersten Ziffern der erhaltenen y-Werte Benford-verteilt sind – Skalierungsinvarianz.

Beispiel 2

Das m-stellige Ternärwort w über dem Alphabet {0,1,2}, dessen Zeichen 2x2-Matrizen sind

$$\underline{0}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\underline{1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\underline{2}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot \tag{8}$$

werde als Matrizenprodukt über dem Körper der reellen Zahlen interpretiert. <u>w</u> transformiert dann den Vektor $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ in den Vektor $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\underline{w}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}. \tag{9}$$

Beispiel:

$$\underline{w}=\underline{1}\underline{2}\underline{0}\underline{2}\underline{1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 3\\ 37 & 14\end{pmatrix} \tag{10}$$

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\underline{w}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 3\\ 27 & 17\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17\\79\end{pmatrix} \tag{11}$$

Berechnet man für m = 0,1,2,3,4,5.. jeweils alle 3^m möglichen Ternärwörter <u>w</u> und die zugehörigen Vektoren $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$, so kann man für jedes m die Anzahl a(m,k) der Zahlen u und v bestimmen, deren erste Ziffer von links eine 1, 2, .., 9 ist.
Für die relative Häufigkeit (→ Auftrittswahrscheinlichkeit) der linksseitigen ersten Ziffer $k\in\{1,2,3,..,9\}$ in u und v

$$p(m,k)=\frac{a(m,k)}{2\cdot 3^m} \tag{12}$$

erhält man dann nachstehende Wertetabelle:

m	p(m,1)		p(m,2)	
1	$\frac{1}{6}$	$=0,\overline{16}$		
2	$\frac{7}{18}$	$=0,\overline{38}$		
3	$\frac{22}{54}$	$=0,\overline{407}$	$\frac{11}{54}$	$=0,\overline{2037}$
4	$\frac{42}{162}$	$=0,\overline{259}$	$\frac{35}{162}$	$=0,216049$
5	$\frac{111}{486}$	$=0,228395$	$\frac{58}{486}$	$=0,119342$
6	$\frac{568}{1458}$	$=0,389575$	$\frac{252}{1458}$	$=0,1728395$

7	$\frac{?}{4374}$ =	
8	$\frac{?}{13122}$ =	
9	$\frac{?}{39366}$ =	
10	$\frac{?}{118098}$ =	

Die zugehörigen Mittelwerte sind

$$\overline{p(m,1)} = 0,306699$$
$$\overline{p(m,2)} = 0,177984 \quad ; \qquad (13)$$

diese liegen erstaunlich nahe bei

$$p_1 = 0,301029 \text{ bzw. } p_2 = 0,176091 \text{ !} \qquad (14)$$

17.3.

Vervollständigen Sie die p(m,k) Wertetabelle und vergleichen Sie die erhaltenen Werte bzw. Mittelwerte mit Gl. (1).
Diskutieren Sie das erhaltene Ergebnis. Offensichtlich liegt hier im Gegensatz zu Beispiel 1 ein Generator ohne stochastischen Input vor.

Beispiel 3

Für die ersten 100 Glieder der Fibonacci-Folge $<fib(i)>_{i=1} = <1,1,2,3,5,..>$ **mit**

$$fib(1) = fib(2) = 1 \qquad (15)$$
$$fib(i+2) = fib(i+1) + fib(i) \; ; \; i = 1,2,3,.. \qquad (16)$$

findet man die nachstehenden relativen Häufigkeiten $p_k(100)$ der linksseitig ersten Ziffer $k \in \{1,2,3,..,9\}$ **[12]:**

k	Fibonacci $p_k(100)$	Benford p_k
1	$\frac{30}{100} = 0,3$	0,30103
2	$\frac{18}{100} = 0,18$	0,17609

3	$\frac{13}{100}$	$=0,13$	0,12494
4		0,1	0,09691
5		0,08	0,07918
6		0,07	0,06695
7		0,06	0,05799
8		0,05	0,05115
9		0,05	0,04576

und damit eine gute Übereinstimmung mit Benford`s Law.

17.4.

