Small Challenges To Go n°21

Kettenbrüche

Untersuchen Sie die Kettenbrüche

Examine the continued fractions

$$g\left(2, \inf\right) =$$

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{3}{16 + \cfrac{15}{256 + \cfrac{255}{65536 + \cfrac{65535}{4294967296 + \ldots}}}}}}$$

$$= 1.446658881654177041003449301561139248277963765596525342978394167 39\ldots$$

f(2,inf) =

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{3}{16+\cfrac{15}{256+\cfrac{255}{65536+\cfrac{65535}{4294967296+\ldots}}}}}}}$$

$=_{10}$ 0.29013605185090542068986122911467
03405037945681571787637682705853 8
38844796543331124783764690256282 9
48781662768931653550063057003520 8
80154250997415057683939186821786 8
07143733432958299015760206029 7…

$=_{2}$ 0.01001010010001100101101100110110
00010111000101110100100011110001 0
01111101011010001010001010111 01…

das Gegenstück zur Kettenbruchdarstellung der Thue-Morse Konstante [1,3]

tm(2,inf) =

$$\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{4-\cfrac{3}{16-\cfrac{15}{256-\cfrac{255}{65536-\cfrac{65535}{4294967296-\ldots}}}}}}}$$

$=_{10}$ 0.41245403364010759778336136825845
52830894783744557695575733794153 4
87935923657825889638045404862121 3
339625…

$=_{2}$ 0.01101001100101101001011001101001
10010110 01101001011010011001011010
01011001101001011010011001011001
01001100101101001011001101001…

and

c(2,inf) =

$$2+\cfrac{1}{4+\cfrac{3}{16+\cfrac{15}{256+\cfrac{255}{65536+\cfrac{65535}{4294967296+\ldots}}}}}$$

= 2.23884499127511808802980004045533
315658417743686738693370379139794
023579326174284150035904153780223…

insbesondere hinsichtlich
in particular regarding

** Differenzenquotient aufeinderfolgender Näherungsbrüche

$$dc(2,i) = \frac{c(2,i) - c(2,i+1)}{c(2,i+1) - c(2,i+2)}$$

Experimenteller Befund:
Die Folge der Näherungsbrüche c(2,i) konvergiert oszillierend und für große i quadratisch: $dc(2,i+1) \approx -[dc(2,i)]^2$.
? g(2,inf), f(2,inf), tm(2,inf) ?

Difference quotient of successive convergents

$$dc(2,i) = \frac{c(2,i) - c(2,i+1)}{c(2,i+1) - c(2,i+2)}$$

Experimental result:
The sequence of convergents c(2,i) converges oscillating and for large i quadratically: $dc(2,i+1) \approx -[dc(2,i)]^2$.
? g(2,inf), f(2,inf), tm(2,inf) ?

** Binärdarstellung von c(2,inf) (vgl. [1,2])
$c(2,inf)_2 = 10.00111101001001…$
? g(2,inf), f(2,inf) ?
Binary representation of c(2,inf) (see [1,2])
$c(2,inf)_2 = 10.00111101001001…$
? g(2,inf), f(2,inf) ?

** Notieren Sie den Algorithmus zur Transformation der Dezimaldarstellung von c(2,inf) in die zugehörige Binärdarstellung $c(2,inf)_2$ als Struktogramm.

** Ist die Binärfolge von $c(2,inf)_2$ analog zur Morse-Thue Folge in Form einer Grammatik rekursiv darstellbar (vgl. [2])?
? $g(2,inf)_2$, $f(2,inf)_2$?

** Erzeugen Sie eine 2D Darstellung der Binärfolge von $c(2,inf)_2$ als Ulamspirale (Anhang 1) oder mittels anderer 2D Notierungsmodelle (Anhang 2).
? $g(2,inf)_2$, $f(2,inf)_2$, $tm(2,inf)_2$?

Untersuchen Sie in analoger Weise die Extension
Examine in the same way the extension

$$c(a_0, i) =$$

$$a_0 + \cfrac{a_0 - 1}{a_1 + \cfrac{a_1 - 1}{a_2 + \cfrac{a_2 - 1}{a_3 + \cfrac{a_3 - 1}{a_4 + \ddots \cfrac{a_{i-1} - 1}{a_i + \cfrac{a_i - 1}{a_{i+1}}}}}}}$$

$$a_{i+1} = a_i^2 \;;\; i = 0, 1, 2, 3, \ldots \;;\; a_0 > 1$$

speziell für die Startwerte $a_0 = 3, 7$, e und π.
esp. for the start values $a_0 = 3, 7$, e and π.

$a_0 = 3 \rightarrow$
$c = 3.219810399826135326721397664072859747446158339454999149878970735856804479305192456140474916753 23\ldots$

$a_0 = 7 \rightarrow$
$c = 7.122399041615493325306167783498482506822402235330301707732331331766175441531955937171868721165548 37\ldots$

$a_0 = e \rightarrow$
$c = 2.947201800245666104817750836799559259437565236497220072896237168893727891678211822639153048052765 83\ldots$

$a_0 = \pi \rightarrow$
$c = 3.356597962568280980029849826443686825181942837628187976251386923818020966829818770461199191108022\ldots$

In allen Fällen konvergiert die Folge der Näherungsbrüche $c(a_0,i)$ oszillierend und für große i quadratisch: $dc(a_0,i+1) \approx -[dc(a_0,i)]^2$ (vgl. Unit 1, S. 6).
In all cases, the sequence of convergents $c(a_0,1)$ converges oscillating and for large i quadratically: $dc(a_0,i+1) \approx -[dc(a_0,i)]^2$ (see Unit 1, p. 6).

