Unit 1
Excavation 2
Aus der „Schülerinformatik“ vor 20 Jahren

Modul 20 [3] 23. Oktober 1998

Algorithmenkonstruktion mit dem Modell Motor–Stabilisator–Last
Teil 2

Das in Modul 19 vorgestellte Modell Motor–Stabilisator–Last, dessen einfachste Realisierungsvariante, der dA Bild 1,

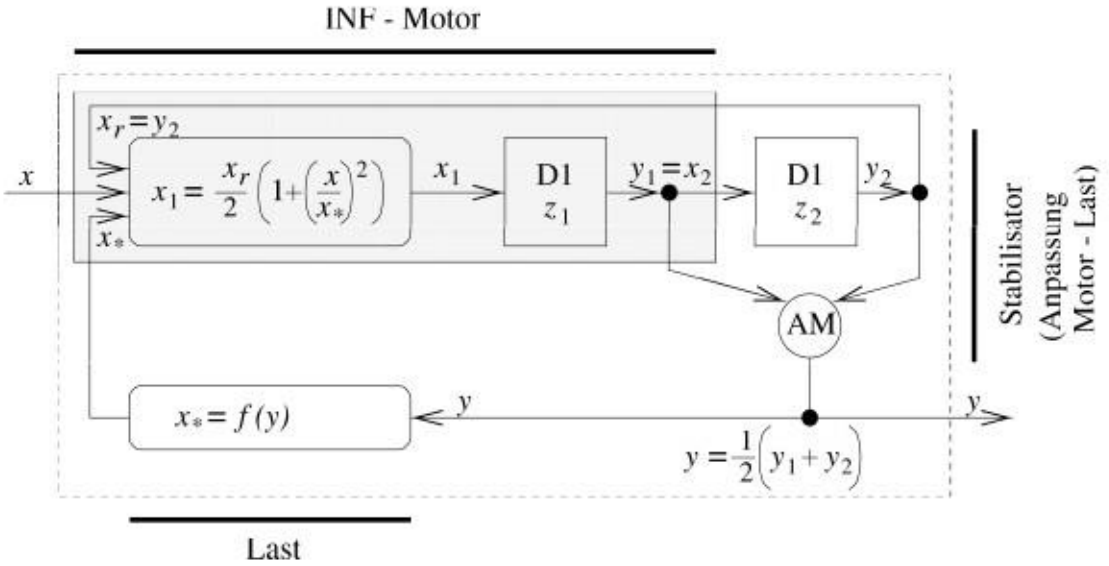


Bild 1: Iterativer Inverter $x = f(y) \rightarrow y = \mathrm{inv}f(x)$

eine in den Lastzweig eingeschaltete einstellige Funktion

$$x = f(y) \tag{1}$$

invertiert, d.h.

- bei konstanter Eingabe des Funktionswertes $x \in \mathbb{R}_+$
- nach einem kontraktiven Einschwingvorgang
- mit erforderlicher Genauigkeit einen zugehörigen Argumentwert

$$y = \mathrm{inv}f(x) \in \mathbb{R}_+ \tag{2}$$

ausgibt,

[3] Modul 20 ist eine überarbeitete und gekürzte Fassung von Kapitel 4 aus:
E.P. Stoschek. *Abenteuer Algorithmus. Teil 2*, Dresden 1997.
Mit freundlicher Genehmigung des Verlages Dresden University Press.

legt – insbesondere durch Ausloten des sehr wirksamen Konstruktionsprinzips Bild 1 – nahe, in ähnlicher Weise die Inversion mehrstelliger Funktionen

$$x = f(y_1, y_2, \ldots, y_n) \tag{3}$$

oder mit anderen Worten: die Zerlegung von x bezüglich der Funktion f in die Komponenten $y_1, y_2, \ldots, y_n$ durch einen „Zerlegungsautomaten" zu realisieren.