Untersuchen Sie für die Beispiele 1, 2 und 3 analog zur Häufigkeitsverteilung für die linksseitig erste Ziffer $p_k = p_{k,1}$; $k \in \{1,2,3,..,9\}$ die Häufigkeitsverteilungen für die linksseitig zweite $p_{k,2}$, dritte $p_{k,3}$,.. Ziffer. Diskutieren Sie die erhaltenen Ergebnisse und vergleichen Sie sie mit [6,8,14,19,20]. Formulieren Sie nun für die Häufigkeitsverteilungen ein einfaches mathematisches Modell.

Lösungshinweis

In Beispiel 1 ist		[8,14]
k	$p_{k,2}\left(10^5\right)$	$p_{k,2}$
0	0,11976	0,11968
1	0,11323	0,11389
2	0,10833	0,10882
3	0,10404	0,10433
4	0,10181	0,10031
5	0,09626	0,09668
6	0,09369	0,09337
7	0,09009	0,09035
8	0,08843	0,08757
9	0,08436	0,08500

17.5.

Untersuchen Sie weitere „Benford-Kandidaten“ im Bereich der Mathematik (insbesondere Primzahlen (wie in Beispiel 3, vgl. [13]), störungsfreie Kodes, Kryptodes) und der Physik.

17.6.

Stellen Sie in der Literatur [8,10,11,15,16,17,18,19,21,23,24] beschriebene Anwendungen von Benford`s Law in den Bereichen

- **Datenanalyse (Abweichungen bei erwartbarer Benford-Verteilung weisen auf unvollständige Datenerhebung, systematische Fehler, Manipulation (z.B. Steuererklärung,..),.. hin).**
- **Engineering Applications (vgl. [8,19])**
- **...**

zusammen.

17.7.

In [22] wird der Versuch beschrieben, aus dem bisher bei Ultraschalluntersuchungen von Werkstoffen als störender Signaluntergrund betrachteten Phononen-Rauschen Informationen über den inneren Aufbau des Werkstoffes zu gewinnen:

Noise generated in an ultrasonic receiver consisting of transducer and amplifier is usually ignored, or treated as a nuisance. Here it is argued that acoustic thermal fluctuations, with displacement amplitudes of 3 fm, contain substantial ultrasonic information. It is shown that the noise autocorrelation function is the waveform that would be obtained in a direct pulse/echo measurement. That thesis is demonstrated in experiments in which direct measurements are compared to correlation functions. The thermal nature of the elastodynamic noise that generates these correlations is confirmed by an absolute measurement of their strength, essentially a measurement of the sample temperature.

Diese Idee und ihre erfolgreiche Realisierung legt nahe, „Schwankungen“ um p_k (vgl. Beispiel 1, Bild 1 und Bild 2; [13])

ebenfalls als ein informationstragendes Rauschen zu betrachten und entsprechend auszuwerten. Untersuchen Sie diesen Ansatz experimentell.

17.8.

Der Cusanus-Algorithmus (A1)

x:=a; y:=b
$x := \frac{1}{2}(x+y)$
$y := \sqrt{xy}$
$\lvert y - x \rvert \le \varepsilon$
$c(\varepsilon) := y$

(A1)

liefert für die Initialisierung		mit der angegebenen Genauigkeit ε	
a	b	c	
0	1	$\frac{2}{\pi}$	(17)
$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{\ln 2}$	(18)
$\frac{101}{99}$	$\frac{20}{99}$	$\frac{1}{\ln 10}$	(19)

Das Abarbeitungsprotokoll von (A1) zeigt für Gl. (17) bei der Rechnung mit 16 Nachkommastellen folgenden Werteverlauf von x(t) und y(t).

t	x(t)	y(t)
0	0,0	1,0
	|5	|1
1	0,5	0,7071067811865476
	|1	|1
2	0,6035533905932737	0,6532814824381883
	|2	|1
3	0,6284174365157310	0,6407288619353766
	|1	|1
4	0,6345731492255537	0,6376435773361455
	|2	|1
5	0,6361083632808496	0,6368755077217536
	|3	|2
6	0,6364919355013017	0,6366836927259823
	|1	|5
7	0,6365878141136421	0,6366357516148734
	|1	|1
⋮		
	|1	|1
22	0,6366197723675517	0,6366197723675964
	|2	|1
23	0,6366197723675740	0,6366197723675852
	|5	|3
24	0,6366197723675796	0,6366197723675824
	|1	|1
25	0,6366197723675810	0,6366197723675817
	|4	|2
26	0,6366197723675814	0,6366197723675815
	|1	
27	0,6366197723675815	0,6366197723675815

