Unit 50
Mittelwertautomaten

Ein Mond spiegelt sich in allen Wassern,
Alle Monde im Wasser sind ein und derselbe Mond.

Meister Yung–chia Hsüan–chüeh

50.1 Mittelwerte und Mittelwert–Algorithmen, historische Reflexionen

50.1.1 Babylon

Bereits die babylonischen (mesopothamischen) Mathematiker (ca. 2000 – 300 v. Chr.) befaßten sich mit dem Problemkreis Mittelwertbildung [1, 2, 3]. So fand die Bildung des arithmetischen Mittels bei der numerischen Berechnung von $\sqrt{2}$ Anwendung (vgl. [4], Baustein 2).

50.1.2 Griechenland

Basierend auf diesen Kenntnissen wurden von den Altpythagoräern (2. Hälfte des 6. Jh. bis Mitte des 5. Jh. v. Chr.) die Begriffe

arithmetisches Mittel
$$\boxed{a(x,y) = \frac{x+y}{2}} \tag{50.1}$$

geometrisches Mittel
$$\boxed{g(x,y) = \sqrt{x\,y}} \tag{50.2}$$
$$= (x \cdot y)^{\frac{1}{2}} = \exp\left(\frac{\ln x + \ln y}{2}\right)$$
$$= \exp\left(a(\ln x, \ln y)\right) \qquad \text{und} \tag{50.3}$$

harmonisches Mittel
$$\boxed{h(x,y) = \frac{2\,x\,y}{x+y}} \tag{50.4}$$
$$= \left(\frac{1}{2}(x^{-1} + y^{-1})\right)^{-1}$$
$$= \left(a(x^{-1}, y^{-1})\right)^{-1} \tag{50.5}$$
$$= \frac{(g(x,y))^2}{a(x,y)} \tag{50.6}$$

in die griechische Mathematik eingeführt [1].

Aufgabe 1

(a) Geben Sie eine simultane Veranschaulichung von $a(x, y)$, $g(x, y)$ und $h(x, y)$ an.

Lösung 1:

$$a(x, y) = \frac{x + y}{2} \qquad \text{– Radius eines Thaleskreises} \tag{50.1}$$

$$(g(x, y))^2 = x \cdot y \qquad \text{– Höhensatz} \tag{50.7}$$

$$\frac{h(x, y)}{g(x, y)} = \frac{g(x, y)}{a(x, y)} \qquad \text{– ähnliche rechtwinklige Dreiecke} \tag{50.8}$$

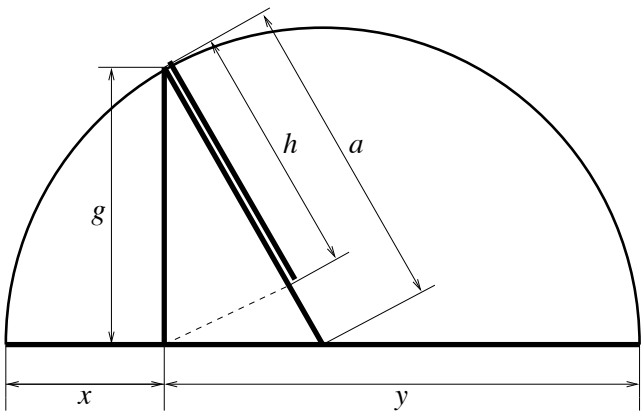


Bild 1: Simultane geometrische Veranschaulichung von $a(x, y) \geq g(x, y) \geq h(x, y)$ für $x < y$ nach Pappos von Alexandria (ca. 320 n. Chr.) [5]

Bild 1 besitzt folgende interessante Verallgemeinerung (Pappos–Leiter), die im Bild 2 dargestellt ist.

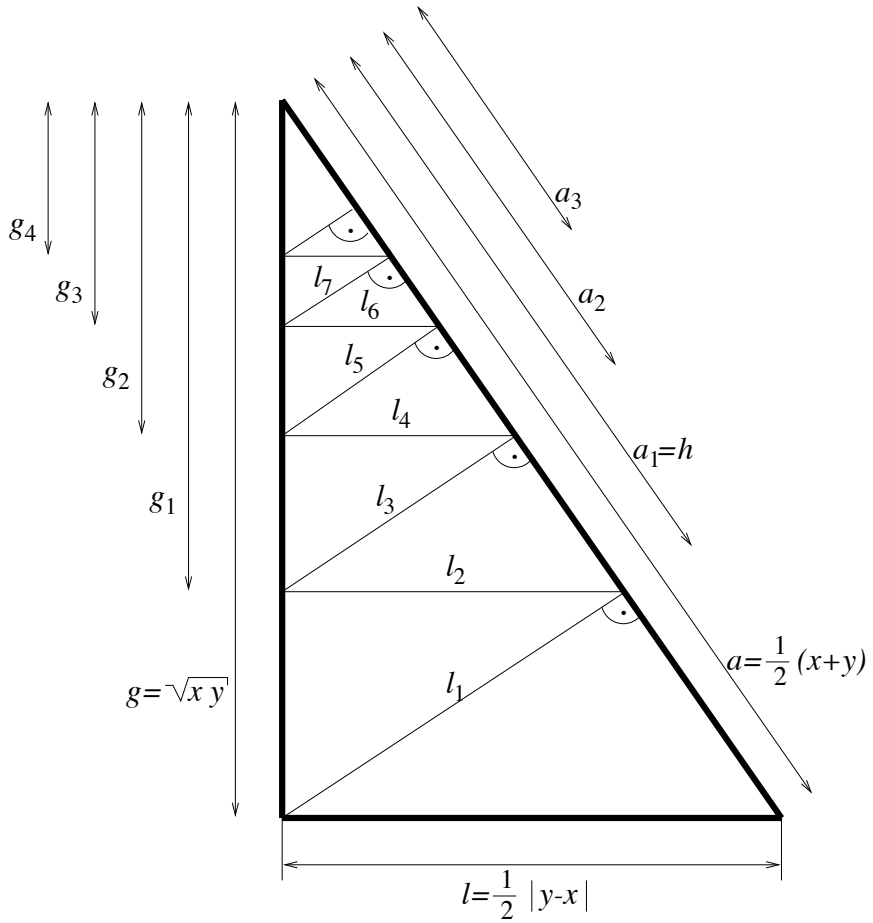


Bild 2: Pappos–Leiter

Hierbei hat man:

$$l_i = l \cdot \left(\frac{g}{a}\right)^i ;\ i = 1, 2, 3, \ldots \tag{50.9}$$

$$a_i = a \cdot \left(\frac{g}{a}\right)^{2i} ;\ i = 1, 2, 3, \ldots \tag{50.10}$$

$$g_i = g \cdot \left(\frac{g}{a}\right)^{2i} ;\ i = 1, 2, 3, \ldots \tag{50.11}$$

Lösung 2:

$$\left.\begin{array}{l} a(x,y) \\ g(x,y) \\ h(x,y) \end{array}\right\} \text{ ist Lösung } z \text{ der Verhältnisgleichung } \quad \frac{z-x}{y-z} = \left\{\begin{array}{l} \frac{x}{x} = 1 \\ \frac{x}{z} \\ \frac{x}{y} \end{array}\right. . \tag{50.12}$$

Lösung 3:

$a(x,y)$, $g(x,y)$ und $h(x,y)$ sind Spezialfälle des quasiarithmetischen Mittels (arithmetisches Mittel bzgl. der Funktion $f(z)$ mit der Umkehrfunktion $\mathrm{inv}f(z)$)

$$qa_f(x,y) = \mathrm{inv}f\left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right), \tag{50.13}$$

vgl. Tabelle 1 [6, 7].

$f(z)$	$\mathrm{inv}f(z)$	$qa_f(x,y)$
z	z	$a(x,y)$
$\ln z$	e^z	$g(x,y)$
z^{-1}	z^{-1}	$h(x,y)$
z^2	$z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{z}$	$\sqrt{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ quadratisches Mittel
z^p	$z^{\frac{1}{p}}$	$\sqrt[p]{\frac{1}{2}(x^p+y^p)}$ p–tes Potenzmittel
z^p $\begin{matrix}p\to+\infty\\ p\to-\infty\end{matrix}$ z^{-p}		$\max(x,y)$
		$\min(x,y)$

Tabelle 1: Spezielle $qa_f(x,y)$

(b) Loten Sie die in (a) betrachteten Lösungen weiter aus.

(c) Zeigen Sie, daß alle in Tabelle 1 angegebenen Spezialfälle des $qa_f(x,y)$ auf Spezialfälle von

$$f(z) = z^p \tag{50.14}$$

zurückgeführt werden können (vgl. [7]). Erweitern Sie Tabelle 1 durch Hinzunahme weiterer charakteristischer Funktionen $f(z)$. □

50.1.3 Heron–sqr(a)

Der $\sqrt{a}$–Algorithmus des Heron von Alexandria (1. Jh. n. Chr.) benutzt das arithmetische Mittel als wesentlichen Bestandteil eines konsequent aufgebauten Iterationsverfahrens zur Berechnung der Funktionswerte der reellen Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ [8] (vgl. auch [4], Baustein 2):

Regel	Bedingung	Aktion	Verbundaktion
1		$x := x(0) \in \mathbb{R}_+$	
2		$y := \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$	
3	$\mid y - x \mid \geq \varepsilon$	$x := y$	goto $r2$
4		$\sqrt{a} :\approx x$	stop

Algorithmus (A1): Iterative Berechnung von $\sqrt{a},\ a \in \mathbb{R}_+$

50.1.4 Archimedes–π, Archimedes–π–Derivate

50.1.4.1 Archimedes–π

Archimedes von Syrakus (287 – 212 v. Chr.) hat als erster ein systematisches Vorgehen zur Berechnung von π beschrieben [1, 5, 9, 10]:

- Der Einheitskreis wird bezüglich seines Umfanges 2π [1] von $\left\{ \begin{array}{l} \text{innen} \\ \text{außen} \end{array} \right.$ her angenähert durch das $\left\{ \begin{array}{l} \text{eingeschriebene} \\ \text{gleichliegende umgeschriebene} \end{array} \right.$ regelmäßige n–Eck mit der Seitenlänge $\left\{ \begin{array}{l} x_n \\ y_n \end{array} \right.$:

$$n\,x_n < 2\pi < n\,y_n \tag{50.15}$$

und zwar umso genauer, je größer n ist (Bild 3).

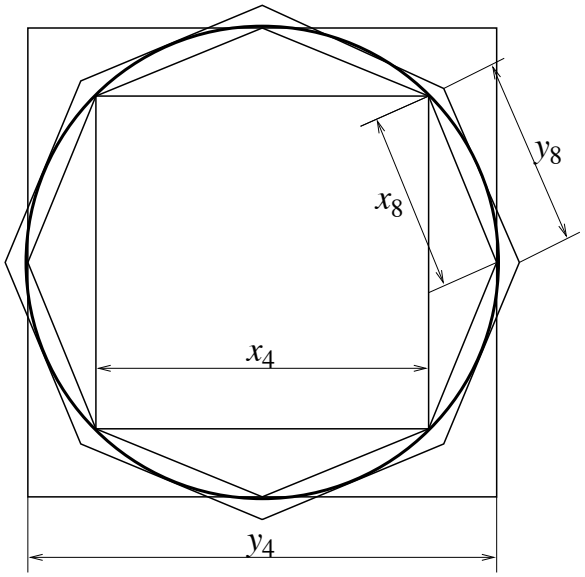


Bild 3: Archimedes–Annäherung des Einheitskreises

- Dieser Näherungsprozeß wird schrittweise ausgeführt.
- Er beginnt zweckmäßigerweise mit $n = 3$, $n = 4$ oder $n = 6$, es ist dann

n	3	4	6
x_n	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1
y_n	$2\sqrt{3}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$

. (50.16)

[1] Das gleiche gilt bezüglich des Flächeninhaltes π, vgl. [11].

- Bei jedem Näherungsschritt erfolgt eine Halbierung des Zentriwinkels und damit simultan eine Verdoppelung der Seitenzahl von eingeschriebenem und gleichliegendem umgeschriebenen regelmäßigen n–Eck (Bild 4)

$$\alpha_{2n} = \frac{1}{2}\,\alpha_n\,. \tag{50.17}$$

Es läßt sich dann leicht — und das ist der quantitative Kern des Archimedes–Ansatzes — eine einfache Beziehung

– zwischen x_{2n} und x_n (Rekursionsgleichung)

$$x_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - x_n^2}}\,,\ ^{2} \tag{50.18}$$

nach Umformung

$$x_{2n} = \frac{x_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - x_n^2}}}\,, \tag{50.19}$$

– und zwischen y_n und x_n (Substitutionsgleichung)

$$y_n \;=\; \frac{2\,x_n}{\sqrt{4 - x_n^2}}\ ^{3} \tag{50.20}$$

angeben (vgl. Bild 4).

