Small Challenges To Go n°20

„Digits versenken“

Wir untersuchen die Dezimaldarstellung reeller Zahlen z mit systematischem inneren Aufbau (definiert durch unendliche Potenzreihe, Kettenbruch, geschachtelten Ausdruck oder durch eine Rekursionsgleichung), z.B.

$\pi,\ \pi^2,\ e,\ e^2,\ \frac{\pi}{e},\ \sqrt{2},\ \sqrt{17},\ \sqrt[3]{2},\ \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1), 2^{\sqrt{2}},\ \mathrm{e}^{\pi},$

Feigenbaumkonstante δ [1,2],

Thue-Morse-Konstante [3,4] und weitere

mathematische Konstanten [5,6,7]

mit folgenden Fragestellungen:

**1 Anzahl der Digits $\in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ pro 10^6 Stellen in der Dezimaldarstellung von z (z dabei als Digitsequenz aufgefasst),

**2 Anzahl der Digits $\in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ in der zugehörigen „begleitenden Digitdifferenz“ $\Delta(z)$

z = 3.␣1␣4␣1␣5␣9␣2␣6␣5 …

2. 3 3 4 4 7 4 1 …= $\Delta(z)$

($\Delta(z)$ dabei als Digitsequenz aufgefasst).

Numerisch („experimentell“) wurde ermittelt:

π

```
z digit density for {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}
{99959, 99757, 100026, 100230, 100230, 100359, 99548,
99800, 99985, 100106} pro 10^6
Delta(z) digit density for {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}
{100072, 179909, 160029, 139558, 119744, 100432,
80200, 59749, 40358, 19948} pro 10^6
```

π^2

```
z digit density for {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}
{100126, 99874, 100400, 99886, 100229, 100579, 100129,
99400, 99373, 100004} pro 10^6
Delta(z) digit density for {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}
{99909, 181060, 159299, 140791, 119895, 99939, 79632,
59850, 39494, 20130} pro 10^6
```

e

```
z digit density for {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}
{99425, 100132, 99846, 100228, 100389, 100087, 100479,
99910, 99812, 99692} pro 10^6
Delta(z) digit density for {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}
```

{99486, 179631, 160132, 140196, 120464, 100061, 80254, 59834, 39990, 19951} pro 10^6

e^2

z digit density for {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}
{100113, 99644, 100738, 99555, 99745, 99495, 100217, 100378, 99938, 100177} pro 10^6
Delta(z) digit density for {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}
{100144, 179815, 159999, 139421, 119864, 99953, 80100, 60596, 39990, 20117} pro 10^6

π/e

z digit density for {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}
{100145, 99834, 99930, 100615, 100037, 99747, 100111, 99696, 99946, 99939} pro 10^6
Delta(z) digit density for {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}
{100111, 179794, 160072, 140028, 120322, 99933, 80155, 59645, 39972, 19967} pro 10^6

sqr(2)

z digit density for {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}
{99814, 98925, 100436, 100190, 100024, 100155, 99886, 100008, 100441, 100121} pro 10^6
Delta(z) digit density for {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}
{100169, 180017, 160105, 140355, 120219, 99669, 79577, 60252, 39714, 19922} pro 10^6

Es liegt nahe, auf Basis der vorliegenden Werte zu vermuten:

$$**1\ d(k,z) \rightarrow 0.1 \text{ für } k = 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$$

$$**2\ d(0,\Delta(z)) \rightarrow 0.1$$

$$d(k,\Delta(z)) \rightarrow 0.2 - 0.02k$$

für $k = 1,2,3,4,5,6,7,8,9$
linear sinkend mit steigendem k!

Aufgaben

20.1 Verifizieren Sie **1 und **2 experimentell (steigende Stellenzahl $>10^6$ und Einbeziehung weiterer mathematischer Konstanten) und durch einen mathematischen Beweis.

20.2 Untersuchen Sie nun für die vorliegenden Fälle und weitere Konstanten $\Delta^2(z) = \Delta(\Delta(z))$ und höhere Differenzen.

20.3 $z = \pi$ ist eine transzendente Zahl. Was ist dann mit $\Delta(\pi)$ und $\Delta^2(\pi)$?

20.4 $z = \text{sqr}(2)$ ist eine irrationale Zahl. Was ist dann mit $\Delta(\text{sqr}(2))$?

20.5 Läßt sich z aus $\Delta(z)$ wiedergewinnen?

20.6 Welche Information über z ist in den „kleinen“ Schwankungen $d\left(k,z\right) - 0.1$ etc. enthalten?

20.7 Und, wozu ist das alles gut?

20.8 Gibt es transzendente/irrationale Zahlen z, die nicht das hier angenommene „Verhaltensmuster“

**1	$d\left(k,z\right)$	$\rightarrow 0.1$ für $k = 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$
**2	$d\left(0,\Delta\left(z\right)\right)$	$\rightarrow 0.1$
	$d\left(k,\Delta\left(z\right)\right)$	$\rightarrow 0.2 - 0.02k$ für $k = 1,2,3,4,5,6,7,8,9$ linear sinkend mit steigendem k!

zeigen?

20.9 Wenn ja, welche?

References

[1] Weisstein, Eric W. "Feigenbaum Constant." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/FeigenbaumConstant.html

[2] http://de.wikipedia.org/wiki/Feigenbaum-Konstante

[3] Weisstein, Eric W. "Thue-Morse Constant." From MathWorld—A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/Thue-MorseConstant.html

[4] Sloane, N. J. A. Sequences A010060, A014571, A014572, A074072, and A074073 in "The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences."

[5] http://de.wikipedia.org/wiki/Mathematische_Konstante

[6] http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_constants_and_functions

[7] S.R. Finch. Mathematical Constants. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications 94). 2003. ISBN-10: 0521818052