References

[1] Weisstein, Eric W. "Thue-Morse Constant." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/Thue-MorseConstant.html
[2] Weisstein, Eric W. "Thue-Morse Sequence." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/Thue-MorseSequence.html
[3] http://oeis.org/A014571

Anhang 1

Eine zweidimensionale Darstellung des Binärwortes

$$w = z(0)\, z(1)\, z(2)\, z(3) \ldots \varepsilon \{0, 1\}^{*}, \qquad (1)$$

z.B. unter Benutzung des Notierungsmodells Ulam-Spirale [3,4] als Schwarz-Weiß-Muster gemäß

Bild 1

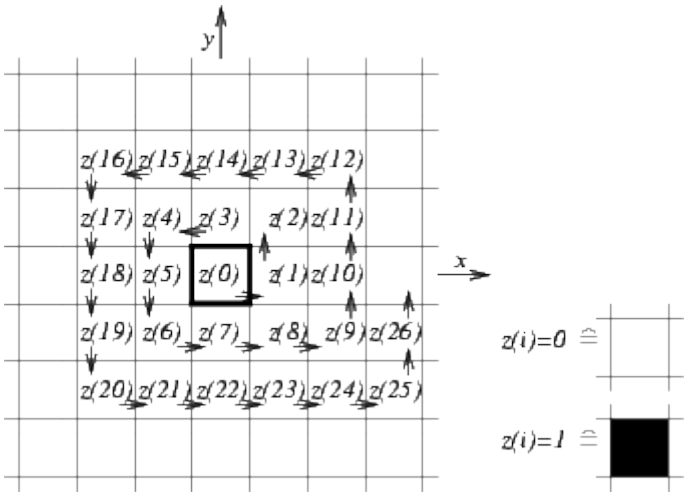


Bild 1 *Ulam-Spirale*

eröffnet gegenüber seiner üblichen eindimensionalen Zeichenkettennotation Gl. (1) qualitativ neue Möglichkeiten zur Darstellung (Visualisierung) und zur Analyse der ,,inneren Struktur`` der zugehörigen Zahl *r* (neue methodische, heuristische und experimentelle Zugänge, z.B. auch durch Einbeziehung des Methodeninventars der digitalen Bildverarbeitung). Beispiel

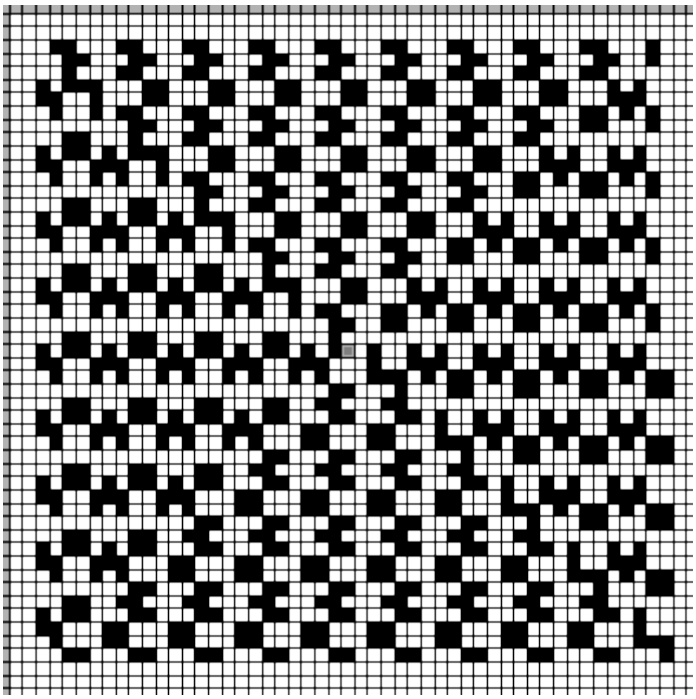
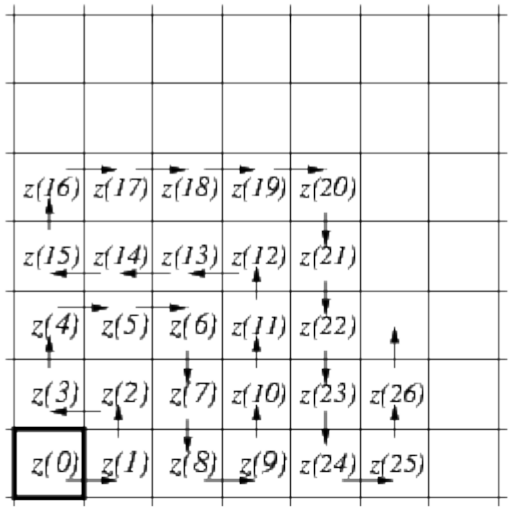


Bild 2 $r = \sqrt{\frac{5}{3}}$ *; Algorithmus (A1); Notierungsmodell Bild 1*

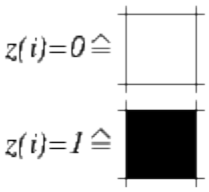
[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Ulam_spiral
[5] http://de.wikipedia.org/wiki/Ulam-Spirale

Anhang 2

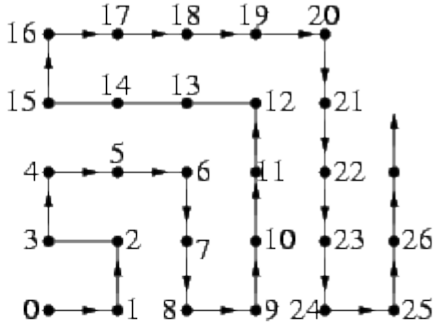
a)