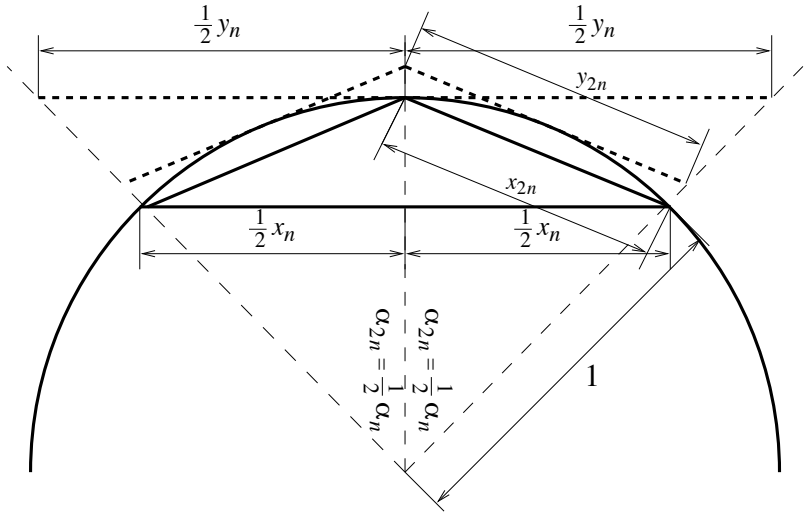


Bild 4: Archimedes – Näherungsschritt: Halbierung des Zentriwinkels, Verdoppelung der Seitenanzahl

[2] Aus den Gln. (50.18) und (50.16) folgen die Kettenwurzeldarstellungen (vgl. auch [4], Unit ?)

$$x_2 = 2 = 2\sin\frac{\pi}{2} \tag{50.21}$$

$$x_4 = \sqrt{2} = 2\sin\frac{\pi}{4} \tag{50.22}$$

$$x_8 = \sqrt{2-\sqrt{2}} = 2\sin\frac{\pi}{8} \tag{50.23}$$

$$x_{2^{k+1}} = \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{\substack{k-\text{fach geschachtelte Kettenwurzel,}\\ k-\text{mal Radikand 2}}} = 2\sin\frac{\pi}{2^{k+1}} \tag{50.24}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\ldots\ \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{\substack{k-\text{fach geschachtelte Kettenwurzel,}\\ k-\text{mal Radikand 2}}}} \tag{50.25}$$

$$= \frac{2^{-k+1}}{\prod_{l=1}^{k}\cos\frac{\pi}{2^{l+1}}}\,;\ k=1,2,3,\ldots \tag{50.26}$$

$$x_3 = \sqrt{3} = 2\sin\frac{\pi}{3} \tag{50.27}$$

$$x_6 = 1 = 2\sin\frac{\pi}{6} \tag{50.28}$$

$$x_{12} = \sqrt{2-\sqrt{3}} = 2\sin\frac{\pi}{12} \tag{50.29}$$

$$x_{3\cdot 2^k} = \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}_{\substack{k-\text{fach geschachtelte Kettenwurzel,}\\ (k-1)-\text{mal Radikand 2, einmal Radikand 3}}} = 2\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^k} \tag{50.30}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\ldots\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}} \tag{50.31}$$

$$= \frac{2^{-k+1}}{\prod_{l=2}^{k}\cos\frac{\pi}{3\cdot 2^l}}\,;\ k=2,3,4,\ldots \tag{50.32}$$

Die Umkehrformel für Gl. (50.18) lautet

$$x_n = x_{2n}\sqrt{4-x_{2n}^2}. \tag{50.33}$$

[3] Zwischen x_n und y_n besteht die Beziehung

$$\left(\frac{2}{x_n}\right)^2 - \left(\frac{2}{y_n}\right)^2 = 1. \tag{50.34}$$

Die Umkehrformel für Gl. (50.20) lautet

$$x_n = \frac{2\,y_n}{\sqrt{4+y_n^2}}. \tag{50.35}$$

- Nun lassen sich die halben Umfänge von $\left\{ \begin{array}{l} \text{eingeschriebenem} \\ \text{umgeschriebenem} \end{array} \right.$ n–Eck leicht berechnen

$$s_n = \frac{1}{2} n x_n \tag{50.36}$$

$$S_n = \frac{1}{2} n y_n \tag{50.37}$$

und damit π von $\left\{ \begin{array}{l} \text{unten} \\ \text{oben} \end{array} \right.$ her annähern:

$$s_n < \pi < S_n \tag{50.38}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \pi.\,^{4} \tag{50.39}$$

Die Ausführung der Archimedes–s_n–Berechnung mittels Gl. (50.16), $\left\{ \begin{array}{l} \text{Gl. (50.18)} \\ \text{Gl. (50.19)} \end{array} \right.$ und Gl. (50.39) bei 16–stelliger Genauigkeit liefert die in $\left\{ \begin{array}{l} \text{Tabelle 2} \\ \text{Tabelle 3} \end{array} \right.$ dargestellten Ergebnisse.

Man erkennt aus Tabelle 2:

Die näherungsweise Berechnung von π mittels der Rekursionsgleichung (50.18) verläuft nach einer von der zur Verfügung stehenden Berechnungsgenauigkeit abhängigen Anzahl von konvergierenden Schritten instabil (die erhaltenen Näherungswerte verschlechtern sich wieder, s_n springt und wird schließlich 0).

Ursache hierfür ist:

– x_n und damit x_n^2 laufen mit steigendem n gegen 0,
– damit wird auch der äußere Radikand des geschachtelten Wurzelausdruckes in Gl. (50.18) sehr klein
– und die verfügbare Zahlendarstellung erlaubt keine genaue Berechnung von x_{2n} und s_{2n} mehr.

---

[4] Aus Gl. (50.36), (50.39) und (50.25) folgt dann für $s_{2^{k+1}}$ und π:

$$s_{2^{k+1}} = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}}_{\substack{k-\text{fach geschachtelte Kettenwurzel,} \\ k-\text{mal Radikand 2}}} \tag{50.40}$$

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \ldots \quad \text{(F. Viéta 1593).} \tag{50.41}$$

n	x_n	s_n
6	1.0	3.0
12	0.517638090205042	3.105828541230250
24	0.261052384440103	3.132628613281237
48	0.130806258460286	3.139350203046872
96	0.065438165643553	3.141031950890530
192	0.032723463252972	3.141452472285344
384	0.016362279207873	3.141557607911622
768	0.008181208052471	3.141583892148936
1536	0.004090612582340	3.141590463236762
3072	0.002045307360705	3.141592106043048
6144	0.001022653813994	3.141592516588155
12288	0.000511326923606	3.14159218640789
24576	0.000255663463974	3.141592645321216
49152	0.000127831731987	3.141592645321216
98304	0.000063915865994	3.141592645321216
196608	0.000031957932996	3.141592645321216
393216	0.000015978964761	3.141592303811738
786432	0.000007989482381	3.141592303811738
1572864	0.000003994734242	3.141586839655041
3145728	0.000001997367121	3.141586839655041
6291456	0.000000998711352	3.141674265021758
12582912	0.000000499355676	3.141674265021758
25165824	0.000000249788978	3.143072740170040
50331648	0.000000124672059	3.137475099502783
100663296	0.000000063220273	3.181980515339464
201326592	0.000000029802322	3.
402653184	0.000000014901161	3.
805306368	0	0
1610612736	0	0

Tabelle 2: s_n–Berechnung mittels Gln. (50.16), (50.18) und (50.39), Start mit $n = 6$

Abhilfe schafft die Umformung von Gl. (50.18) in Gl. (50.19); der äußere Radikand des jetzt im Nenner befindlichen Wurzelausdruckes läuft stabil gegen 4. Tabelle 3 zeigt die so erreichte stabile Konvergenz.

Aufgabe 2

Lesen Sie hierzu [10, 12, 13, 14, 15]. □

n	x_n	s_n
6	1.0	3.0
12	0.517638090205041	3.105828541230249
24	0.261052384440103	3.132628613281238
48	0.130806258460286	3.139350203046867
96	0.065438165643552	3.141031950890509
192	0.032723463252974	3.141452472285462
384	0.016362279207874	3.141557607911857
768	0.008181208052470	3.141583892148318
1536	0.004090612582328	3.141590463228050
3072	0.002045307360677	3.141592105999271
6144	0.001022653814027	3.141592516692156
12288	0.000511326923725	3.141592619365383
24576	0.000255663463951	3.141592645033690
49152	0.000127831732237	3.141592651450766
98304	0.000063915866151	3.141592653055036
196608	0.000031957933080	3.141592653456103
393216	0.000015978966540	3.141592653556370
786432	0.000007989483270	3.141592653581437
1572864	0.00000399474163	3.141592653587703
3145728	0.00000199737081	3.141592653589270
6291456	0.00000099868541	3.141592653589662
12582912	0.00000049934270	3.141592653589759
25165824	0.00000024967135	3.141592653589784
50331648	0.00000012483568	3.1415926535897900
100663296	0.00000006241784	3.141592653589791
201326592	0.00000003120892	3.141592653589792
402653184	0.00000001560446	3.141592653589792

Tabelle 3: s_n–Berechnung mittels Gln. (50.16), (50.19) und (50.39), Start mit $n = 6$

50.1.4.2 Archimedes–π–Derivate

Die vorstehend diskutierten Berechnungsprobleme lassen sich vollständig umgehen, wenn wie folgt basierend auf dem Archimedes–Ansatz zur π–Berechnung von vornherein Rekursionsformeln für die halben Umfänge bzw. für die Flächeninhalte des $\left\{\begin{array}{l}\text{eingeschriebenen}\\ \text{umgeschriebenen}\end{array}\right.$ n–Eckes benutzt werden.

Aus den Gln. (50.18) und (50.20) erhält man mit Gl. (50.2) und (50.4) für die halben Umfänge von $\left\{\begin{array}{l}\text{eingeschriebenem}\\ \text{umgeschriebenem}\end{array}\right.$ n–Eck

$$\begin{cases} s_n = \frac{1}{2}\, n x_n & (50.36) \\ S_n = \frac{1}{2}\, n y_n & (50.37) \end{cases}$$

bzw. Flächeninhalte von $\left\{ \begin{array}{l} \text{eingeschriebenem} \\ \text{umgeschriebenem} \end{array} \right.$ n–Eck

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{4}\, n x_n \sqrt{4 - x_n^2} \\ A_n = \frac{1}{2}\, n y_n \end{cases} \qquad (50.42)$$

die bemerkenswert einfachen Rekursionsgleichungen (vgl. [11])

$$\begin{aligned} S_{2n} &= h(s_n, S_n) \\ s_{2n} &= g(s_n, S_{2n}) \end{aligned} \qquad (50.43)$$

bzw.

$$\begin{aligned} a_{2n} &= g(a_n, A_n) \\ A_{2n} &= h(a_{2n}, A_n)\,. \end{aligned} \qquad (50.44)$$

Die zugehörigen Startwerte folgen aus Gl. (50.16):

n	3	4	6
s_n	$\frac{3}{2}\sqrt{3}$	$2\sqrt{2}$	3
S_n	$3\sqrt{3}$	4	$2\sqrt{3}$
a_n	$\frac{3}{4}\sqrt{3}$	2	$\frac{3}{2}\sqrt{3}$
A_n	$3\sqrt{3}$	4	$2\sqrt{3}$

(50.45)

und es ist

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \pi \qquad (50.39)$$

bzw.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} A_n = \pi\,. \qquad (50.46)$$

Damit lassen sich die nachstehenden Mittelwert–Algorithmen zur näherungsweisen Berechnung von π angeben:

Regel	Bedingung	Aktion	Verbundaktion
1		$x := 4;\ y := 2\sqrt{2}$	
2	$\mid x - y \mid \leq \varepsilon$	$\pi :\approx y$	stop
3		$x := h(x, y)$	
4		$y := g(x, y)$	goto $r2$

Algorithmus (A2): Näherungsweise Berechnung von π, basierend auf den Gln. (50.43), (50.45) und (50.39), Start mit $n = 4$

Regel	Bedingung	Aktion	Verbundaktion
1		$x := 2;\ y := 4$	
2	$\mid x - y \mid \leq \varepsilon$	$\pi :\approx y$	stop
3		$x := g(x, y)$	
4		$y := h(x, y)$	goto $r2$

Algorithmus (A3): Näherungsweise Berechnung von π (J. Gregory 1667) [16], basierend auf den Gln. (50.44), (50.45) und (50.46), Start mit $n = 4$

Aufgabe 3

(a) Leiten Sie die Gln. (50.16) und (50.18) bis (50.45) her.

(b) Untersuchen Sie experimentell die Dynamik des Algorithmus (A2) (vgl. [4], Baustein 2). Läßt sich $r2$ noch verbessern (genauere Bestimmung von π aus x und y nach Ansprechen der Haltbedingung)?