Die Tragfähigkeit dieses Ansatzes, der eine nochmalige und höhergradige Erweiterung des dynamischen Inputfolgers darstellt, soll nun ebenfalls experimentell überprüft und ausgelotet werden.
Dabei wird mit den einfachsten symmetrischen n–stelligen Funktionen

$$x = f_+(y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_1 + y_2 + \ldots + y_n \text{ (additive Zerlegung von } x) \tag{4}$$

und

$$x = f_\bullet(y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n \text{ (multiplikative Zerlegung von } x) \tag{5}$$

begonnen.

Experiment 1

Zunächst erscheinen für

$$x = f_+(y_1, y_2) = y_1 + y_2 \tag{6}$$

bzw.

$$x = f_\bullet(y_1, y_2) = y_1 \cdot y_2 \tag{7}$$

die Realisierungsautomaten Bild 2 bzw. Bild 3 unmittelbar plausibel.

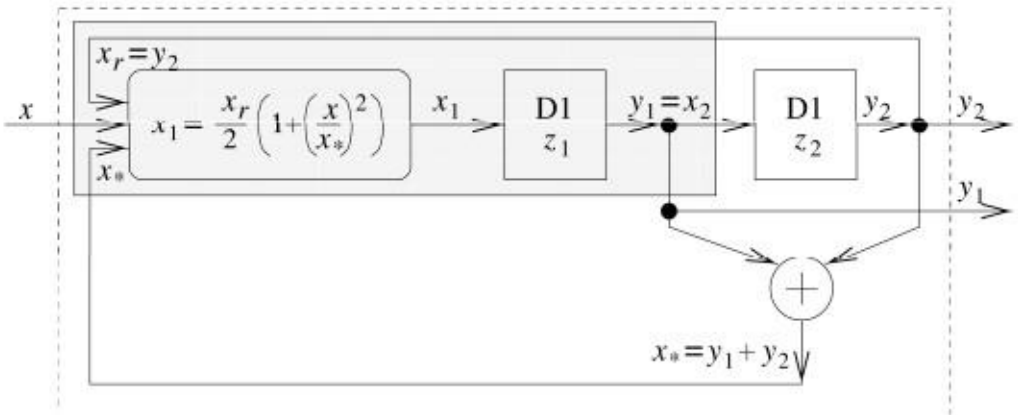


Bild 2: Additiver Zerlegungsautomat für $n = 2$

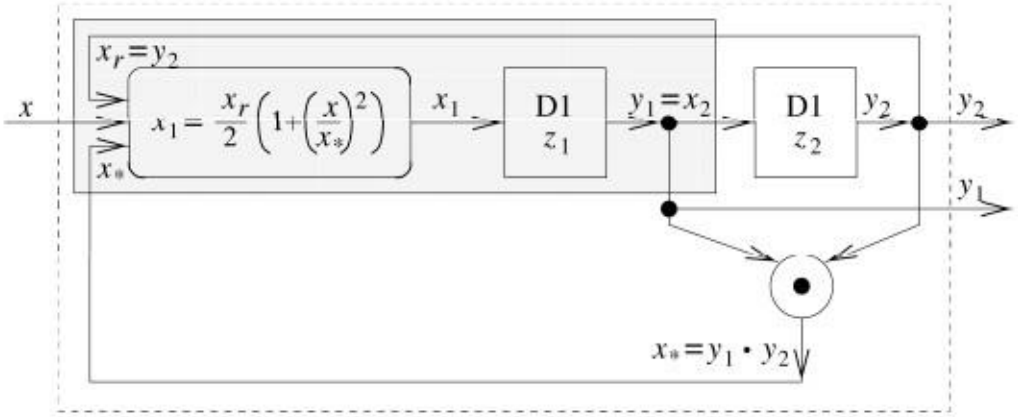


Bild 3: Multiplikativer Zerlegungsautomat für $n = 2$

Die Bilder 4 und 5 zeigen jeweils den Verlauf der Komponenten $y_1(t)$ und $y_2(t)$ der Ausgangsgröße bei konstanter Eingangsgröße