Notierungsmodell

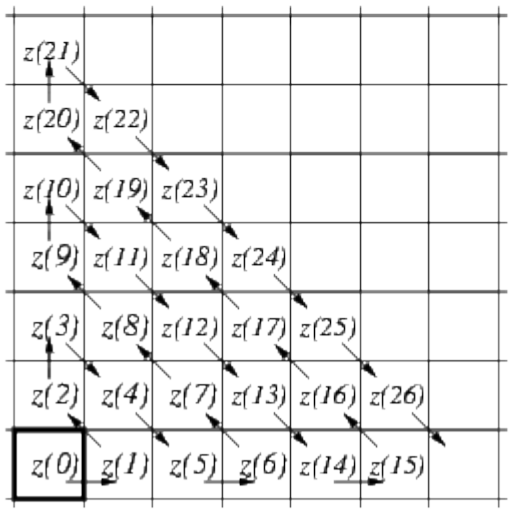


Pixelkodierung

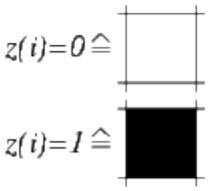


zugehöriger Durchlaufgraph

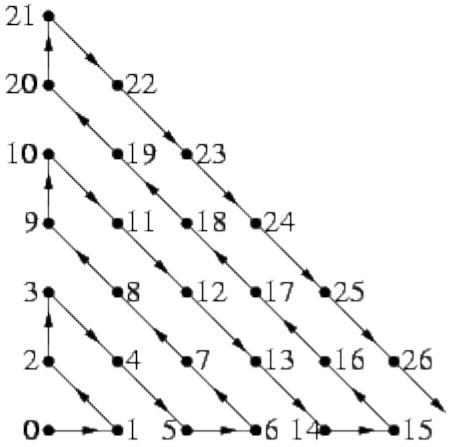
b)



Notierungsmodell

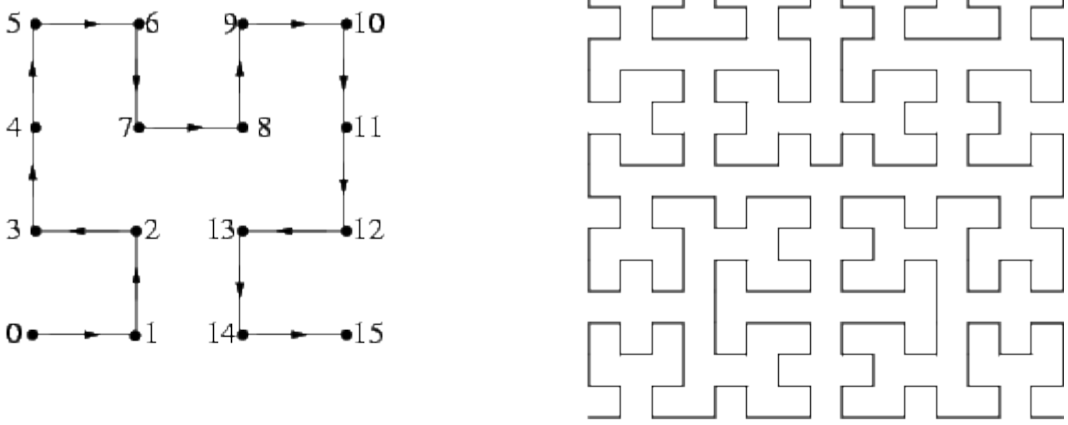


Pixelkodierung



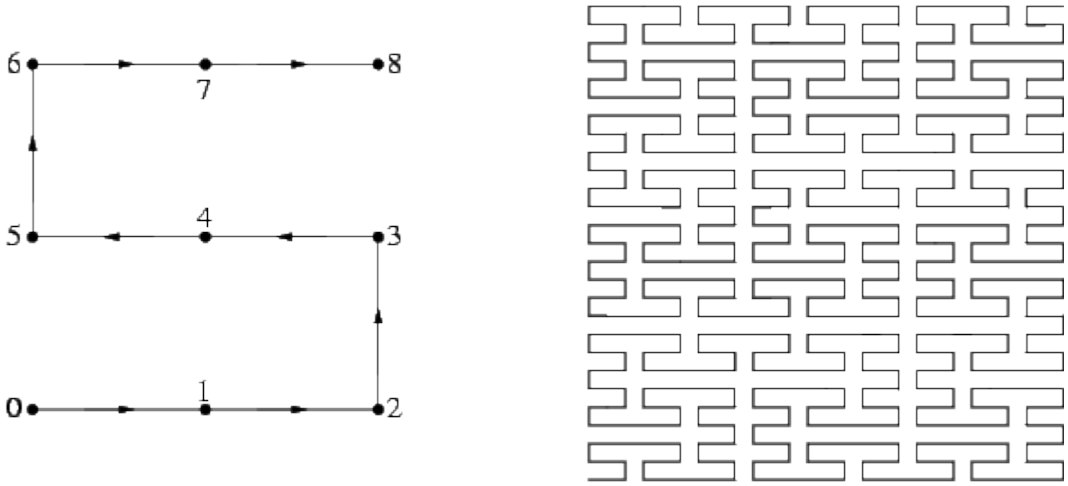
zugehöriger Durchlaufgraph

c)



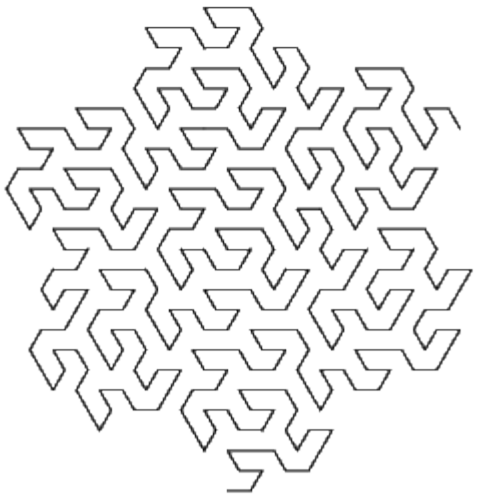
Durchlaufgraph Hilbert-Kurve [16,17,18]

d)



Durchlaufgraph Hilbert-Kurve II (vgl. [16,17])

e)



Durchlaufgraph Peano-Gosper-Kurve [17,19]

Bild 3 *Weitere zweidimensionale Notierungsmodelle für w gemäß Gl. (1)*

Erste Ergebnisse von Dr. D. Schönfeld
First results by Dr. D. Schönfeld

** Erzeugen Sie eine 2D Darstellung der Binärfolge von $c(2,inf)_2$ als Ulamspirale (Anhang 1).
Generate a 2D representation of the binary sequence of $c(2,inf)_2$ as Ulam spiral (Appendix 1).