Lösung:

Man erkennt aus **Experiment 1.1** (Tabelle 4, s. S. 13–15):

- $\left.\begin{matrix} x(t) \\ y(t) \end{matrix}\right\}$ nähert sich von $\left\{\begin{matrix} \text{oben} \\ \text{unten} \end{matrix}\right.$ her π:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \pi\,. \tag{50.47}$$

- Die Annäherung von $x(t)$ erfolgt dabei nur halb so schnell wie die von $y(t)$:

$$2\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2} \;=\; 2.94\ldots \geq \frac{x(t)-x(t+1)}{y(t+1)-y(t)} \geq \lim_{t\to\infty} \frac{x(t)-x(t+1)}{y(t+1)-y(t)} \;=\; 2\,, \tag{50.48}$$

das dementsprechend gewichtete arithmetische Mittel

$$x1(t) = \frac{1}{3}\,(x(t) + 2\,y(t)) \tag{50.49}$$

nähert sich also π (von oben her)

$$\lim_{t\to\infty} x1(t) = \pi \tag{50.50}$$

unter allen gewichteten arithmetischen Mitteln

$$\frac{a\,x(t) + b\,y(t)}{a+b} \tag{50.51}$$

in engstmöglicher Weise (vgl. Bild 5; Huygens 1654 [17, 18]). Dabei verdoppelt sich im Mittel die Anzahl der gültigen Stellen in $x1(t)$ gegenüber $x(t)$ und $y(t)$.

t	$x(t)$	$y(t)$	$\frac{x(t)-x(t+1)}{y(t+1)-y(t)}$	$\frac{x(t)-x(t+1)}{x(t+1)-x(t+2)}$	$\frac{y(t)-y(t+1)}{y(t+1)-y(t+2)}$	$x1(t)=\frac{1}{3}(x(t)+2\,y(t))$	$\frac{x1(t)-x1(t+1)}{x1(t+1)-x1(t+2)}$
0	4.0	2.82842712475	2.9449473	5.2344463	3.8854501	3.2189514164974600651	19.740584
1	3.31370849898	3.06146745892	2.1859897	4.2467770	3.9711547	3.1455478056087322460	16.742208
2	3.18259787807	3.12144515226	2.0441157	4.0587498	3.9927756	3.1418293941968775606	16.176362
3	3.15172490743	3.13654849055	2.0108890	4.0145143	3.9981931	3.1416072961737115420	16.043550
4	3.14411838525	3.14033115695	2.0027136	4.0036179	3.9995482	3.1415935663851366958	16.010854
5	3.14222362994	3.14127725093	2.0006779	4.0009038	3.9998871	3.1415927106026675272	16.002712
6	3.14175036917	3.14151380114	2.0001694	4.0002259	3.9999718	3.1415926571525228706	16.000678
7	3.14163208070	3.14157294037	2.0000424	4.0000565	3.9999929	3.1415926538124548580	16.000169
8	3.14160251026	3.14158772528	2.0000106	4.0000141	3.9999982	3.1415926536037094493	16.000042
9	3.14159511775	3.14159142151	2.0000026	4.0000035	3.9999996	3.1415926535906629994	16.000011
10	3.14159326963	3.14159234557	2.0000007	4.0000009	3.9999990	3.1415926535898475985	16.000003
11	3.14159280760	3.14159257658	2.0000002	4.0000002	3.9999999	3.1415926535897966360	16.000001
12	3.14159269209	3.14159263434	2.0000000	4.0000001	3.9999999	3.1415926535897934508	16.000000
13	3.14159266321	3.14159264878	2.0000000	4.0000000	3.9999999	3.1415926535897932517	16.000000
14	3.14159265599	3.14159265239	2.0000000	4.0000000	3.9999999	3.1415926535897932393	16.000000
15	3.14159265419	3.14159265329	2.0000000	4.0000000	3.9999999	3.1415926535897932385	16.000000

Tabelle 4: Experiment 1.1
Experimentelle Untersuchung der Dynamik des Algorithmus (A2)

t	$y1(t) = \frac{4}{3}\,y(t+1) - \frac{1}{3}\,y(t)$	$\frac{y1(t)-y1(t+1)}{y1(t+1)-y1(t+2)}$	$y2(t) = \frac{16}{15}\,y1(t+1) - \frac{1}{15}\,y1(t)$	$\frac{y2(t)-y2(t+1)}{y2(t+1)-y2(t+2)}$
0	3.1391475703122275325691 14	15.770193	3.1415903931299371755042996738672523	63.45634886
1	3.1414377167038303228208 51	15.942265	3.1415926179711063410330897067452128	63.86361538
2	3.1415829366419015898948 25	15.985548	3.1415926530320767421685107236473276	63.96587427
3	3.1415920457576907951514 05	15.996386	3.1415926535810743238542478419610769	63.99146672
4	3.1415926155921128533103 20	15.999096	3.1415926535896569874689263758623118	63.99786656
5	3.1415926512148104790840 13	15.999774	3.1415926535897911094707316808662333	63.99946663
6	3.1415926534413548200715 62	15.999943	3.1415926535897932051968707925992087	63.99986666
7	3.1415926535805158061265 39	15.999986	3.1415926535897932379428646163476836	63.99996666
8	3.1415926535892133984543 44	15.999986	3.1415926535897932384545218358657092	63.99999167
9	3.1415926535897569984545 11	15.999999	3.1415926535897932384625164840848323	63.99999792
10	3.1415926535897909734620 16	15.999999	3.1415926535897932384626414004795223	63.99999948
11	3.1415926535897930969001 02	15.999999	3.1415926535897932384626433522982529	63.99999987
12	3.1415926535897932961498 5	15.999999	3.1415926535897932384626433827954208	63.99999997
13	3.1415926535897932379096 65	15.999999	3.1415926535897932384626433832719391	63.99999999
14	3.1415926535897932384280 82	15.999999	3.1415926535897932384626433832793847	63.99999999
15	3.1415926535897932384604 83	15.999999	3.1415926535897932384626433832795010	63.99999999

Tabelle 4: Fortsetzung

t	$y3(t) = \frac{64}{63}\, y2(t+1) - \frac{1}{63}\, y2(t)$	$\frac{y3(t)-y3(t+1)}{y3(t+1)-y3(t+2)}$
0	3.14159265328604553413672129456867244942092052187 38	254.570693
1	3.14159265358860008186907296201085325408732599054 46	255.641761
2	3.14159265358978857118259287558510462255444652182 74	255.910383
3	3.14159265358979322022471492401947422944384220858 65	255.977592
4	3.14159265358979323839139525713613684433032333301 46	255.994398
5	3.14159265358979323846236506421401786763472024626 01	255.998599
6	3.14159265358979323846264229608972283413131336922 44	255.999650
7	3.14159265358979323846264337903266201435111317053 87	255.999912
8	3.14159265358979323846264338326291365639354117972 75	255.999978
9	3.14159265358979323846264338327943808252053824087 44	255.999995
10	3.14159265358979323846264338327950263106561466512 70	255.999998
11	3.14159265358979323846264338327950288320837425842 71	255.999999
12	3.14159265358979323846264338327950288419330691835 06	255.999999
13	3.14159265358979323846264338327950288419715431155 86	255.999999
14	3.14159265358979323846264338327950288419716934043 83	255.999999
15	3.14159265358979323846264338327950288419716939914 49	255.999999

Tabelle 4: Fortsetzung

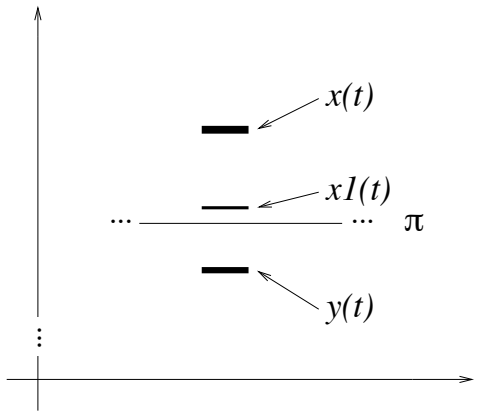


Bild 5: Annäherung von $x(t)$, $y(t)$ und $x1(t)$ an π

Damit kann $r2$ in (A2) wie folgt verbessert werden:

2'	$\mid x - y \mid \leq \varepsilon$	$\pi :\approx \frac{1}{3}(x + 2\,y)$	stop

.

- Der Differenzenquotient des $\left\{ \begin{array}{l} \text{Output } x(t) \text{ und } y(t) \\ \text{„korrigierten“ Output } x1(t) \end{array} \right.$ von (A2) läuft gegen $\left\{ \begin{array}{l} 4 \\ 16 = 4^2 \end{array} \right.$.
- Der Differenzenquotient von $y(t)$ nähert sich schneller als der Differenzenquotient von $x(t)$ dem Wert 4. Daher soll im vorliegenden Zusammenhang zunächst nur $y(t)$ betrachtet werden. Das gemäß Tabelle 4, Spalte 6 gebildete gewichtete arithmetische Mittel (Korrektur erster Stufe)
$$y1(t) = \frac{4}{3}\,y(t+1) - \frac{1}{3}\,y(t) \tag{50.52}$$
nähert sich π (von unten her)
$$\lim_{t\to\infty} y1(t) = \pi \tag{50.53}$$
unter allen gewichteten arithmetischen Mitteln
$$\frac{a\,y(t+1) + b\,y(t)}{a+b} \tag{50.54}$$
in engstmöglicher Weise. Dabei verdoppelt sich im Mittel die Anzahl der gültigen Stellen in $y1(t)$ gegenüber $y(t)$.
- Der Differenzenquotient von $y1(t)$ läuft gegen den Wert $16 = 4^2$. Das dementsprechend gebildete optimal gewichtete arithmetische Mittel (Korrektur zweiter Stufe)
$$y2(t) = \frac{16}{15}\,y1(t+1) - \frac{1}{15}\,y1(t) \tag{50.55}$$

nähert sich π (von unten her)

$$\lim_{t\to\infty} y1(t) \;=\; \pi \tag{50.56}$$

unter allen gewichteten arithmetischen Mitteln

$$\frac{a\,y1(t+1)+b\,y1(t)}{a+b} \tag{50.57}$$

in engstmöglicher Weise. Dabei verdreifacht sich im Mittel die Anzahl der gültigen Stellen in $y2(t)$ gegenüber $y(t)$.

- Der Differenzenquotient von $y2(t)$ läuft gegen den Wert $64 = 4^3$. Die dementsprechende Korrektur dritter Stufe

$$y3(t) \;=\; \frac{4^3}{4^3-1}\,y2(t+1) - \frac{1}{4^3-1}\,y2(t) \tag{50.58}$$

liefert gegenüber $y(t)$ im Mittel die vierfache Anzahl von gültigen Stellen und besitzt den Differenzenquotienten 4^4.

Die hier experimentell gefundene, beliebig fortsetzbare 4–basierte y–Korrektur

$$yk(t) \;=\; \frac{4^k}{4^k-1}\,y(k-1)(t+1) - \frac{1}{4^k-1}\,y(k-1)(t)\,;\; k=1,2,3,\ldots \qquad y(0)(t)=y(t) \tag{50.59}$$

läßt sich aus der rekursiven Darstellung leicht in Matrizennotation überführen (s. S. 18).
Die Korrekturmatrix $\underline{A}$ besitzt folgendes Bildungsgesetz

$$\underline{A} \;=\; (A_{ij})_{i=0,j=0}^{\infty,\infty}$$

$$A_{ij} \;=\; \begin{cases} (-1)^{i-j}\left(\prod_{k=1}^{i-j}\frac{1}{4^k-1}\right)\left(\prod_{l=1}^{j}\frac{4^l}{4^l-1}\right) & i-j\geq 0 \\ 0 & i-j<0 \end{cases} \quad \text{für} \quad . \tag{50.60}$$

Ihre Elemente A_{ij} haben folgende interessante Eigenschaften:

$$(\forall i)\sum_{j=0}^{\infty} A_{ij} \;=\; 1 \tag{50.61}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} A_{i0} \;=\; \lim_{i\to\infty} A_{ii}^{-1} \tag{50.62}$$

$$\begin{pmatrix} y0(t) \\ y1(t) \\ y2(t) \\ y3(t) \\ y4(t) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -\left(\frac{1}{3}\right) & +\left(\frac{4}{3}\right) & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ +\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{15}\right) & -\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right) & +\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{16}{15}\right) & 0 & 0 & \cdots \\ -\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{15}\right)\left(\frac{1}{63}\right) & +\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{15}\right)\left(\frac{4}{3}\right) & -\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{16}{15}\right) & +\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{16}{15}\right)\left(\frac{64}{63}\right) & 0 & \cdots \\ +\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{15}\right)\left(\frac{1}{63}\right)\left(\frac{1}{255}\right) & -\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{15}\right)\left(\frac{1}{63}\right)\left(\frac{4}{3}\right) & +\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{15}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{16}{15}\right) & -\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{16}{15}\right)\left(\frac{64}{63}\right) & +\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{16}{15}\right)\left(\frac{64}{63}\right)\left(\frac{256}{255}\right) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t+1) \\ y(t+2) \\ y(t+3) \\ y(t+4) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (50.63)$$

$$\overrightarrow{y_{\text{korr}}}(t) \qquad \underline{A} \qquad \vec{y}(t) \quad (50.64)$$

mittels Gl. (2.59)

korrigierter Output von (A2), Verbesserung von $r2$

Korrekturmatrix

unkorrigierter Output von (A2)

$$\sum_{i=0}^{\infty} A_{i0} = 1 - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{15}\left(1 - \frac{1}{63}\left(1 - \frac{1}{255}\left(1 - \dots \right. \right. \right. \right. \tag{50.65}$$

$$= \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{15 \cdot 63}\left(31 + \frac{1}{255 \cdot 1023}\left(511 + \frac{1}{4095 \cdot 16383}\left(8191 + \dots \right. \right. \right. \right. \tag{50.66}$$

$$= \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{1\,|}{|\,2} + \frac{3\,|}{|\,14} + \frac{15\,|}{|\,62} + \frac{63\,|}{|\,254} + \frac{255\,|}{|\,1022} + \frac{1023\,|}{|\,4094} + \dots \tag{50.67}$$

$$= 0.68853\,75371\,20339\,71545\,65143\dots\ . \tag{50.68}$$

(c) Zeigen Sie, daß sich für

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y(t) - y(t+1)}{y(t+1) - y(t+2)} = 4 \tag{50.69}$$

die Korrektur erster Stufe

$$y1(t) = \frac{4}{3}\,y(t+1) - \frac{1}{3}\,y(t) \tag{50.70}$$

unter allen gewichteten arithmetischen Mittel

$$\frac{a\,y(t+1) + b\,y(t)}{a+b} \tag{50.71}$$

in engstmöglicher Weise (d.h. am schnellsten) von unten her π nähert.
Erweitern Sie Ihren Beweis auch auf die y–Korrektur höherer Stufen.