In dieser Tabelle ist der jeweils linksseitig erste Ziffernänderungsbetrag $k \in \{1,2,3,..,9\}$ von x(t) auf x(t+1) und von y(t) auf y(t+1) eingetragen. Für die Ziffernänderungsbeträge erhält man dann folgende Häufigkeitsverteilung

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p_k(16)$	$\frac{30}{53}$	$\frac{11}{53}$	$\frac{5}{53}$	$\frac{2}{53}$	$\frac{3}{53}$	$\frac{1}{53}$	$\frac{1}{53}$	$\frac{0}{53}$	$\frac{0}{53}$
	0,5660	0,2075	0,0943						

,

die die Ziffer 1 deutlich priorisiert.
Die entsprechende Rechnung mit 100 Nachkommastellen liefert folgendes Bild:

$\frac{2}{\pi}$

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p_k(100)$	$\frac{153}{298}$	$\frac{61}{298}$	$\frac{34}{298}$	$\frac{16}{298}$	$\frac{16}{298}$	$\frac{10}{298}$	$\frac{3}{298}$	$\frac{3}{298}$	$\frac{0}{298}$
	0,5134	0,2042	0,1141						

$\frac{1}{\ln 2}$

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p_k(100)$	$\frac{156}{298}$	$\frac{49}{298}$	$\frac{35}{298}$	$\frac{20}{298}$	$\frac{16}{298}$	$\frac{11}{298}$	$\frac{4}{298}$	$\frac{7}{298}$	$\frac{0}{298}$
	0,5235	0,1644	0,1174						

$\frac{1}{\ln 10}$

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p_k(100)$	$\frac{166}{298}$	$\frac{53}{298}$	$\frac{26}{298}$	$\frac{20}{298}$	$\frac{16}{298}$	$\frac{10}{298}$	$\frac{5}{298}$	$\frac{2}{298}$	$\frac{0}{298}$
	0,5570	0,1779	0,0872						

Man erkennt im Rahmen der erwartbaren Schwankungsbreite eine eindeutige Rangfolge der Ziffernhäufigkeit mit derselben Tendenz wie gemäß Benford`s Law aber offensichtlich mit anderen Häufigkeitswerten.

- **Untersuchen Sie diesen Sachverhalt für die Berechnung von $\frac{2}{\pi}$, $\frac{1}{\ln 2}$ und $\frac{1}{\ln 10}$ mittels (A1) mit größerer Anzahl m von Nachkommastellen. Welche Grenzwerte ergeben sich dabei für die $p_k(m)$?**
- **Untersuchen Sie in derselben Weise die Berechnung von speziellen Zahlenwerten mittels einer repräsentativen Auswahl anderer Algorithmen bzw. Bildungsgesetzen. Welche Grenzwerte ergeben sich dabei für die $p_k(m)$?**