$c(2,inf)_2 =$ 10.00111101001001001111001000000010010101110000110010110011000010000100101100000101101111111000000011000111010001100011101000000111011110010001000000111001110110000101100001011110111111010011001111110…



Discussion!

Anhang 3

The Morse-Thue sequence

Sequence of strings over $\{0,1\} = x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 \ldots$.with

$x_0 = 0$

$x_{i+1} = x_i \overline{x_i}$; $i = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$

$x_0 = 0$

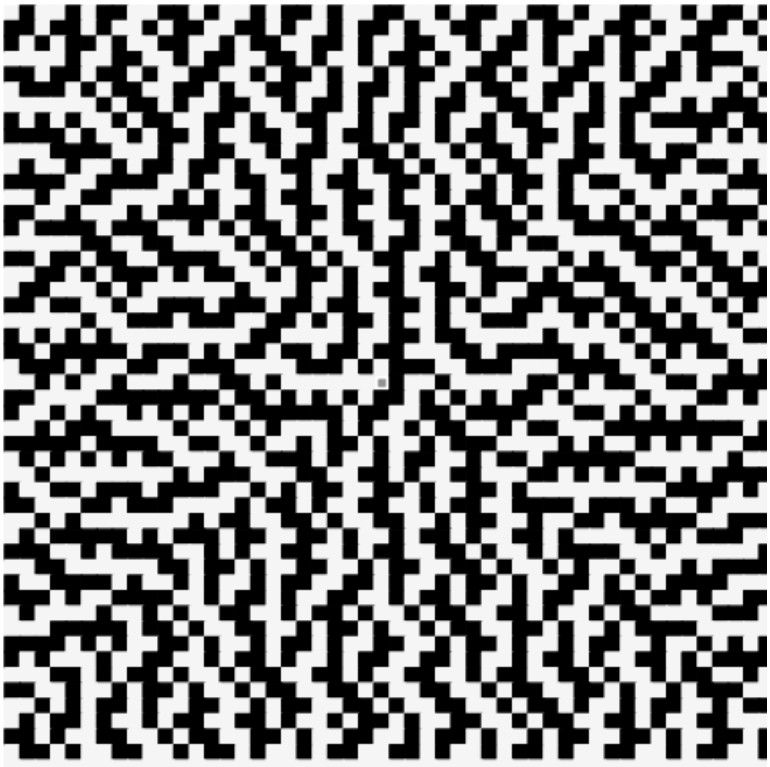