(d) Leiten Sie Gl. (50.63) aus (50.59) her.

(e) Zeigen Sie, daß die Eigenschaften Gl. (50.61) sowie (50.62), (50.65)–(50.67) unmittelbar aus der Definitionsgleichung der A_{ij}, Gl. (50.60), folgen.
Interpretieren Sie den Zahlenwert Gl. (50.68), benutzen Sie hierzu [7, 19, 20, 21, 22].

(f) Untersuchen Sie experimentell, ob sich die Korrektur Gl. (50.63) auch auf
– $x(t)$ in Tabelle 4
– (A2) mit Startwert $n = 3$ ($x := 3\sqrt{3},\ y := \frac{3}{2}\sqrt{3}$)
anwenden läßt.

(g) Versuchen Sie die (A2) nachgeschaltete Korrektur Gl. (50.59) mit dem Ziel besserer Konvergenz unmittelbar (also rekursiv) in (A2) einzubauen.

(h) In Tabelle 5 sind die Verläufe von $y(t)$ aus Tabelle 4 und der mittels Gl. (50.63) korrigierten Werte $yk(0)$ zusammengestellt.

$y(t) = y0(t)\,;\ t = 0, 1, \ldots, 7$	$yk(0)\,,\ k = 1, 2, \ldots, 8$
2.828427124746190097603377	3.139147570312227532569114013517789193074 5
3.061467458920718173827679	3.141590393129937175504299673867252270784 0
3.121445152258052285572557	3.141592653286045534136721294568672449420 9
3.136548490545939263814258	3.141592653589786570291552772471410825870 3
3.140331156954752912317118	3.141592653589793238436859487119016896410 5
3.141277250932772868062019	3.141592653589793238462643364772495648220 1
3.141513801144301076328515	3.141592653589793238462643383279503209193
3.141572940367091384135800	3.141592653589793238462643383279502884197 0

Tabelle 5: Verlauf von $y(t)$ (Tabelle 4) und der mittels Gl. (50.63) korrigierten Werte

$$yk(0)$$

Vergleichen Sie die Verläufe der zugehörigen Differenzenquotienten

$$\frac{y(t) - y(t+1)}{y(t+1) - y(t+2)} \tag{50.72}$$

und

$$\frac{yk(0) - y(k+1)(0)}{y(k+1)(0) - y(k+2)(0)}\,. \tag{50.73}$$

Ergeben sich daraus neue Korrekturansätze für (A2)?

(i) Vergleichen Sie die Transformation

$$\vec{y}_{korr}(t) = \underline{A}\,\vec{y}(t) \tag{50.74}$$

mit der Euler–Transformation [7, 23, 24]. □

Aufgabe 4

Bearbeiten Sie die Fragestellungen von Aufgabe 3 zu Dynamik und Korrektur von (A2) in analoger Weise für den Gregory–Algorithmus (A3). □

Aufgabe 5

Geben Sie eine geometrische Veranschaulichung des Schleifenkörpers ($r3$ und $r4$) von

(A3) an.

Lösungsskizze:

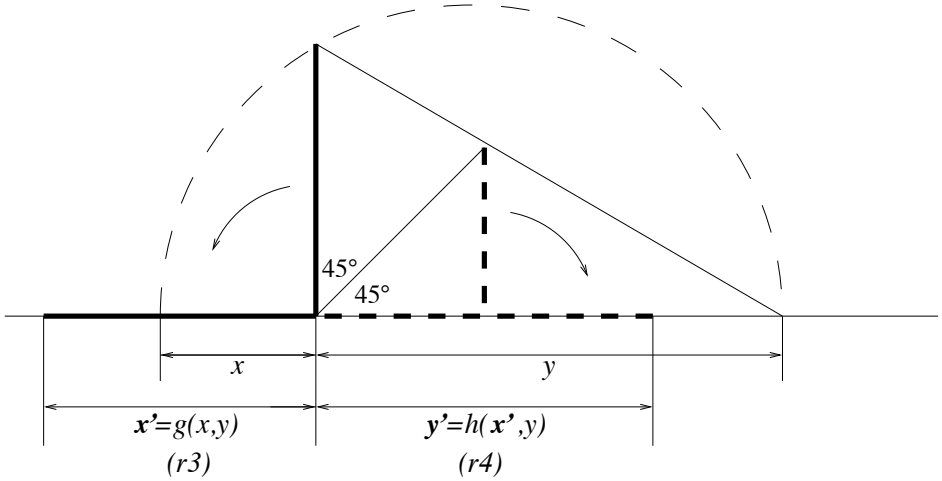


Bild 6: Geometrische Veranschaulichung des Schleifenkörpers ($r3$ und $r4$) von (A3)
$x = x(t)$; $x' = x(t+1)$
$y = y(t)$; $y' = y(t+1)$ □

Aufgabe 6

In [6] ist beschrieben, daß der wie folgt erweiterte Gregory–Algorithmus

Regel	Bedingung	Aktion	Verbundaktion
1		$x := u;\ y := v$	
2	$\mid x - y \mid \leq \varepsilon$	$f(u,v) :\approx y$	stop
3		$x := g(x,y)$	
4		$y := h(x,y)$	goto $r2$

Algorithmus (A4): Erweiterter Gregory–Algorithmus zur näherungsweisen Berechnung der Funktionswerte einer zweistelligen reellen Funktion $f(u,v)$

in Abhängigkeit von der Initialisierung (u,v) die Zahlenwerte

$$f(2,4) \;=\; \pi \tag{50.75}$$

$$f\left(\frac{99}{20}, \frac{18}{11}\right) \;=\; \ln 10 \tag{50.76}$$

liefert.

(a) Untersuchen Sie den Verlauf der durch (A4) generierten zweistelligen reellen Funktion $f(u,v)$.

(b) Geben Sie die Initialisierung (u,v) für weitere (A4)–generierbare Zahlenwerte an.

(c) Läßt sich für $f(u,v)$ ein Formelausdruck angeben? □

50.1.5 Cusanus–π

Der Ansatz von Cusanus (ca. 1450) zur Berechnung von π [11, 25, 26, 27] invertiert die in Abschn. 50.1.3 beschriebene Archimedes–π–Grundidee:

- Ein regelmäßiges n–Eck mit der Seitenlänge

$$x_n = \frac{2}{n} \tag{50.77}$$

wird bezüglich seines Umfanges 2 von $\left\{ \begin{array}{l} \text{innen} \\ \text{außen} \end{array} \right.$ her angenähert durch seinen $\left\{ \begin{array}{l} \text{Inkreis} \\ \text{Umkreis} \end{array} \right.$ mit dem Radius

$$r_n = \frac{x_n}{2 \tan \frac{\alpha_n}{2}} = \frac{1}{n \tan \frac{\alpha_n}{2}} \tag{50.78}$$

$$R_n = \frac{x_n}{2 \sin \frac{\alpha_n}{2}} = \frac{1}{n \sin \frac{\alpha_n}{2}} \tag{50.79}$$

(Bild 7):

$$2\,\pi\,r_n < 2 < 2\,\pi\,R_n \tag{50.80}$$

und zwar umso genauer, je größer n ist.

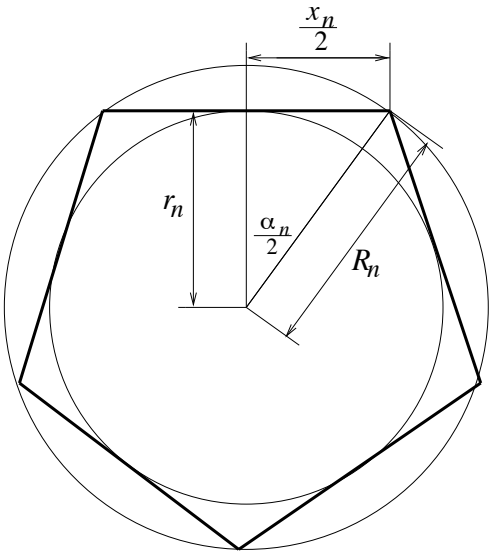


Bild 7: Cusanus–Annäherung des regelmäßigen n–Ecks mit konstantem Umfang 2, $\alpha_n = \frac{2\pi}{n}$, $x_n = \frac{2}{n}$

- Auf der Grundlage des Cusanus–Ansatzes wird dieser Näherungsprozeß nun schrittweise ausgeführt (der Umfang der so erhaltenen n–Ecke bleibt dabei konstant).

- Er beginnt zweckmäßigerweise mit $n = 3$, $n = 4$ oder $n = 6$, es ist dann

n	3	4	6
r_n	$\frac{1}{9}\sqrt{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
R_n	$\frac{2}{9}\sqrt{3}$	$\frac{1}{4}\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}$

. (50.81)

- Bei jedem Näherungsschritt erfolgt eine Halbierung des Zentriwinkels

$$\alpha_{2n} = \frac{1}{2}\,\alpha_n \tag{50.82}$$

und damit eine Verdoppelung der Seitenzahl sowie eine Halbierung der Seitenlänge

$$x_{2n} = \frac{1}{2}\,x_n. \tag{50.83}$$

Aus den Gln. (50.78) und (50.79) folgen mit (50.82) und (50.83) die bemerkenswert einfachen gekoppelten Rekursionsgleichungen

$$r_{2n} = a(r_n, R_n) \tag{50.84}$$
$$R_{2n} = g(r_{2n}, R_n)\,. \tag{50.85}$$

- Mit den Startwerten Gl. (50.81) lassen sich r_n und R_n nun leicht berechnen und so basierend auf Gl. (50.80) π von $\left\{\begin{array}{l}\text{oben}\\ \text{unten}\end{array}\right.$ her annähern:

$$\frac{1}{R_n} < \pi < \frac{1}{r_n} \tag{50.86}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{r_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{R_n} = \pi\,. \tag{50.87}$$

Damit ergibt sich der nachstehende Mittelwertalgorithmus zur näherungsweisen Berechnung von π:

Regel	Bedingung	Aktion	Verbundaktion
1		$x := \frac{1}{4};\ y := \frac{\sqrt{2}}{4}$	
2	$\mid x - y \mid \leq \varepsilon$	$\pi :\approx \frac{1}{y}$	stop
3		$x := a(x, y)$	
4		$y := g(x, y)$	goto $r2$

Algorithmus (A5): Näherungsweise Berechnung von π (dem Ansatz von Cusanus, ca. 1450, folgend), basierend auf den Gln. (50.81), (50.84) und (50.87), Start mit $n = 4$

Aufgabe 7

Zeigen Sie, daß die Algorithmen (A2) und (A5) identisch sind. □

Aufgabe 8

Modifizieren Sie den Cusanus–π–Ansatz (vgl. [11]):

- Ein regelmäßiges n–Eck mit der Seitenlänge x_n wird von $\left\{ \begin{array}{l} \text{innen} \\ \text{außen} \end{array} \right.$ her angenähert durch seinen $\left\{ \begin{array}{l} \text{Inkreis} \\ \text{Umkreis} \end{array} \right.$ mit dem Radius $\left\{ \begin{array}{l} r_n \\ R_n \end{array} \right.$ (vgl. Bild 6) und zwar umso genauer, je größer n ist.
- Dieser Näherungsprozeß wird schrittweise, beginnend mit $n = 3$, 4 oder 6, durch fortlaufende Halbierung des Zentriwinkels und Verdoppelung der Seitenanzahl ausgeführt; dabei bleibt der Flächeninhalt der so erhaltenen n–Ecke konstant.
  (a) Notieren Sie den so erhaltenen Algorithmus (A6) zur näherungsweisen Berechnung von π in Form einer Entscheidungstabelle.
  (b) Diskutieren Sie die Herleitung der Algorithmen (A2), (A3), (A5) und (A6) im Lichte der Methode der finiten Elemente [28, 29].
  (c) Zeigen Sie, daß die Algorithmen (A3) und (A6) identisch sind. □