$$x(t) = b\,. \tag{8}$$

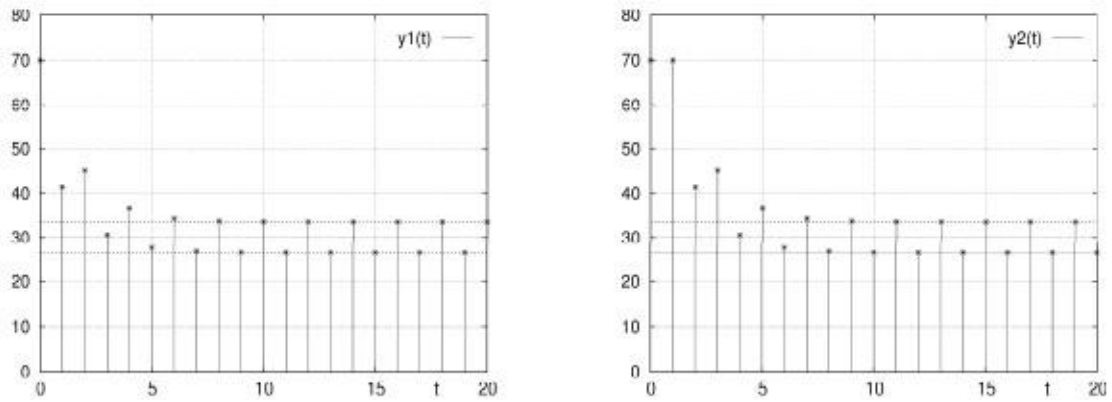


Bild 4: Verlauf der Ausgangsgrößen $y_1(t)$ und $y_2(t)$ des additiven Zerlegungsautomaten nach Bild 2; $x(t) = 60$; $z_1(0) = z_2(0) = 70$; $n = 2$; $y_{1stat}(t) = \overline{26.396\,,\ 33.604}$; $y_{2stat}(t) = \overline{33.604\,,\ 26.396}$

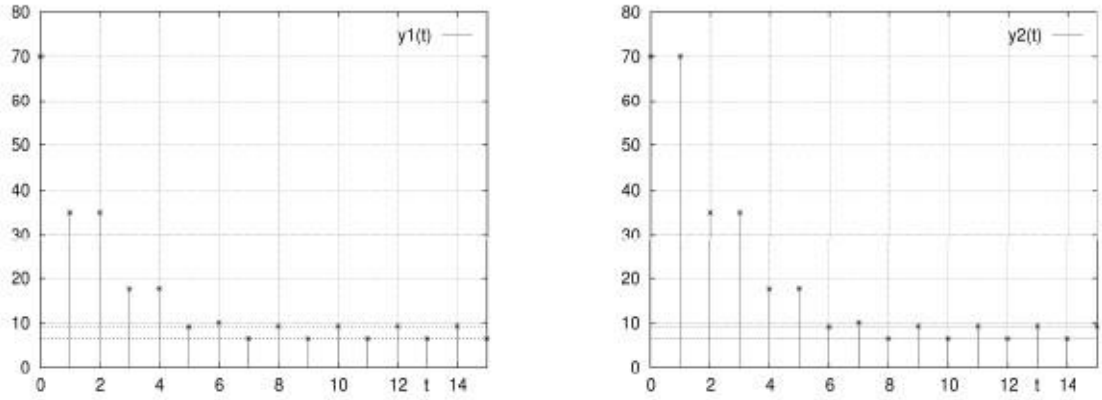


Bild 5: Verlauf der Ausgangsgrößen $y_1(t)$ und $y_2(t)$ des multiplikativen Zerlegungsautomaten nach Bild 3; $x(t) = 60$; $z_1(0) = z_2(0) = 70$; $n = 2$; $y_{1stat}(t) = \overline{6.477\,,\,9.264}$; $y_{2stat}(t) = \overline{9.264\,,\,6.477}$