$x_1 = 01$

$x_2 = 0110$

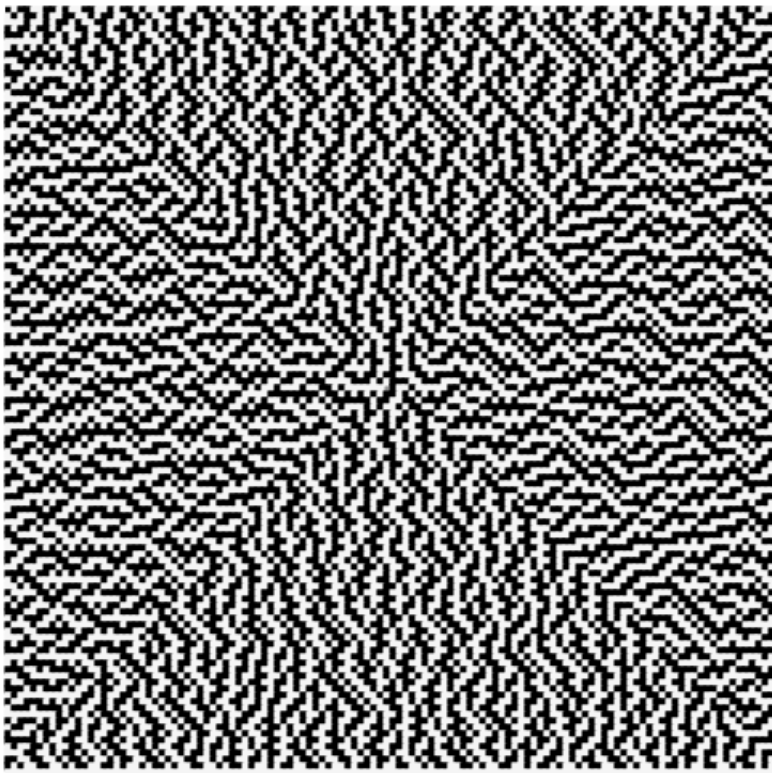
$x_3 = 01101001$

$x_4 = 0110100110010110$

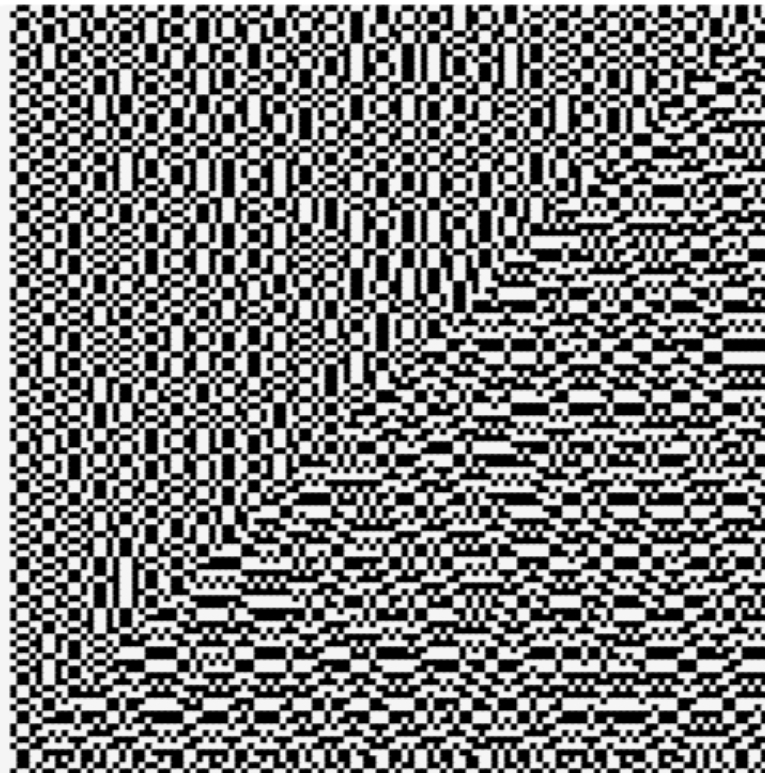
Ulamspirale für die Thue-Morse Sequenz
50x50 Pixel



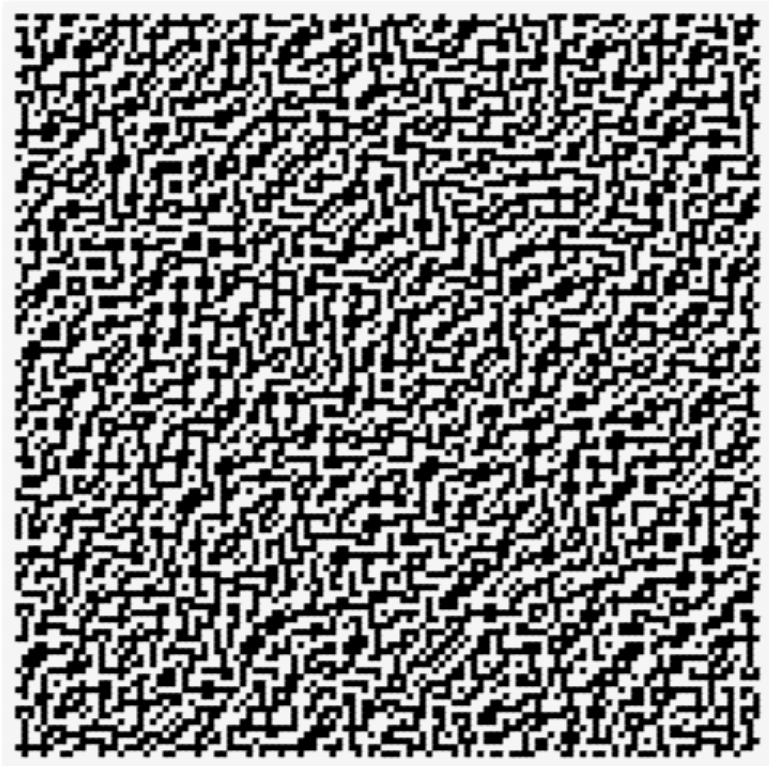
Ulamspirale für die Thue-Morse Sequenz 120x120 Pixel



Pixelgraphik für die Thue-Morse Sequenz, Notierungsmodell a), 120x120 Pixel



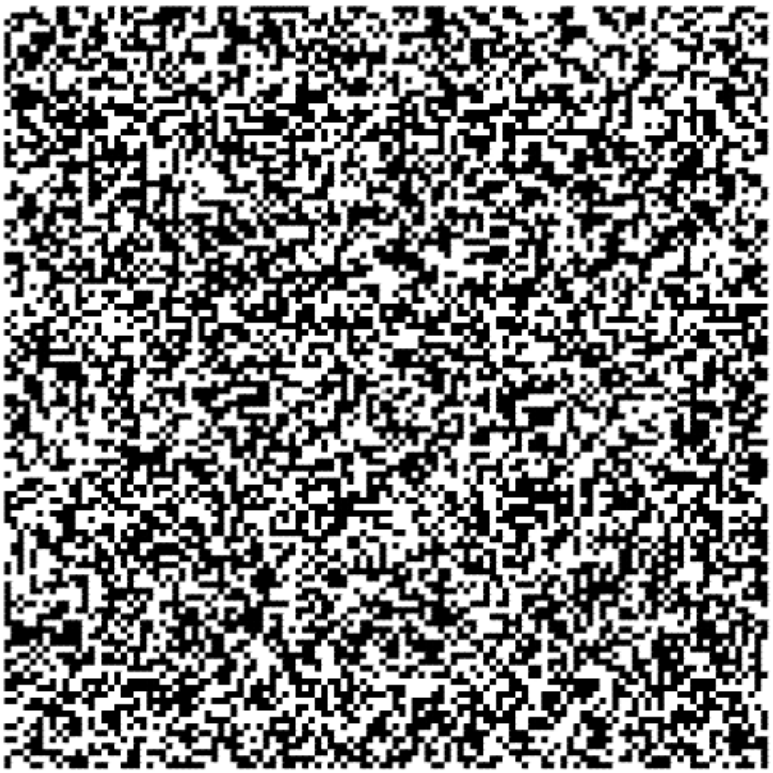
Pixelgraphik für die Thue-Morse Sequenz,
Notierungsmodell b), 120x120 Pixel