50.1.6 Salamin–π, agm–Algorithmus

Basierend auf

- dem erstmalig von Gauß (beginnend 1791) untersuchten sehr schnell konvergierenden „arithmetisch–geometrischen Mittel“ $agm(a, b)$ zweier positiver reeller Zahlen a und b:

$$x_0 = a\,;\; y_0 = b \tag{50.88}$$

$$x_{n+1} = a(x_n, y_n)\,;\; y_{n+1} = g(x_n, y_n) \tag{50.89}$$

$$agm(a, b) = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n \tag{50.90}$$

- als Grundlage für die numerische Berechnung der vollständigen elliptischen Integrale

$$I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}} = \frac{\pi}{2\,agm(a, b)} \tag{50.91}$$

$$J(a,b) \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}\; dt \;\; {}^{5} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty} 2^i (x_i^2 - y_i^2)}{agm(a,b)} \tag{50.92}$$

- und der Legendreschen Beziehung

$$\begin{vmatrix} \frac{a}{a'} & \frac{a'}{a} & a\,a' \\ 0 & I(a,b) & J(a,b) \\ I(a',b') & 0 & J(a',b') \end{vmatrix} = \frac{\pi}{2}\,; \quad \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{b'}{a'}\right)^2 = 1 \tag{50.98}$$

wurde für

$$a = a' = 1\,,\; b = b' = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{50.99}$$

[5]Eine Ellipse mit der großen Halbachse a, der kleinen Halbachse b und der linearen Exzentrizität

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} \quad \text{(Bild 8)} \tag{50.93}$$

hat den Umfang

$$U(a,b) = 4\,J(a,b). \tag{50.94}$$

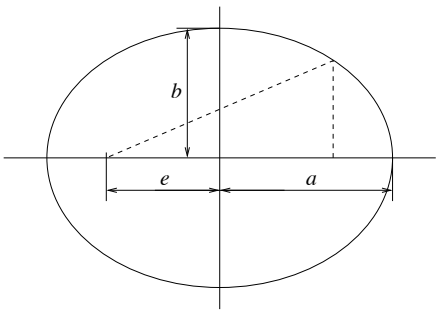


Bild 8: Ellipse in Mittelpunktlage

$U(a,b)$ läßt sich also auch mittels der Gln. (50.88)–(50.90) und (50.92) rekursiv berechnen. Außerdem besitzt $U(a,b)$ Darstellungen als Potenzreihe [7, 30], als infinitely nested expression und als Kettenbruch:

$$U(a,b) \;=\; 2\pi a \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2\,i-1} \binom{2i}{i}^2 \left(\frac{e}{4a}\right)^{2i}\right) \tag{50.95}$$

$$\;=\; 2\pi a \left(1 - \frac{1}{2^2}\left(\frac{e}{a}\right)^2 \left(1 + \frac{1\cdot 3}{4^2}\left(\frac{e}{a}\right)^2 \left(1 + \frac{3\cdot 5}{6^2}\left(\frac{e}{a}\right)^2 \left(1 + \frac{5\cdot 7}{8^2}\left(\frac{e}{a}\right)^2 \left(1 + ...\right)\right.\right.\right.\right. \tag{50.96}$$

$$\;=\; 2\pi a \left(1 - \frac{e^2 \;\;|}{|\; 2^2a^2} - \frac{1\cdot 2^2\cdot 3a^2e^2 \;\;|}{|\; 4^2a^2 + 1\cdot 3e^2} - \frac{3\cdot 4^2\cdot 5a^2e^2 \;\;|}{|\; 6^2a^2 + 3\cdot 5e^2} - \frac{5\cdot 6^6\cdot 7a^2e^2 \;\;|}{|\; 8^2a^2 + 5\cdot 7e^2} - ...\right) \tag{50.97}$$

von Salamin [31] und Brent [32] 1976 ein sehr schnell konvergierender Algorithmus (A7) zur näherungsweisen Berechnung von π gefunden, der bei jedem Schleifendurchlauf (unter der Voraussetzung hinreichend hoher Genauigkeit bei der Ausführung der erforderlichen Rechenoperationen) die doppelte Anzahl gültiger Stellen liefert:

Regel	Bedingung	Aktion	Verbundaktion
1		$x := 1;\ y := \frac{1}{\sqrt{2}};\ h := 1;\ z := 1$	
2	$\mid x - y \mid \leq \varepsilon$	$\pi :\approx \frac{4x^2}{h}$	stop
3		$(h, z) := (h - z(x-y)^2, 2z)$	
4		$(x, y) := (a(x, y), g(x, y))$	goto $r2$

Algorithmus (A7): Näherungsweise Berechnung von π (Salamin und Brent, 1976)

Aufgabe 9

(a) Konvergenzbestimmendes Kernstück des Salamin–π–Algorithmus (A7) ist der Gaußsche agm–Algorithmus (A8). Untersuchen Sie experimentell die Dynamik von (A8) für verschiedene Wertepaare (a, b), insbesondere für $(a, b) = (1, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Beziehen Sie für diesen Fall die π–Berechnung mittels (A7) mit ein.

Regel	Bedingung	Aktion	Verbundaktion
1		$(x, y) := (a, b)$	
2	$\mid x - y \mid \leq \varepsilon$	$agm(a, b) :\approx y$	stop
3		$(x, y) := (a(x, y), g(x, y))$	goto $r2$

Algorithmus (A8): Näherungsweise Berechnung von $agm(a, b)$ gemäß Gln. (50.88)–(50.90)

Lösungsskizze:

- **Experiment 1.2** (Tabelle 7, s. S. 28) zeigt:
  - (A8) mit der Initialisierung $(a, b) = (1, \frac{1}{\sqrt{2}})$ konvergiert sehr schnell, schon für $t = 4$ stimmen $x(t)$ und $y(t)$ in 20 Stellen überein:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} y(t) = agm(1, \frac{1}{\sqrt{2}}) = 0.84721\,30847\,93979\ldots .$$

  - Die Differenzenquotienten von $x(t)$ und $y(t)$

$$d\,x(t) = \frac{x(t) - x(t+1)}{x(t+1) - x(t+2)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x(t) & x(t+1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x(t+1) & x(t+2) \end{vmatrix}} \tag{50.100}$$

und

$$d\,y(t) = \frac{y(t) - y(t+1)}{y(t+1) - y(t+2)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y(t) & y(t+1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y(t+1) & y(t+2) \end{vmatrix}} \tag{50.101}$$

steigen gleichläufig mit größer werdendem t sehr stark an, die logarithmische Darstellung offenbart die Grenzwerte

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln d\,x(t)}{2^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln d\,y(t)}{2^t} = \pi$$

bzw.

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt[2^t]{d\,x(t)} = \lim_{t\to\infty} \sqrt[2^t]{d\,y(t)} = e^\pi$$

und damit die asymptotischen Verläufe

$$\begin{aligned} d\,x(t) &\approx (e^\pi)^{2^t} \\ &\approx (d\,x(t-1))^2 \quad {}^{6} \\ d\,y(t) &\approx d\,x(t). \end{aligned}$$

Führt man fußend auf Gl. (50.100) die höheren Differenzenquotienten

$$\begin{aligned} d^{(2)}x(t) &= d\,(d\,x(t)) = \frac{d\,x(t) - d\,x(t+1)}{d\,x(t+1) - d\,x(t+2)} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x(t) & x(t+1) & x(t+2) \\ x(t+1) & x(t+2) & x(t+3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x(t+1) & x(t+2) & x(t+3) \\ x(t+2) & x(t+3) & x(t+4) \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x(t+3) & x(t+4) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x(t+1) & x(t+2) \end{vmatrix}} \end{aligned} \tag{50.102}$$

$d^{(3)}x(t)$, $d^{(4)}x(t), \ldots$ ein, so erhält man die asymptotischen Verläufe

$$d\,x(t) \approx \frac{1}{d^{(2)}x(t-1)} \approx d^{(3)}x(t-1) \approx \frac{1}{d^{(4)}x(t-2)} \approx d^{(5)}x(t-2) \approx \ldots . \tag{50.103}$$

– Für die gewichtete Summe der Differenzenquadrate schließlich ergibt sich

$$\sum_{t=0}^{\infty} 2^t \,(x(t) - y(t))^2 = 0.08610\,68379\ldots .$$

---

[6] $d\,x(1)$ liefert e^π bereits auf 10 Stellen genau:

$e^\pi \approx \sqrt{d\,x(1)} = 23.14069\,263\ldots$.

t	$x(t)$	$y(t)$	$\frac{\ln d\, x(t)}{2^t}$	$\frac{\ln d\, y(t)}{2^t}$
0	1.	0.7071067811865475244	3.1415996282380210994	3.0549492560319616315
1	0.8535533905932737622	0.8408964152537145430	3.1415926536019547952	3.1397252021748418149
2	0.8472249029234941526	0.8472012667468914604	3.1415926535897932385	3.1415909099186151057
3	0.8472130848351928065	0.8472130847527653667	3.1415926535897932385	3.1415926535867528493
4	0.8472130847939790866	0.8472130847939790866	3.1415926535897932385	3.1415926535897932385
5	0.8472130847939790866	0.8472130847939790866	3.1415926535897932385	3.1415926535897932385

t	$\sum_{i=0}^{t} 2^i (x(i) - y(i))^2$	Salamin–$\pi = \frac{4(x(t))^2}{h(t)}$
0	0.0857864376269049511	4.
1	0.0861068356763973716	3.1876726427121086272
2	0.0861068379110727492	3.1416802932976532939
3	0.0861068379110727492	3.1415926538954464960
4	0.0861068379110727492	3.1415926535897932385
5	0.0861068379110727492	3.1415926535897932385

Tabelle 7: Experiment 1.2
agm–Algorithmus (A8) für $(1, \frac{1}{\sqrt{2}})$ und Salamin–π–Algorithmus (A7)

- Die Rekursionsgleichungen des Schleifenkörpers $(r3)$ von (A8)

$$x(t+1) = \frac{1}{2}(x(t) + y(t)) \tag{50.104}$$

$$y(t+1) = \sqrt{x(t)\, y(t)} \tag{50.105}$$

sind eindeutig umkehrbar; man erhält nach Umformung die „Rückrechnungsgleichungen“

$$\left.\begin{matrix} x(t) \\ y(t) \end{matrix}\right\} = x(t+1) \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \sqrt{(x(t+1))^2 - (y(t+1))^2}. \tag{50.106}$$

Es liegt nahe, in Erweiterung von (A8) nun auch den Verlauf von $x(t)$, $y(t)$ sowie der zugehörigen Differenzenquotienten für

$$t = -1, -2, -3, \dots ,$$

also eine ursprünglich gar nicht in Betracht gezogene Rekursionsrichtung, experimentell zu untersuchen.
Dieses Umkehrexperiment (**Experiment 1.3**: Tabelle 8, s. S. 30) führt zu folgenden Ergebnissen:

- $x(t) = 2^{-t}\, x(-t); \qquad t = -1, -2, -3, \dots$

  $y(t) = 2^{-t}\, (x(-t-1) - x(-t)); \; t = -1, -2, -3, \dots$

- $\lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{x(t)}{2^{-t+1}} = \lim\limits_{t\to\infty} x(t) = agm(1, \dfrac{1}{\sqrt{2}})$

- $\lim\limits_{t\to-\infty} d\, x(t) = 2$

  $d\, y(t) \cdot d\, y(-t-3) = 2; \; t \in \mathbb{Z}$

  $\lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{x(t) - y(t)}{x(t+1) - y(t+1)} = 2$

- $\lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{\sum\limits_{i=0}^{t} 2^i\, (x(i) - y(i))^2}{2^{-t}} = 2 \lim\limits_{t\to\infty} (x(t))^2 = 2 \left(agm(1, \dfrac{1}{\sqrt{2}}) \right)^2 = 1.435540\,0220\dots$.