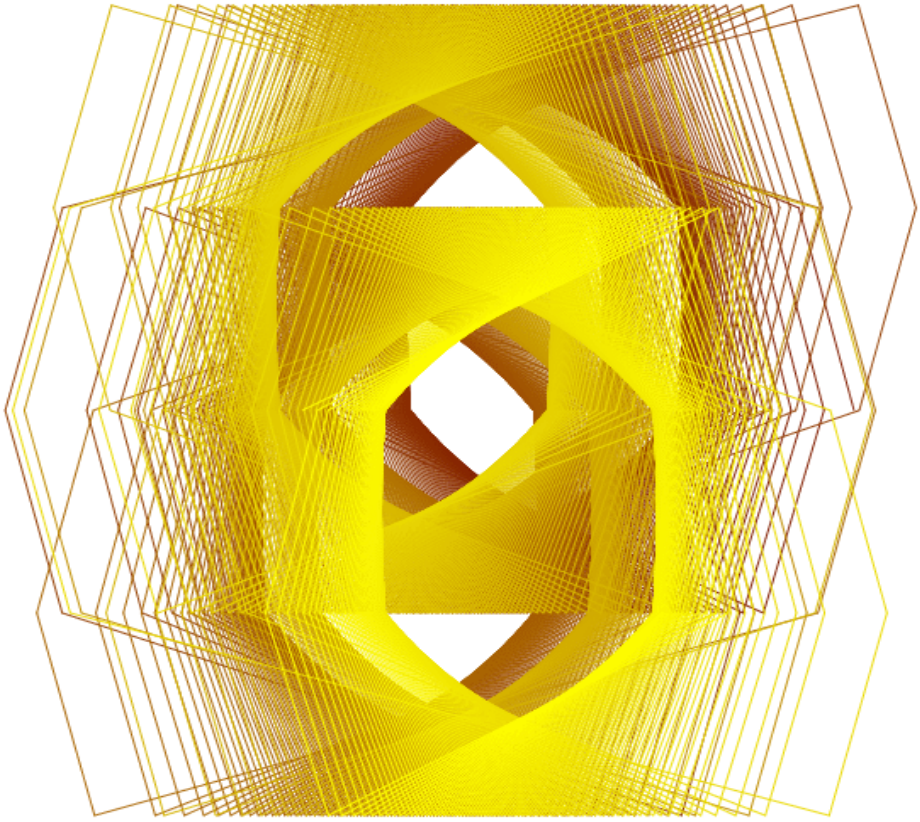
Beispiel

$$x(t) = \left(\frac{2t+1}{2t-1}\right)^t \; ; \; \lim_{t\to\infty} x(t) = e$$

Für m = 300 und $1 \le t \le t_{end}$ erhält man

t_{end}	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9
100	$0,\overline{56}$	$0,\overline{16}$	$0,\overline{09}$	$0,\overline{06}$	$0,\overline{05}$	$0,\overline{02}$	$0,\overline{01}$	$0,\overline{04}$	0,0
200	0,572864	0,170854	0,105528	0,0452261	0,0301508	0,0251256	0,0150754	0,0351759	0,0
1000	$0,\overline{574}$	$0,\overline{155}$	$0,\overline{084}$	$0,\overline{050}$	$0,\overline{057}$	$0,\overline{039}$	$0,\overline{020}$	$0,\overline{016}$	$0,\overline{004}$
2000	0,578289	0,170085	0,0925463	0,0445223	0,0335168	0,036018	0,026013	0,0135068	0,00550275

- **Läßt sich für die erhaltenen Grenzwerte der p_k ein Bildungsgesetz analog zu Benford`s Law angeben?**



$$
\begin{aligned}
<\pi> &= 3\ \underbrace{1\ 4\ 1\ 5\ 9\ 2\ 6\ 5\ 3\ 5\ 8\ 9\ 7}\ \ldots \\
<D1\pi> &= \underbrace{2\ 3\ 3\ 4\ 4\ 7\ 4\ 1\ 2\ 2\ 3\ 1\ 2}\ \ldots \\
<D2\pi> &= \underbrace{1\ 0\ 1\ 0\ 3\ 3\ 3\ 1\ 0\ 1\ 2\ 1}\ \ldots
\end{aligned}
$$

Frequency p_k of digits k in $<\pi>, <D1\pi>, <D2\pi>$:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p_k(\pi) \to$	0,1									
$p_k(D1\pi) \approx$	0,10	0,18	0,16	0,14	0,12	0,10	0,08	0,06	0,04	0,02
$p_k(D2\pi) \approx$	0,14	0,246	0,191	0,147	0,109	0,076	0,048	0,028	0,011	0,004

Places of interest near Benford's Law

Signa in silico 2002

17.9.

Ein ähnlich überraschendes Ergebnis wie in 17.8. findet man bei der Analyse der Ziffernfolge von mathematischen Konstanten unterschiedlichster Art (vgl. [32]). Bildet man z.B. für die (gleichverteilte) Ziffernfolge von p wie nachstehend den 1., 2., 3., .. Differenzbetrag aufeinanderfolgender Ziffern

$$\langle \pi \rangle_{t=0}^{t_e} = 3\ 1\ 4\ 1\ 5\ 9\ 2\ 6\ 5\ 3\ 5\ 8\ 9\ 7\ \ldots$$