Zum Vergleich
Ulamspirale für $f(2,inf)_2$, 50x50 Pixel



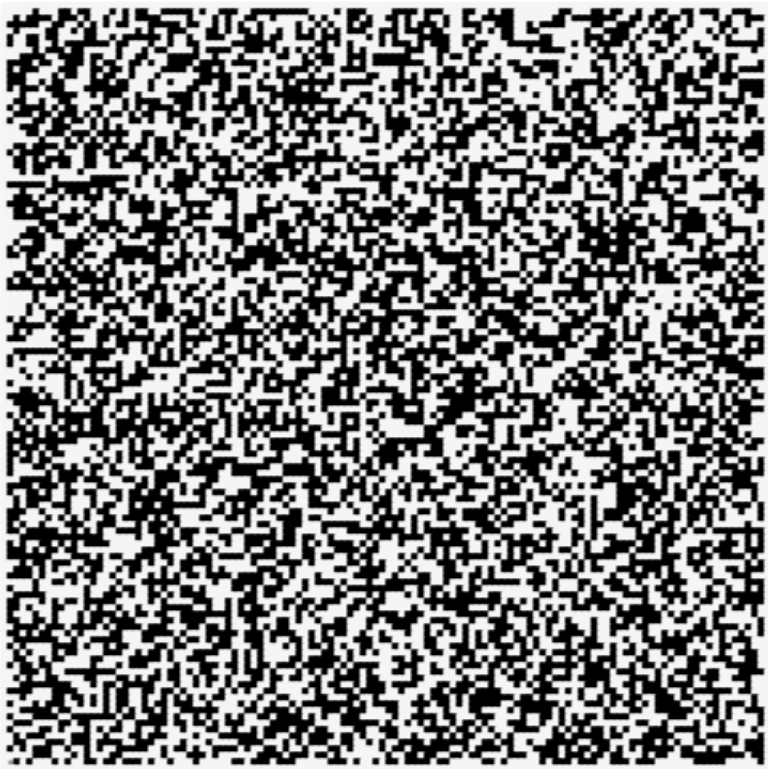
Ulamspirale für $f(2,inf)_2$, 120x120 Pixel



Pixelgraphik für $f(2,inf)_2$,
Notierungsmodell a), 50x50 Pixel



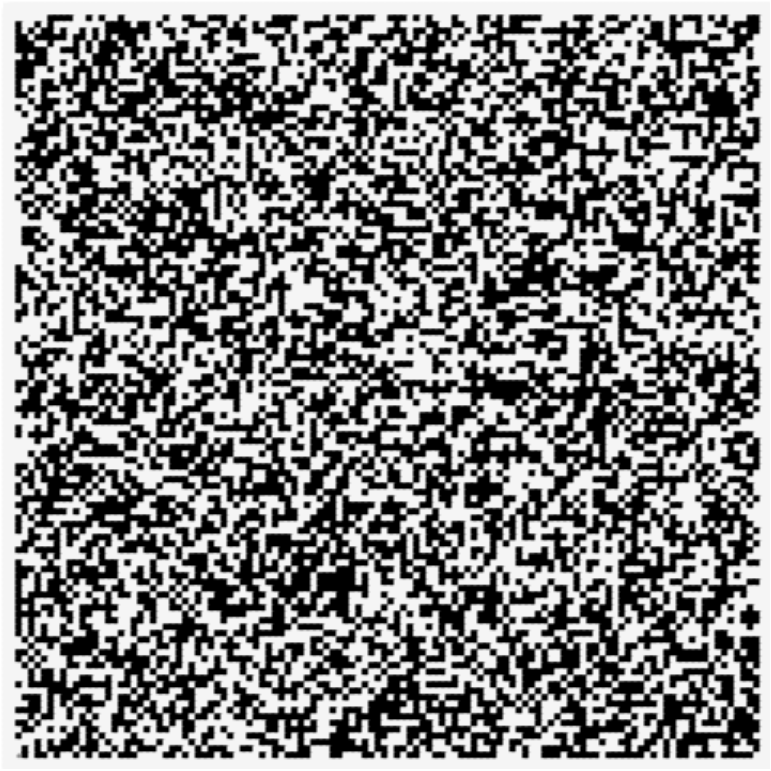
Pixelgraphik für $f(2,inf)_2$,
Notierungsmodell a), 120x120 Pixel



Pixelgraphik für $f(2,inf)_2$,
Notierungsmodell b), 50x50 Pixel



Pixelgraphik für $f(2,inf)_2$,
Notierungsmodell b), 120x120 Pixel



Anhang 4

Erzeugen Sie eine 2D Darstellung der Binärfolge von $\sigma(2,inf)_2$ als Ulamspirale (Anhang1) und mittels anderer 2D Notierungsmodelle (Anhang 2).

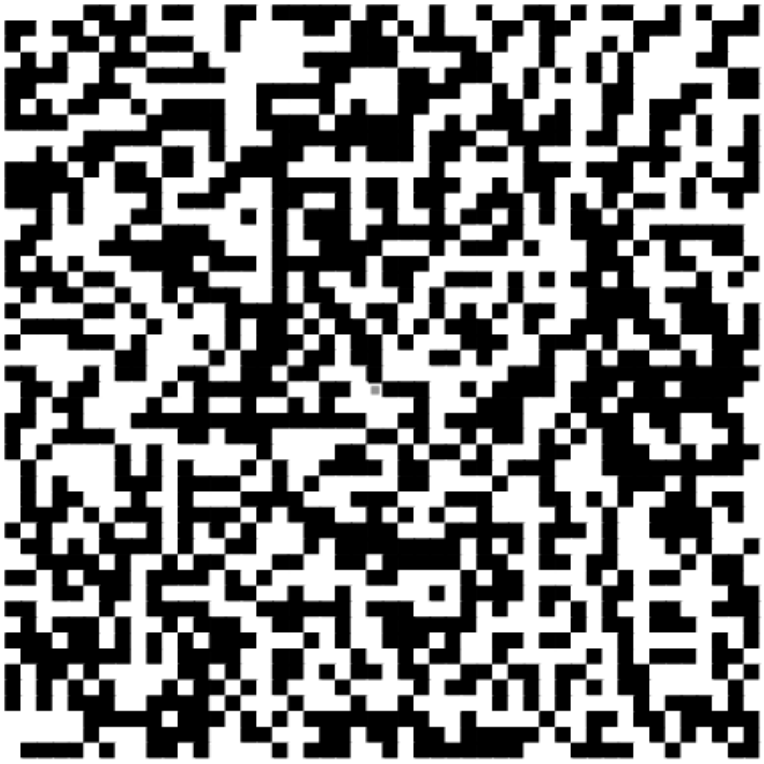
$$\sigma(\text{prim,inf}) = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{11 + \cfrac{1}{13 + \cfrac{1}{17 + \cfrac{1}{19 + \cfrac{1}{23 + \cfrac{1}{29 + \ldots}}}}}}}}}$$