(b) Für $d\, x(t)$ wurden in (a) zwei asymptotische Näherungen gefunden:

$$d\, x(t) \approx \begin{cases} (e^{\pi})^{2^t} & \text{für } t \gg 0 \\ 2 & \text{für } t \ll 0 \end{cases}; \; x(0) = 1, \; y(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{50.107}$$

Berechnen Sie in Analogie zu [4], Abschn. 3.2 mittels einer geeigneten Transformation den vollständigen Verlauf von $d\, x(t)$ (geschlossener Formelausdruck).

t	$x(t)$	$y(t)$	$d\,x(t)$	$d\,y(t)$
0	1.	0.7071067811865475244	23.1408540315329808063	21.2201087070732076248
-1	1.7071067811865475244	0.2928932188134524756	4.8284271247461900976	3.0960063928805241349
-2	3.3888996116939766105	0.0253139506791184383	2.3784142300054421334	0.6459934981397761707
-3	6.7777046786815424521	0.0009945447064107688	2.0149955485094430400	0.0942502240496698585
-4	13.5554093567036653857	0.0000000006594195184	2.0000278989334359365	0.0037488609800550242
-5	27.1108187134073307714	0.0000000000000000000	2.0000000000972924537	0.0000069747333588145

Tabelle 8: Experiment 1.3
Anwendung der „Rückrechnungsgleichungen“

Lösungshinweis:

Aus Gl. (50.100) folgt mit den Gln. (50.104) und (50.105)

$$d\,x(t) = 2\,\frac{\sqrt{\frac{x(t)}{y(t)}}+1}{\sqrt{\frac{x(t)}{y(t)}}-1} \tag{50.108}$$

und

$$\sqrt{\frac{x(t)}{y(t)}} = \frac{d\,x(t)+2}{d\,x(t)-2}\,. \tag{50.109}$$

Gl. (50.108) liefert schließlich mit den Gln. (50.100), (50.104) und (50.109) die Vorwärts– und die Rückwärtsrekursionsgleichung für $d\,x(t)$

$$d\,x(t+1) = \frac{1}{2}\left((d\,x(t))^2 + \sqrt{(d\,x(t))^4-16}\right) \tag{50.110}$$

$$d\,x(t-1) = \sqrt{d\,x(t) + \frac{4}{d\,x(t)}}\,. \tag{50.111}$$

Mit den Startwerten von Experiment 1.2

$$x(0) = 1,\ y(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{50.112}$$

erhält man die zugehörige Startgleichung

$$d\,x(0) = 2\,\frac{\sqrt[4]{2}+1}{\sqrt[4]{2}-1}\,; \tag{50.113}$$

ein einfacher Startwert ist

$$d\,(x-2) = 2\sqrt[4]{2}\,. \tag{50.114}$$

(c) Geben Sie auf Gl. (50.91) basierende Formelausdrücke für $agm(1, \frac{1}{\sqrt{2}})$ an (vgl. [7, 34]).

Lösung:

$$- \quad \frac{1}{agm(1,\frac{1}{\sqrt{2}})} = \frac{2\sqrt[4]{2}}{\pi} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \tag{50.115}$$

$$- \quad \left(agm(1,\frac{1}{\sqrt{2}})\right)^2 = \frac{\pi}{4} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1-\frac{1}{(4\,k-1)^2}}{1-\frac{1}{(4\,k+1)^2}} \tag{50.116}$$

$$- \quad \frac{1}{agm(1,\frac{1}{\sqrt{2}})} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{2\,i}{i}^2 2^{-5\,i} \tag{50.117}$$

$$= 1 + \frac{1^2}{2\cdot 2^2}\left(1 + \frac{3^2}{2\cdot 4^2}\left(1 + \frac{5^2}{2\cdot 6^2}\left(1 + \frac{7^2}{2\cdot 8^2}\left(1 + \ldots\right.\right.\right.\right. \tag{50.118}$$

(d) Vergleichen Sie die Konvergenz der Gln. (50.116)–(50.118) mit der von (A8). Suchen Sie nach Möglichkeiten zur Konvergenzverbesserung der Potenzreihe Gl. (50.117) und des ine Gl. (50.118).

(e) Bearbeiten Sie die vorstehenden Fragestellungen für den Fall $(a,b) = (1,\sqrt{2})$ [33, 34].

(f) Untersuchen Sie in analoger Weise den nachstehenden Algorithmus (A9).

Regel	Bedingung	Aktion	Verbundaktion
1		$(x,y) := (a,b)$	
2	$\mid x-y \mid \leq \varepsilon$	$\varphi(a,b) :\approx y$	stop
3		$(x,y) := (a(x,y), h(x,y))$	goto $r2$

Algorithmus (A9): $a-h-$Modifikation von (A8)

Geben Sie einen möglichst einfachen Formelausdruck für $\varphi(a,b)$ an.

(g) Konstruieren Sie geometrische Veranschaulichungen für (A8) und (A9) (vgl. Bild 1). □

50.1.7 Dreiteilung eines Winkels, Verallgemeinerungen

Eines der drei berühmten klassischen Konstruktionsprobleme der Antike [5, 35, 36, 37, 38] ist neben der Würfelverdopplung (Delisches Problem) [39] und der Quadratur bzw. Rektifikation des Kreises [40] die Dreiteilung (Drittelung, Trisektion) eines beliebigen Winkels [41, 42] allein mit Zirkel (Zeichnen eines Kreises) und Lineal (Zeichnen einer Geraden) in endlich vielen Schritten. Die Galoische Theorie zeigt, daß

alle drei Probleme so nicht gelöst werden können. Wohl aber gibt es in jedem Falle eine (im Zeitraum von 2000 Jahren entstandene) große Anzahl von unterschiedlichen Ansätzen ausgehende Näherungslösungen, von denen eine ganze Reihe auch für die Algorithmenkonstruktion von großem Interesse sind.

Für die Dreiteilung eines Winkels soll im folgenden eine solche Näherungslösung vorgestellt und produktiv ausgelotet werden.

50.1.7.1 Ein Algorithmus zur näherungsweisen Dreiteilung eines beliebigen Winkels

Gegeben: beliebiger Winkel α

Gesucht: $\beta \approx \frac{\alpha}{3}$ mit beliebiger Genauigkeit

Lösung:

- Verbale Darstellung (vgl. auch [38, 43])
  Aus α wird mittels der Rekursionsgleichung (lineare Differenzengleichung)

$$x(t+2) = \frac{1}{2}\,(x(t+1) + x(t)) = a(x(t), x(t+1)) \tag{50.119}$$

  mit den Startwerten

$$x(0) = \alpha,\ x(1) = 0 \tag{50.120}$$

  die Folge der Winkel

$$x(0) = \alpha,\ x(1) = 0,\ x(2) = \frac{1}{2}\,\alpha,\ x(3) = \frac{1}{4}\,\alpha,\ x(4) = \frac{3}{8}\,\alpha,\ x(5) = \frac{5}{16}\,\alpha,$$

$$x(6) = \frac{11}{32}\,\alpha,\ x(7) = \frac{21}{64}\,\alpha,\ \ldots \tag{50.121}$$

  konstruiert.[7]
  Man erkennt: $x(t)$ nähert sich mit dem absoluten Fehler

$$|\,x(t) - x(t-1)\,| = 2^{-(t-1)}\alpha \tag{50.122}$$

  dem Grenzwert

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{1}{3}\,\alpha\,. \tag{50.123}$$

[7] Dabei kommen nur die mit Zirkel und Lineal in endlich vielen Schritten realisierbaren Operationen Addition zweier Winkel und Halbierung eines Winkels vor.

- $\frac{\alpha}{3}$–Algorithmus in ET–Notation
  Aus den Gln. (50.119)–(50.123) folgt sofort der nachstehend in ET–Notation dargestellte $\frac{\alpha}{3}$–Algorithmus (A10).

Regel	Bedingung	Aktion	Verbundaktion
1		$(x_1, x_2) := (\alpha, 0)$	
2	$\mid x_1 - x_2 \mid \leq \varepsilon$	$\frac{1}{3}\,\alpha :\approx x_2$	stop
3		$(x_1, x_2) := (x_2, a(x_1, x_2))$	goto $r2$

  Algorithmus (A10): Näherungsweise Berechnung von $\frac{\alpha}{3}$

Die Verifikation erfolgt durch Lösen der linearen Differenzengleichung (50.119) mit den Startwerten (50.120) [44, 45]

– Ansatz:

$$x(t) = r^t;\ r \neq 0\,. \tag{50.124}$$

– Einsetzen von Gl. (50.124) in Gl. (50.119) liefert die charakteristische Gleichung

$$r^2 - \frac{1}{2}\,r - \frac{1}{2} = 0 \tag{50.125}$$

mit den Lösungen

$$r_1 = 1;\ r_2 = -\frac{1}{2}\,. \tag{50.126}$$

– Damit erhält man die allgemeine Lösung von Gl. (50.119)

$$x(t) = c_1 r_1^t + c_2 r_2^t\,. \tag{50.127}$$

– Das Einsetzen von Gl. (50.126) in Gl. (50.127) mit den Startwerten Gl. (50.120) liefert schließlich die spezielle Lösung von Gl. (50.119)

$$c_1 = \frac{1}{3}\,\alpha,\ c_2 = \frac{2}{3}\,\alpha$$

$$x(t) = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^t\right)\alpha\,. \tag{50.128}$$

– Hieraus folgen unmittelbar die Gln. (50.122) und (50.123).

Aufgabe 10

Aus (A10) erkennt man: die ursprüngliche Problemstellung „Dreiteilung eines Winkels α“ ist nur eine mögliche semantische Belegung für diesen Algorithmus, seine allgemeine Problemstellung ist die Drittelung von 1 durch fortlaufende Bildung des arithmetischen Mittels (also fortlaufendes Addieren und Halbieren) gemäß (A11).

Regel	Bedingung	Aktion	Verbundaktion
1		$(x_1, x_2) := (1, 0)$	
2	$\mid x_1 - x_2 \mid \leq \varepsilon$	$\frac{1}{3} :\approx x_2$	stop
3		$(x_1, x_2) := (x_2, a(x_1, x_2))$	goto $r2$

Algorithmus (A11): Näherungsweise Berechnung von $\frac{1}{3}$ durch fortlaufende Bildung des arithmetischen Mittels

(a) Untersuchen Sie experimentell die Dynamik von (A11). Wie kann man die Konvergenz von (A11) verbessern?

(b) Welche Ergebnisse liefert (A11) für andere Initialisierungen $(r1)$ $(x_1, x_2) \in \{0, 1\}^2$?

□

Aufgabe 11

Das Problem Würfelverdopplung fordert aus der Seitenlänge s eines Würfels die Seitenlänge $S = \sqrt[3]{2} \cdot s$ des Würfels mit doppeltem Volumen, also verallgemeinernd

$\sqrt[3]{a};\ a \in \mathbb{R}_+$

allein mit Zirkel und Lineal in endlich vielen Schritten zu konstruieren.

(a) Zeigen Sie, daß durch eine einfache $a \to g$ –Transformation von (A10) hierfür eine adäquate Näherungslösung (A12) erhalten werden kann.

Lösung:

Regel	Bedingung	Aktion	Verbundaktion
1		$(x_1, x_2) := (a, 1)$	
2	$\mid x_1 - x_2 \mid \leq \varepsilon$	$\sqrt[3]{a} :\approx x_2$	stop
3		$(x_1, x_2) := (x_2, g(x_1, x_2))$	goto $r2$

Algorithmus (A12): Näherungsweise Berechnung von $\sqrt[3]{a}$

(b) Untersuchen Sie experimentell die Dynamik von (A12) sowie mögliche Ansätze zur Konvergenzverbesserung von (A12).

(c) (A12) löst näherungsweise die reine Gleichung dritten Grades

$x^3 = a\,.$

Läßt sich durch eine geeignete Erweiterung von (A12) ein effizienter Algorithmus zum näherungsweisen Lösen der reduzierten kubischen Gleichung

$$x^3 + 3\,p\,x + 2\,q = 0$$

gewinnen (vgl. [4], Baustein 2)?
Experimentieren Sie mit diesem Algorithmus (A13) und untersuchen Sie seine Dynamik für verschiedene p und q.

(d) Vergleichen Sie die Algorithmen (A5), (A10) und (A12).
Diskutieren Sie die „Wahlverwandschaften“ zwischen Quadratur bzw. Rektifikation des Kreises, Verdoppelung des Würfels und Dreiteilung eines Winkels im Lichte dieser Algorithmen. □

50.1.7.2 Versuch einer Erweiterung von (A10) – näherungsweise Siebenteilung eines Winkels

Der Verknüpfungsteil von $r3$ in (A10)

$$x_2 := a(x_1, x_2) \tag{50.129}$$

läßt sich wie in Bild 9 dargestellt in Anlehnung an den Huffman–Algorithmus zur optimalen Binärkodierung [47, 46] als „Gabel“ interpretieren.

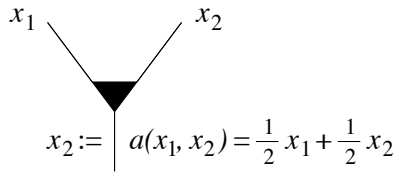


Bild 9: Interpretation von Gl. (50.129) als „Gabel“

Es liegt nahe, diese Assoziation weiter zu verfolgen: zwei derartige Gabeln zu einem einfachen „Huffman–Baum“ zusammenzufügen (Bild 10) und zu fragen, welche Operation der zugehörige Algorithmus (A14) an dem Input α ausführt.

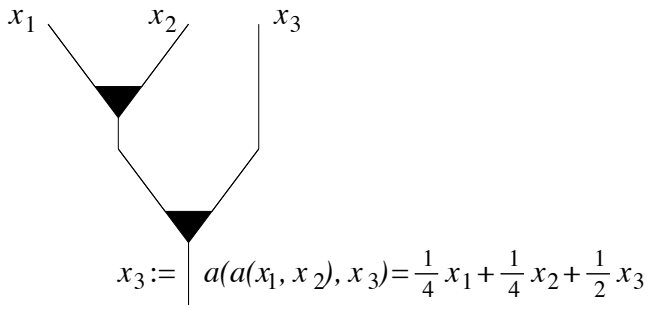


Bild 10: Zusammenschaltung zweier Gabeln zu einem binären „Verknüpfungsbaum“

Regel	Bedingung	Aktion	Verbundaktion
1		$(x_1, x_2, x_3) := (\alpha, 0, 0)$	
2	$\mid x_2 - x_3 \mid \leq \varepsilon$	$?(\alpha) :\approx x_3$	stop
3		$(x_1, x_2, x_3) := (x_2, x_3, a(a(x_1, x_2), x_3))$	goto $r2$

Algorithmus (A14): Erweiterung von (A10) gemäß Bild 10

- Die experimentelle Untersuchung ergibt für $x_1(t)$, $x_2(t)$ und $x_3(t)$ den in Tabelle 9 zusammengefaßten Verlauf.