Nach einem kurzen Einschwingvorgang zeigen $y_1(t)$ und $y_2(t)$ einen periodischen Verlauf mit der Periodendauer 2:

	t	$t+1$	$t+2$	$t+3$	...	
y_{1stat}	c_1	c_2	c_1	c_2	...	(9)
y_{2stat}	c_2	c_1	c_2	c_1	...	(10)

Dabei ist

$$c_1 + c_2 = b \tag{11}$$

bzw.

$$c_1 \cdot c_2 = b\,. \tag{12}$$

Mit anderen Worten: Der dA Bild 2 bzw. Bild 3 realisiert im stationären Betrieb eine Zerlegung des konstanten Eingabewertes $x(t) = b$ in zwei Summanden bzw. zwei Faktoren c_1 und c_2, die über eine Ausgangsleitung sequentiell, über beide Ausgangsleitungen parallel ausgegeben werden. Die konkrete Zerlegung wird dabei durch die Anfangszustände $z_1(0)$ und $z_2(0)$ determiniert.

Aufgabe 20.1

(a) Zeigen Sie experimentell und analytisch, daß sowohl für den additiven als auch für den multiplikativen Zerleger mit $n = 2$ unter den denkbar möglichen Primärrückkopplungen $x_r \in \{y_1, y_2, x_*\}$ in Bild 2 nur $x_r = y_2$ den vorbeschriebenen Zerlegungseffekt bewirkt.

(b) Zeigen Sie jeweils experimentell, daß jede von außen erfolgende „Injektion“ in nur ein $z_i(t)$ von einer stationären Zerlegung von b über einen neu beginnenden Einschwingvorgang zu einer neuen stationären Zerlegung von b führt. In diesem Sinne ist die Zerlegung von b über den Zustand steuerbar.

(c) Zeigen Sie jeweils experimentell, daß bei zeitlich gegenüber der Einschwingdauer langsam veränderlicher Eingangsgröße $x(t)$ die erzeugte Zerlegung mit $x(t)$ „mitläuft“.

Aufgabe 20.2

Erweitern Sie unter Berücksichtigung der Ergebnisse von Aufgabe 20.1 die Zerlegungsautomaten Bild 2 und Bild 3 so, daß sie bei konstanter Eingabe einer natürlichen Zahl

$$x(t) = b \in \mathbb{N} \tag{13}$$

nach einem kurzen Einschwingvorgang eine stabile additive und multiplikative Zerlegung von b in zwei natürliche Zahlen c_1 und c_2

$$c_1 + c_2 = b;\ c_1, c_2, b \in \mathbb{N} \tag{14}$$

bzw.

$$c_1 \cdot c_2 = b;\ c_1, c_2, b \in \mathbb{N} \tag{15}$$

realisieren, die über eine Ausgangsleitung sequentiell, über beide Ausgangsleitungen parallel ausgegeben werden.

Aufgabe 20.3

Legen Sie dem von Ihnen konstruierten multiplikativen $\mathbb{N}$–Zerleger das Faktorisierungsproblem

$$b = p_1 \cdot p_2;\ p_1 \text{ und } p_2 \text{ sind Primzahlen [1,2,3]} \tag{16}$$

vor.

Analysieren Sie die dabei auftretenden Ausgabemuster (Zeitverläufe, Differenzenquotienten, *pset*, ...).

Erproben Sie weitere schaltungstechnische Maßnahmen zur Unterdrückung der aufgetretenen Instabilitäten. Läßt sich auf diese Weise ein „Faktorisierungsautomat“ konstruieren?

Literatur

[**1**] J. Buchmann. *Faktorisierung großer Zahlen.* Spektrum der Wissenschaft 17(1996)9, 80–88

[**2**] P. Herman. *The Factoring Page!*
http://www.pslc.ucla.edu/~a540pau/factoring

[**3**] H. Riesel. *Prime Numbers and Computer Methods for Factorization.* Boston 1994