$$\langle D1\pi \rangle = \ 2\ 3\ 3\ 4\ 4\ 7\ 4\ 1\ 2\ 2\ 3\ 1\ 2\ldots$$

$$\langle D2\pi \rangle = \ \ 1\ 0\ 1\ 0\ 3\ 3\ 3\ 1\ 0\ 1\ 2\ 1\ldots$$

$$\langle D3\pi \rangle = \ \ \ 1\ 1\ 1\ 3\ 0\ 0\ 2\ 1\ 1\ 1\ 1\ldots$$

$$\langle D4\pi \rangle = \ \ \ \ 0\ \ 0\ \ 2\ \ 3\ \ 0\ \ 2\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ldots\ ,$$

$$\vdots$$

so ergibt sich für t_e = 10.000 die folgende Ziffernhäufigkeitsverteilung

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p_k(\pi)$	0,0968	0,1026	0,1021	0,0975	0,1012	0,1046	0,1021	0,0969	0,0948	0,1014
$p_k(D1\pi)$	0,0945095	0,183818	0,157416	0,144814	0,122612	0,0975098	0,0810081	0,0571057	0,0386039	0,0227023
$p_k(D2\pi)$	0,139728	0,247149	0,196139	0,14863	0,107321	0,0717143	0,0481096	0,0268054	0,0106021	0,0040008
$p_k(D3\pi)$	0,179054	0,305092	0,208663	0,138442	0,0835251	0,0475143	0,0256077	0,00850255	0,00320096	0,00070021
$p_k(D4\pi)$	0,234694	0,352741	0,198479	0,112745	0,0563225	0,030112	0,0109044	0,00330132	0,00080032	0,00030012
$p_k(D5\pi)$	0,276338	0,397199	0,187594	0,0826413	0,0358179	0,0151076	0,00450225	0,00090045	0,00030015	0,00010005

Ganz ähnliche Werte erhält man für e, γ = 0,557216.. (Euler-Mascheroni-Konstante), G = 0,915966.. (Catalansche Konstante), $\Phi = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right).\sqrt{2}$,.. So ist für die 1. und 2. Differenz bei t_e = 100.000:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p_k(D1\pi)$	0,099571	0,182612	0,157872	0,139551	0,120221	0,099271	0,0809108	0,0592406	0,0405204	0,0202402
$P_k(D1e)$	0,100561	0,181102	0,158362	0,139351	0,120911	0,100691	0,0800408	0,0593506	0,0396304	0,0200102
$P_k(D1\gamma)$	0,098961	0,181832	0,158932	0,140491	0,120191	0,099231	0,0798008	0,0595806	0,0409504	0,0200402
$p_k(D1G)$	0,100511	0,182512	0,159892	0,138551	0,121201	0,099841	0,0792608	0,0595706	0,0391304	0,0195402
$p_k(D1\Phi)$	0,100241	0,182402	0,158372	0,139631	0,119751	0,100361	0,0811108	0,0581306	0,0401004	0,0199102
$p_k(D1\sqrt{2})$	0,099881	0,181542	0,158452	0,141951	0,120411	0,099661	0,0786708	0,0606506	0,0392604	0,0195302
$p_k(D1\sqrt[3]{7})$	0,100811	0,179802	0,160232	0,138821	0,119441	0,099581	0,0814808	0,0602206	0,0394304	0,0201902
$p_k(D1) \approx$	0,10	0,18	0,16	0,14	0,12	0,10	0,08	0,06	0,04	0,02

PS: Gibt es vielleicht doch Unterschiede, z. B. in den Rauschspektren der p_k (D1..), vgl. <u>17.7.</u>

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p_k(D2\pi)$	0,139783	0,245665	0,191054	0,147183	0,108702	0,0756715	0,047831	0,0282506	0,0116102	0,00427009
$P_k(D2e)$	0,139203	0,243065	0,194404	0,148723	0,107352	0,0756415	0,049141	0,0271505	0,0113802	0,00396008
$P_k(D2\gamma)$	0,139913	0,244795	0,192714	0,147663	0,107952	0,0753815	0,0469409	0,0282906	0,0122602	0,00411008
$p_k(D2G)$	0,140273	0,245655	0,190924	0,147793	0,109462	0,0734415	0,049351	0,0269605	0,0116502	0,00451009
$p_k(D2\Phi)$	0,139583	0,244545	0,192824	0,147193	0,109062	0,0755915	0,047751	0,0280306	0,0115102	0,00393008
$p_k(D2\sqrt{2})$	0,141193	0,242945	0,193804	0,148033	0,106562	0,0748115	0,0474109	0,0292106	0,0122902	0,00376008
$p_k(D2\sqrt[3]{7})$	0,140133	0,241595	0,191324	0,147623	0,109752	0,0752715	0,049791	0,0282306	0,0121802	0,00412008
$p_k(D2) \approx$	0,14	0,244	0,192	0,147	0,108	0,0751	0,0483	0,028	0,0118	0,00409