  Man erkennt:

  – $x_1(t)$, $x_2(t)$ und $x_3(t)$ nähern sich $\frac{1}{7}\,\alpha$:

  $$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = \lim_{t\to\infty} x_2(t) = \lim_{t\to\infty} x_3(t) = \frac{1}{7}\,\alpha \tag{50.130}$$

  $r2$ (A14)=

2	$0 <\mid x_2 - x_3 \mid \leq \varepsilon$	$\frac{1}{7}\,\alpha :\approx x_3$	stop

  . (50.131)

  – Die Annäherung erfolgt oszillierend, (A14) konvergiert langsam.

t	$x_1(t)/\alpha$	$x_2(t)/\alpha$	$x_3(t)/\alpha$
0	1	0	0
1	0	0	0.25
2	0	0.25	0.125
3	0.25	0.125	0.125
4	0.125	0.125	0.15625
5	0.125	0.15625	0.140625
6	0.15625	0.140625	0.140625
7	0.140625	0.140625	0.14453125
8	0.140625	0.14453125	0.142578125
9	0.14453125	0.142578125	0.142578125
10	0.142578125	0.142578125	0.14306640625
11	0.142578125	0.14306640625	0.142822265625

Tabelle 9: (A14), Verlauf von $x_1(t)$, $x_2(t)$ und $x_3(t)$

- Die Verifikation von Gl. (50.130) und damit von (A14) mit $r2$ gemäß (50.131) erfolgt durch Lösen des Differenzengleichungssystems $r3$ von (A14)

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \tag{50.132}$$

mit der Initialisierung $r1$

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{50.133}$$

Aus Gl. (50.132) folgt sofort die Differenzengleichung für $x_1(t)$

$$x_1(t+3) = \frac{1}{2}\,x_1(t+2) + \frac{1}{4}\,x_1(t+1) + \frac{1}{4}\,x_1(t)\,. \tag{50.134}$$

Die allgemeine Lösung von Gl. (50.134) lautet (vgl. Abschn. 50.1.7.1)

$$x_1(t) = c_1\,r_1^t + c_2\,r_2^t + c_3\,r_3^t\,. \tag{50.135}$$

Hierbei sind

$$r_1 = 1;\; r_{2;3} = -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{3}}{4}\,i\,,\; |\,r_{2;3}\,| = \frac{1}{2} < 1 \tag{50.136}$$

die Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$r^3 - \frac{1}{2}\,r^2 - \frac{1}{4}\,r - \frac{1}{4} = 0\,. \tag{50.137}$$

Aus Gl. (50.135) folgt mit Gl. (50.132)

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r_2^t & r_3^t \\ 1 & r_2^{t+1} & r_3^{t+1} \\ 1 & r_2^{t+2} & r_3^{t+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \tag{50.138}$$

und bei Einbeziehen der Anfangswerte

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r_2^t & r_3^t \\ 1 & r_2^{t+1} & r_3^{t+1} \\ 1 & r_2^{t+2} & r_3^{t+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & r_2 & r_3 \\ 1 & r_2^2 & r_3^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix}. \tag{50.139}$$

Hieraus ergibt sich nun sofort die gesuchte Beziehung zwischen den Anfangs– und Endwerten von $x_1(t)$, $x_2(t)$ und $x_3(t)$

$$\begin{pmatrix} x_1(\infty) \\ x_2(\infty) \\ x_3(\infty) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & r_2 & r_3 \\ 1 & r_2^2 & r_3^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} \tag{50.140}$$

oder nach Umformung und mit Gl. (50.136)

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = \lim_{t\to\infty} x_2(t) = \lim_{t\to\infty} x_3(t) = \frac{\begin{vmatrix} x_1(0) & 1 & 1 \\ x_2(0) & r_2 & r_3 \\ x_3(0) & r_2^2 & r_3^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & r_2 & r_3 \\ 1 & r_2^2 & r_3^2 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{x_1(0) + 2\,x_2(0) + 4\,x_3(0)}{7}$$

$$= \frac{1}{7}\,\alpha\,. \qquad (50.141)$$

Aufgabe 12

(A14) läßt sich wie (A11) normieren (vgl. Tabelle 9) und realisiert dann die näherungsweise Siebenteilung von 1 durch fortlaufende strukturierte arithmetische Mittelwertbildung gemäß (A15).

Regel	Bedingung	Aktion	Verbundaktion
1		$(x_1, x_2, x_3) := (1, 0, 0)$	
2	$0 <\mid x_2 - x_3 \mid \leq \varepsilon$	$\frac{1}{7} :\approx x_3$	stop
3		$(x_1, x_2, x_3) := (x_2, x_3, a(a(x_1, x_2), x_3))$	goto $r2$

Algorithmus (A15): Näherungsweise Berechnung von $\frac{1}{7}$ durch fortlaufende strukturierte arithmetische Mittelwertbildung

(a) Wie kann man die Konvergenz von (A15) (vgl. Tabelle 9) gravierend verbessern?

(b) Welche Ergebnisse liefert (A15) für andere Initialisierungen $(x_1, x_2, x_3) \in \{0, 1\}^3$ (vgl. Gl. (50.141))? □

50.1.7.3 Verallgemeinerung von (A11) und (A15)

Auf dem in Abschn. 50.1.7.2 skizzierten Wege lassen sich nun verallgemeinernd beliebige Zusammenschaltungen von a–Gabeln (Bild 9) zu Binärbäumen als Verknüpfungsstruktur in (A15) implantieren.
Für $r3$ hat man damit

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) := (x_2, x_3, \ldots, x_n, \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i)\,. \qquad (50.142)$$

Die „Gewichte“ p_i in der Verknüpfungsgleichung (50.142) unterliegen dabei folgenden Einschränkungen:

$$p_i = 2^{-k_i},\ k_i \in \mathbb{N}\,,\ 1 \leq k_i \leq m = \max_{i=1}^{n}(k_i) \leq n-1 \tag{50.143}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1\,,\ \ 2 - 2^{-n+1} \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} p_j \leq n - 1 + 2^{-n+1}. \tag{50.144}$$

Interpretiert man die Zusammenfassung der Variablen x_i und der Gewichte p_i als endliches Schema

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n \end{pmatrix} \tag{50.145}$$

einer einfachen Quelle [46], so ergibt sich umgekehrt die Möglichkeit, durch Huffman–Binärkodierung [47] einen zugehörigen binären Verknüpfungsbaum zu konstruieren (vgl. Aufgabe 12).
Die aus (A15) erhaltene Verallgemeinerung (A16) realisiert die näherungsweise Berechnung (bzw. Konstruktion) des Bruches $\frac{A}{B}$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^m p_1 \\ 2^m p_2 \\ 2^m p_3 \\ \vdots \\ 2^m p_n \end{pmatrix};\ ^{8} \tag{50.146}$$

$$A, B \in \mathbb{N};\ A \leq B \tag{50.149}$$

aus dem Input–n–Tupel $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ und dem Verknüpfungs–n–Tupel $(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$ durch fortlaufende strukturierte arithmetische Mittelwertbildung.

[8] Aus der Matrizengleichung (50.146) folgt die Komponentendarstellung für A und B

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\sum_{j=1}^{i} 2^m p_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} a_j \right) 2^m p_i \tag{50.147}$$

$$B = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 2^m p_j = \sum_{i=1}^{n} (n+1-i)\, 2^m p_i\,. \tag{50.148}$$

Regel	Bedingung	Aktion	Verbundaktion
1		$(x_1, x_2, \ldots, x_n) := (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \{0,1\}^n$	
2	$0 <\mid x_n - x_{n-1} \mid \leq \varepsilon$	$\frac{A}{B} :\approx x_n$	stop
3		$(x_1, x_2, \ldots, x_n) := (x_2, x_3, \ldots, x_n, \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i)$	goto $r2$

Algorithmus (A16): Näherungsweise Berechnung des Quotienten $\frac{A}{B}$ durch fortlaufende strukturierte arithmetische Mittelwertbildung;
gegeben: $n, (a_1, a_2, \ldots, a_n), (p_1, p_2, \ldots, p_n)$

Aufgabe 13

(a) Verifizieren Sie (A16).

(b) Diskutieren Sie die nachstehenden Beispiele.

Beispiel 1

$$n = 4 \tag{50.150}$$

$$a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = 1,\ a_4 = 1 \tag{50.151}$$

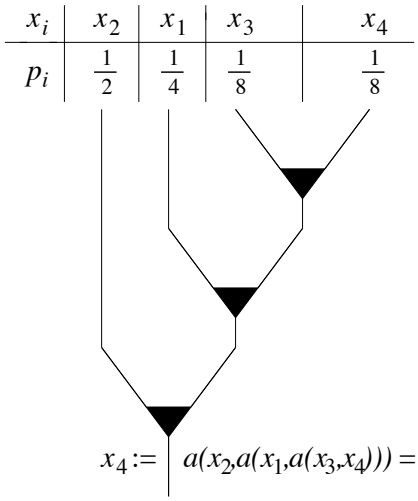
$$p_1 = \frac{1}{4},\ p_2 = \frac{1}{2},\ p_3 = \frac{1}{8},\ p_4 = \frac{1}{8};\ m = 3 \tag{50.152}$$

Lösungsskizze:

- Aus dem endlichen Schema

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \tag{50.153}$$

erhält man durch Huffman–Binärkodierung von (50.153) einen zugehörigen binären Verknüpfungsbaum (Bild 11).



$$x_4 := a(x_2,a(x_1,a(x_3,x_4))) = \frac{1}{2}\left(x_2+\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{1}{2}\left(x_3+x_4\right)\right)\right)$$
$$= \frac{1}{4}x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{8}x_3+\frac{1}{8}x_4$$

Bild 11: Beispiel 1, Verknüpfungsbaum

- (A16) realisiert dann die näherungsweise Berechnung (bzw. Konstruktion) des Quotienten

$$\frac{A}{B} = \frac{17}{23} \tag{50.154}$$

durch fortlaufende arithmetische Mittelwertbildung mit der Verknüpfungsstruktur Bild 11.
Die Gesamtheit aller mit dieser Verknüpfungsstruktur überhaupt realisierbaren Quotienten $\frac{A}{B}$ läßt sich anhand eines vollständigen Binärbaumes, des Kodebaumes für Gl. (50.146), gut veranschaulichen (Bild 12).

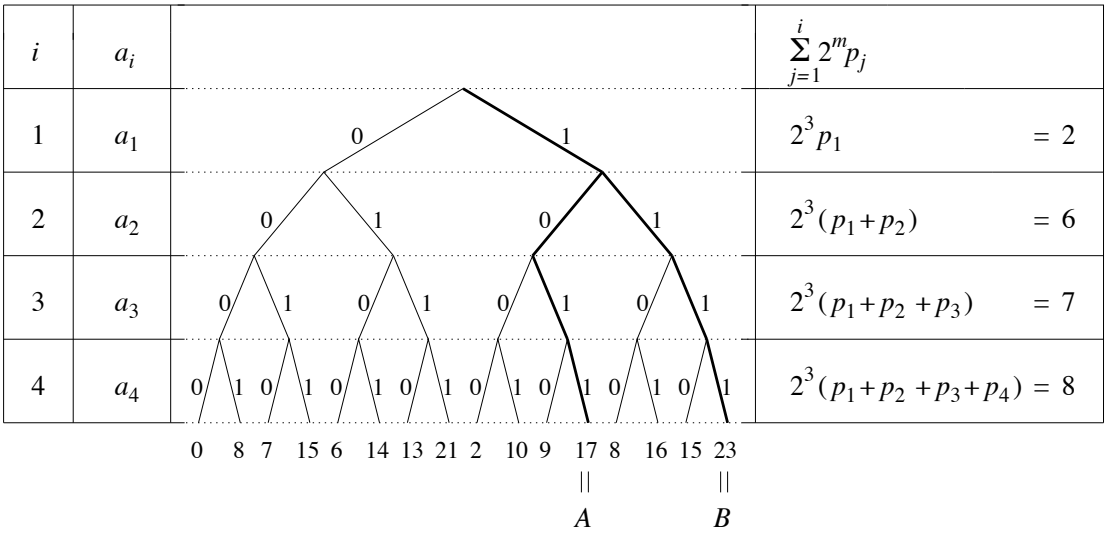


Bild 12: Beispiel 1, Kodebaum

Er enthält top down eingetragen alle 2^4 möglichen Initialisierungen $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \{0,1\}^4$, die jedem Niveau i zugeordneten Gewichtssummen $\sum_{j=1}^{i} 2^m p_j$ und die jedem Blattknoten gemäß Gl. (50.146) zugeordneten A–Werte und

$$B = A_{|(a_1,a_2,a_3,a_4)=(1,1,1,1)} \,. \tag{50.155}$$

Bild 12 zeigt:

- Die Zuordnung $(a_1, a_2, a_3, a_4) \to A$ ist eindeutig, aber nicht eineindeutig!
- Nicht alle $A \in \mathbb{N}(0, B)$ sind realisierbar!
- $B = 23$ ist eine Primzahl, aber $A = 1$ und damit der Quotient $\frac{1}{23}$ ist mit der vorliegenden Verknüpfungsstruktur nicht realisierbar.
- Für alle A ist $\mathrm{ggT}\,(A, B) = 1$.