= 0.31303673643358290638395160264178247639668977180325634021012444214456473177627224369
5322017238328174530158200723602166215392264873100537277015671222068549467465536418758076952927515082711793316447285721442999724871808962883287803610158268658025452518759599895873387510342700277852019114079704440265985496888339753623510129687204331033260243136898705613712460765398960478704029682329800625385198689759329660720610380156301071112058002324414701131100124424936392195925034012342581834563972263106698777426003859722732393725224303567167114519346803236594595996099574956352963468596965275633912922554813824245282362929997656819948298398739485048753422653734722161752661998377073949321591394060873758968063507172516669282788677798754813700542943974829261881698898712705243186947772514680768745996842782089054732650386437602830667352435785559612046024602661695295584492799381612945456314126836726877176475434543175872145573437922998031575665462720490276446475427667295029371467097218021819489242203797170800277798201597886942978647779768845178412236570722431743143366942750886472394497751238908224228245845849776349699504868397029967792124617938078936043362795700838345508257877435528625082784677133805572694917032513995298063658184697158477535250872100629114060546510789440730620215901877374190034988965042708692034076349573876428517077262741768778356523265864357281630787990094231872981162203690709665176249299639805570885634207261913251201445298094196115789604711940987210217831161687755868672162695412966713804044346529901924115026852316944931691937611028565552720660499398895472211048545071977761801620…

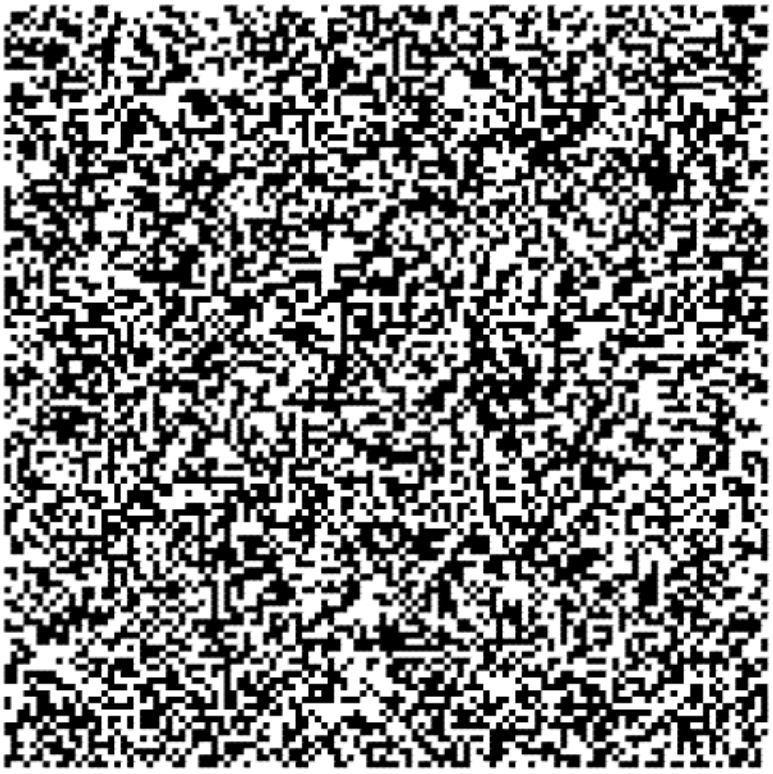
Binary representation

$\sigma(\text{prim,inf}) =_2$ 0.01010000001000110010110
01111000101101101110001101000001001 0
1011010110010001001011010001010100 11 0110…

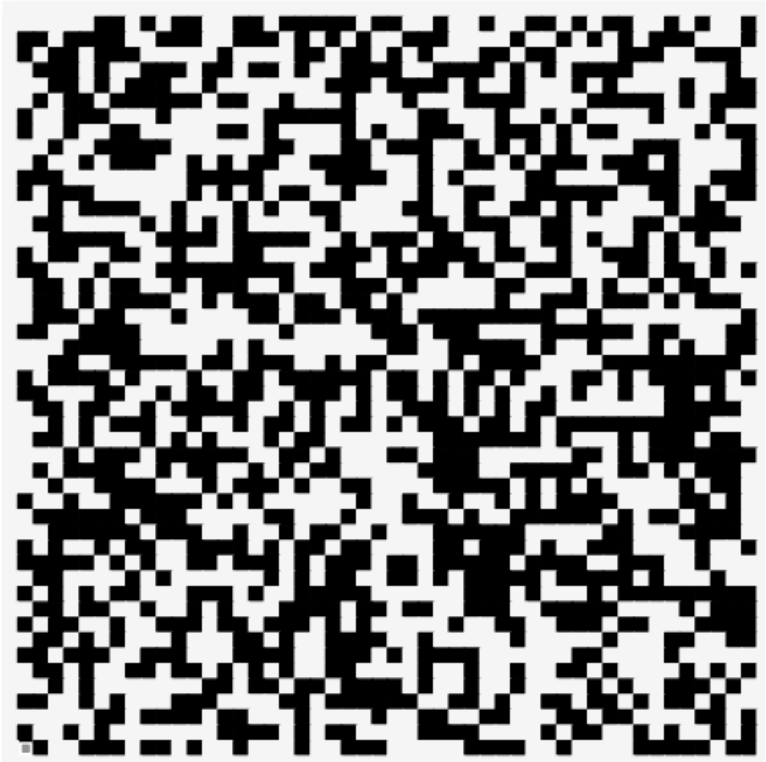
Ulamspirale für $\sigma(\text{prim,inf})_2$, 50x50 Pixel