- **Untersuchen Sie in derselben Weise andere mathematische Konstanten und Funktionswerte [30, 31].**
- **Welches mathematische Modell (vgl. Gl. (1)) liegt den gefundenen p_k(D i) -Werten zugrunde?**

<u>17.10.</u>

Auch die durch <u>17.9.</u> induzierte Analyse bestimmter Ziffernhäufigkeiten in der Primzahlfolge liefert „Places of interest near Benford`s Law“. Hierfür sollen zwei Beispiele stehen.

<u>Beispiel 1</u>

In der

Primzahlfolge $\langle pr(t)\rangle_{t=2}^{te}$ **=**

3 , 5 , 7 , 11 , 13 , 17 , 19 , 23 , 29 , 31 , 37 , 41 , 43 , ..

2 2 6 2 4 2 6 6 8 6 6 2 ..

werden die Differenzbeträge der letzten Ziffern aufeinanderfolgender Primzahlen gebildet. Die dabei erhaltenen Ziffern 0, 2, 4, 6 und 8 zeigen folgendes, stark von der Gleichverteilung abweichendes Häufigkeitsspektrum.

t_e	p_0	p_2	p_4	p_6	p_8
20000	0,14525	0,27265	0,1462	0,30385	0,132
40000	0,149225	0,27205	0,14495	0,299925	0,133825
60000	0,151517	0,271067	0,14415	0,2999	0,13335
80000	0,153563	0,271275	0,1435	0,297613	0,134038
100000	0,1533	0,27252	0,14347	0,29635	0,13435
150000	0,15474	0,2724	0,143033	0,294833	0,134987
200000	0,156575	0,271765	0,1436	0,29291	0,135145
300000	0,158837	0,271773	0,142923	0,291657	0,134807
500000	0,161332	0,27122	0,142742	0,289706	0,134998

Beispiel 2

In der Primzahlfolge $\langle pr(t)\rangle_{t=2}^{t_e}$ werden die Differenzen pr(t+1)-pr(t) gebildet. Deren letzte Ziffern besitzen dann nachstehende Häufigkeitsverteilung.

t_e	p_0	p_2	p_4	p_6	p_8
20000	0,14525	0,25345	0,2044	0,24565	0,1512
40000	0,149225	0,25005	0,2054	0,239475	0,155825
60000	0,151517	0,249017	0,205483	0,238567	0,1554
80000	0,153563	0,248238	0,203963	0,23715	0,157075
100000	0,1533	0,24815	0,2037	0,23612	0,15872
150000	0,15474	0,247013	0,203553	0,234313	0,160373
200000	0,156575	0,24558	0,203185	0,23335	0,16133
300000	0,158837	0,244097	0,202927	0,231653	0,162483
500000	0,161332	0,242084	0,202036	0,230412	0,164134

- **Diskutieren Sie diese Ergebnisse.**

Reference:

[1] Weisstein, E.W. CRC Concise Encyclopedia of Mathematics. Boca Raton, London, New York, Washington 1999, pp. 107-108, 12 Ref.

[2] Weisstein, E.W. Benford`s Law. mathworld.wolfram.com/BenfordsLaw.html 23 Ref.

[3] Bogomolny, A. Benford`s Law and Zipf`s Law. www.cut-the-knot.com/do_you_know/zipfLaw.html

[4] Benford`s Law. www.mathpages.com/home/kmath302/kmath302.htm

[5] Geometrical interpretation and generation of Benford sets. A new approach to Benford`s Law. www.geocities.com/timeparadox/elmushi.htm

[6] Hayward, J. The first Digit Law. A Statistical Derivation of Benford`s Law. www.doc.ic.ac.uk/~srueger/pr-suprema-1999/Justin-Hayward/main-page.html

[7] Mörters, P. Benfords Gesetz über die Verteilung der Ziffern. www.bath.ac.uk/~maspm/benford.ps

[8] Nigrini, M.J. Digital Analysis Using Benford`s Law: Test Statistics for Auditors. Vancouver 2001

[9] Knuth, D.E. The Art of Computer Programming. Vol. 2 Reading,.., Mexico City 1998, pp. 253-264

[10] Albrecht, J. Die Eins vom Planeten Zob – Ein bizarres mathematisches Gesetz über die Häufigkeit von Zahlen hilft, Steuersündern und Spendengaunern auf die Spur zu kommen. www.mathematik.uni-karlsruhe.de/Presse/eins_bearb.html

[11] Browne, M.W. Following Benford`s Law, or Looking Out for No. 1. www.math.yourku.ca/Who/Faculty/Brettler/bc_98/benford.html

[12] Knott, R. The Mathematics of the Fibonacci Series. www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibmaths.html

[13] Caldwell, C.K. Does Benford`s Law apply to prime numbers? www.utm.edu/research/primes/notes/faq/BenfordsLaw.html

[14] Lombardi, G. Benford`s Law. mrcla.com/Benford/Benford-pres/index.htm

[15] Maney, K. Baffled by math?
www.usatoday.com/life/cyber/ccarch/cckov050.htm
[16] Stanek, S.: Applying Benford`s Law to internal audit.
ww3.knowledgespace.com/HI/6C7F272B1A1A1975062569190054D7E0.htm
[17] Understanding Benford`s Law.
www.auditsoftware.net/infoarchive/articles/benford/benfordact.pdf
[18] Berton, L. He`s Got Their Number: Scholar Uses Math to Foil Financial Frand. The Wall Street Journal, July 10, 1995, p. Bd
[19] Nigrini, M.J. The peculiar patterns of first digit. Their effective use in engineering business management. IEEE Potentials April/May 1999, pp. 24-27, 10 Ref.
[20] Nigrini, M.J. I`ve Got Your Number.
www.aicpa.org/pubs/jofa/may1999/nigrini.htm
[21] Zmija, M. Digitale Ziffernanalyse.
www.zmija.de/ziffernanalyse.htm
[22] Weaver, R.L.; Lobkis, O.I. Ultrasonic without a Source: Thermal Fluctuation Correlations at MHz Frequencies. Physical Review Letters 87(2001),134301
[23] The Institute of Internal Auditors. Financial Investigation Using Data Analysis Technology.
www.theiia.org/iia/seminardetails.cfm?semID=95
[24] Benford`s Law Applied to Audit and Fraud Detection.
www.acl.com/en/abouta/abouta_pressa_pres56.asp
[25] Benford`s Law Part 1 – How to Spot Tax Fraud.
www.intuitor.com/statistics/Benford`s%20Law.html
[26] Benford`s Law Part 2 – The 80/20 Rule ord Pareto Principle.
www.intuitor.com/statistics/Benford`s%20Law2.html
[27] Newcomb, S. Note on the frequency of use of the different digits. Amer. Journal Math. 4(1981), pp. 39-40
[28] Benford, F. The Law of Anomalous Numbers. Proc. of the American Philosophical Society 78(1938), pp. 551-571
[29] Pinkham, R. On the Distribution of First Significant Digits. Annals of Mathematical Statistics 32(1961), pp. 1223-1230
[30] Finch, S. MathSoft Constants.
www.mathcad.com/library/constants/index.htm
[31] Plouffe, S. Tables of Constants.
www.lacim.uqam.ca/pi/table.html

[32] Delahaye, J.-P. p - die Story. Basel, Boston, Berlin 1999. Kapitel 10
[33] Schatte, P. On Mantissa Distributions in Computing and Benford`s Law. J. Inf. Process. Cybern. EIK 24(1988)9, pp. 443-455, 62 Ref.
[34] Schatte, P. On Measures of Uniformly Distributed Sequences and Benford`s Law. Monatsh. Math. 107(1989), pp. 245-256
[35] Hill, T.P. Base-invariance Implies Benford's Law. Amer. Math. Soc. 123(1995), pp. 887-895
[36] Hill, T.P. A statistical Derivation of the Significant-digit Law. Statistical Science 10(1996), pp. 354-363
[37] Schatte, P. On Benford's Law to Variable Base. Stat. & Probab. Letters 37(1998), pp. 391-397

E.P.Stoschek unter Mitarbeit von D.Schönfeld (Berechnungen, Grafiken)
07.03.2002