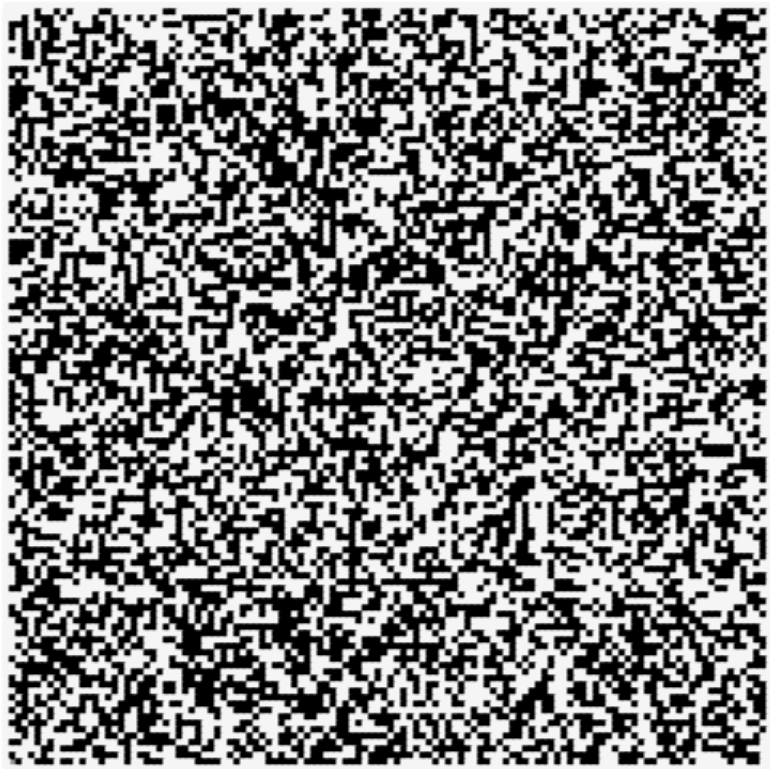
Ulamspirale für $\sigma(prim,inf)_2$, 120x120 Pixel



Pixelgraphik für $\sigma(prim,inf)_2$,
Notierungsmodell a), 50x50 Pixel



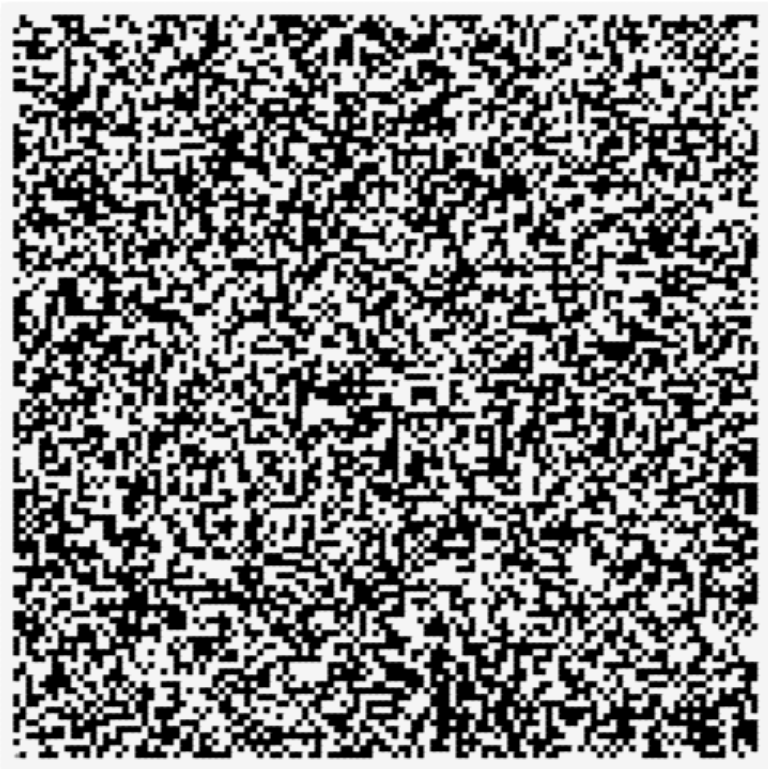
Pixelgraphik für $\sigma(prim,inf)_2$,
Notierungsmodell a), 120x120 Pixel



Pixelgraphik für $\sigma(prim,inf)_2$,
Notierungsmodell b), 50x50 Pixel



Pixelgraphik für $\sigma(prim,inf)_2$,
Notierungsmodell b), 120x120 Pixel



Anhang 5

Erzeugen Sie eine 2D Darstellung der Binärfolge von $\tau(2,inf)_2$ als Ulamspirale (Anhang 1) und mittels anderer 2D Notierungsmodelle (Anhang 2).

$$\tau(prim,inf) = \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{5 - \cfrac{1}{7 - \cfrac{1}{11 - \cfrac{1}{13 - \cfrac{1}{17 - \cfrac{1}{19 - \cfrac{1}{23 - \cfrac{1}{29 - ...}}}}}}}}}$$

$= 0.357905019\ldots$

All in your hands, work with this results.

To be continued.