Beispiel 2

$$n = 4 \tag{50.156}$$

$$p_1 = \frac{1}{2},\ p_2 = \frac{1}{4},\ p_3 = \frac{1}{8},\ p_4 = \frac{1}{8};\ m = 3 \tag{50.157}$$

Lösungsskizze:

- Verknüpfungsbaum

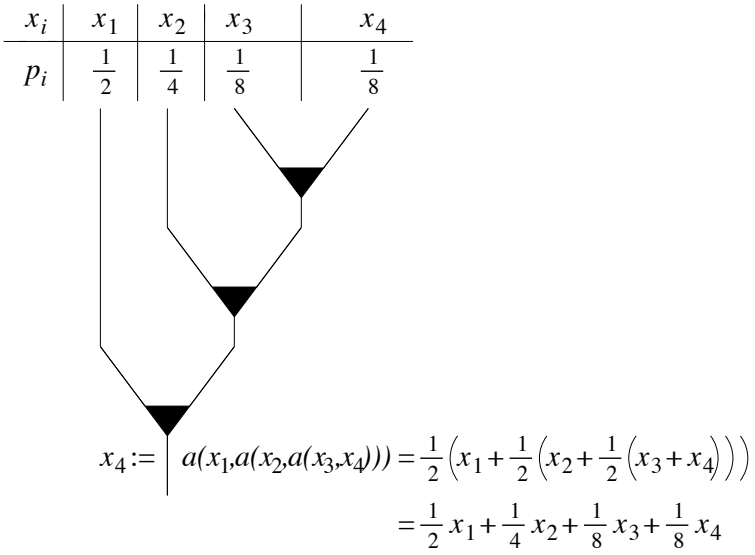


Bild 13: Beispiel 2, Verknüpfungsbaum

- Kodierung

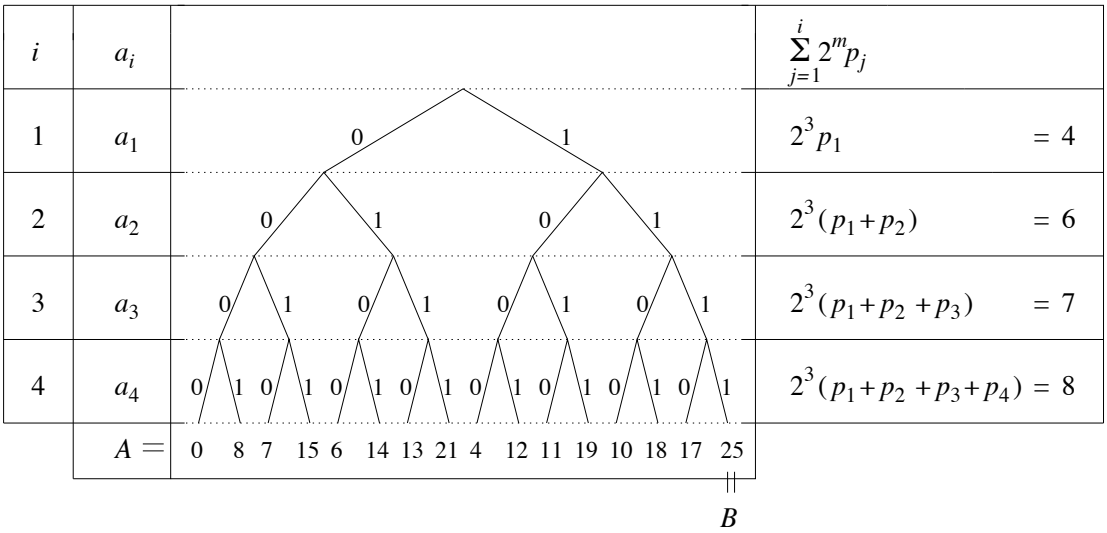


Bild 14: Beispiel 2, Kodebaum

Bild 14 zeigt:

- Die Zuordnung $(a_1, a_2, a_3, a_4) \to A$ ist hier eineindeutig.
- Nicht alle $A \in \mathbb{N}(0, B)$ sind realisierbar.
- Nicht alle A sind zu B teilerfremd.

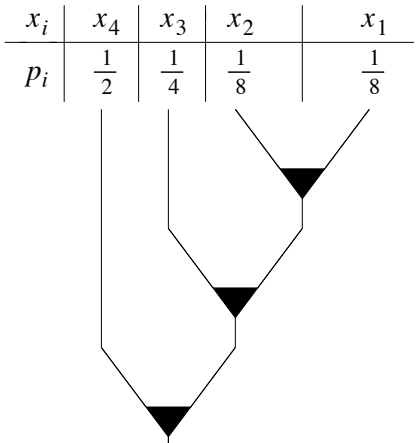
Beispiel 3

$$n = 4 \tag{50.158}$$

$$p_1 = \frac{1}{8},\ p_2 = \frac{1}{8},\ p_3 = \frac{1}{4},\ p_4 = \frac{1}{2};\ m = 3 \tag{50.159}$$

Lösungsskizze:

- Verknüpfungsbaum (Bild 15)



$$x_4 := \; a(x_4,a(x_3,a(x_2,x_1))) = \frac{1}{2}\left(x_4+\frac{1}{2}\left(x_3+\frac{1}{2}\left(x_2+x_1\right)\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2}x_4+\frac{1}{4}x_3+\frac{1}{8}x_2+\frac{1}{8}x_1$$

Bild 15: Beispiel 3, Verknüpfungsbaum

- Kodierung

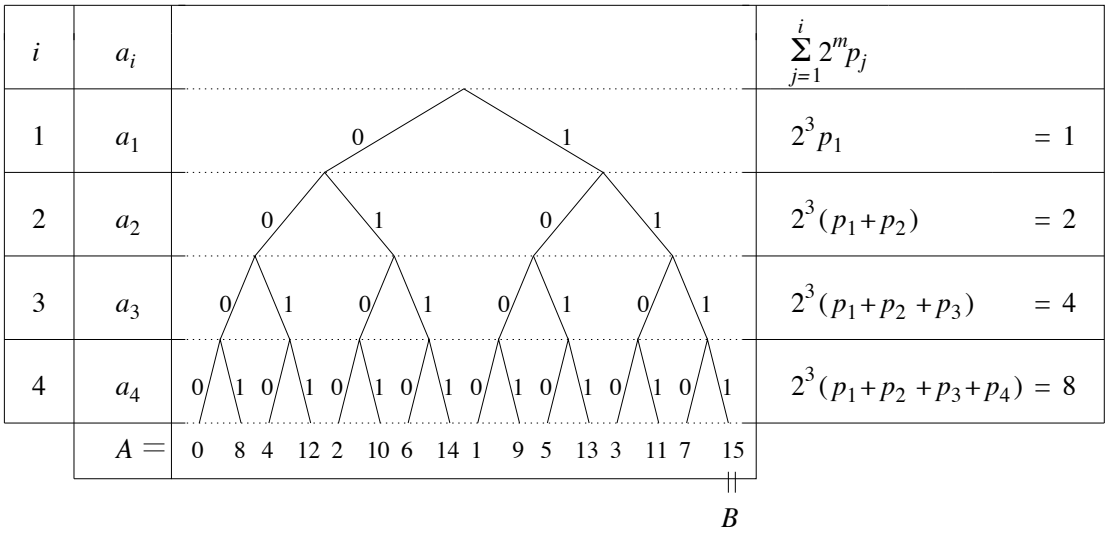


Bild 16: Beispiel 3, Kodebaum

Bild 16 zeigt:

- Die Zuordnung $(a_1, a_2, a_3, a_4) \to A$ ist eineindeutig.
- $A = \sum_{i=1}^{4} a_i \, 2^{i-1}$, $B = 2^4 - 1$. Alle $A \in \mathbb{N}(0, B)$ sind realisierbar.
- Die Quotienten $\frac{A}{B} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ und $\frac{A}{B} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ sind realisierbar.

Beispiel 4

$$n = 4 \tag{50.160}$$

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{4};\ m = 2 \tag{50.161}$$

Lösungsskizze:

- Verknüpfungsbaum

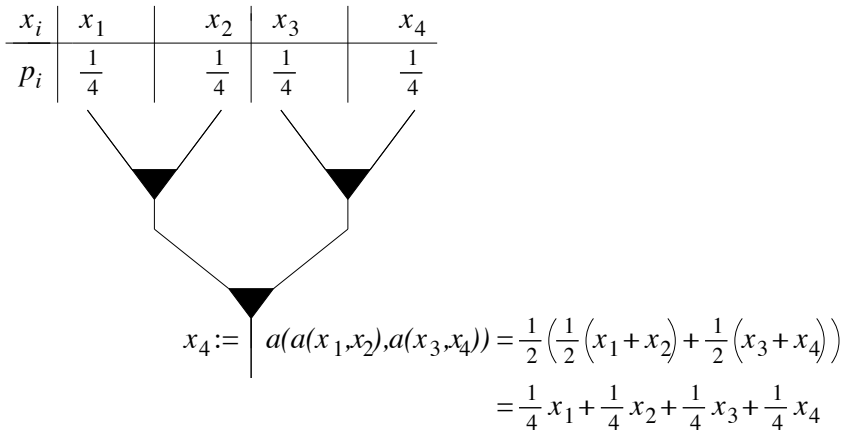


Bild 17: Beispiel 4, Verknüpfungsbaum

- Kodierung

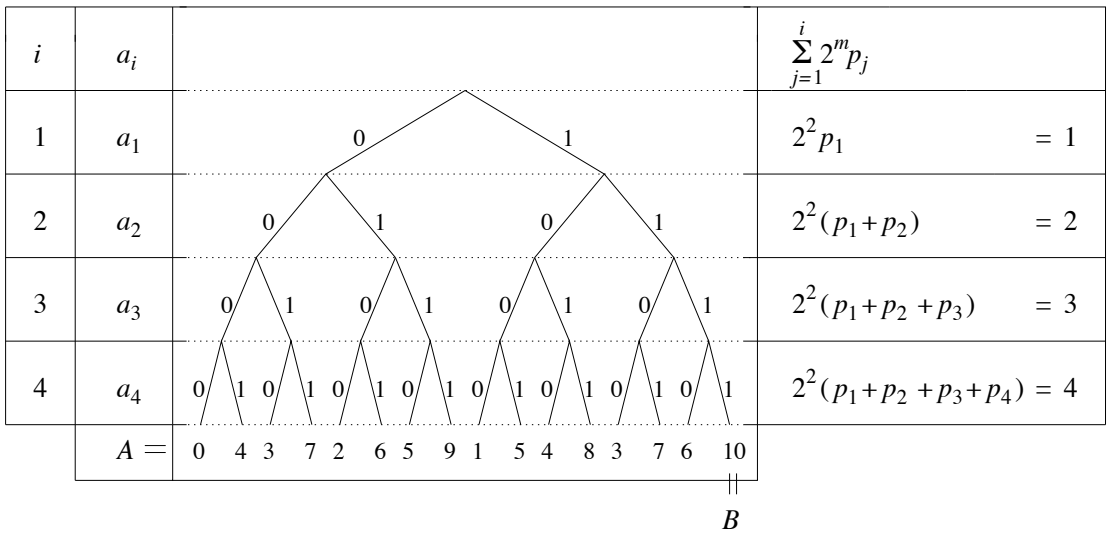


Bild 18: Beispiel 4, Kodebaum

Bild 18 zeigt:

– Die Zuordnung $(a_1, a_2, a_3, a_4) \to A$ ist eindeutig, aber nicht eineindeutig.
– Alle $A \in \mathbb{N}(0, B)$ sind realisierbar.
– Der Quotient $\frac{A}{B} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ ist realisierbar. □

Aufgabe 14

(a) Geben Sie Algorithmen zum Lösen eines Umkehrproblems von (A16) an:

– (A16) realisiere die näherungsweise Berechnung (bzw. Konstruktion) des Quotienten $\frac{1}{P}$ (P–Primzahl) durch fortlaufende strukturierte arithmetische Mittelwertbildung.
– Gesucht sind die zugehörigen Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ bei kleinstmöglichem n.

(b) Implizieren die von Ihnen gefundenen Algorithmen eine Einteilung der Menge der Primzahlen in Klassen? □

50.2 Deterministischer Automat

Das im folgenden zugrundegelegte mathematische Modell (realer informationsverarbeitender Systeme) „deterministischer Automat“ (dA, Bild 19)

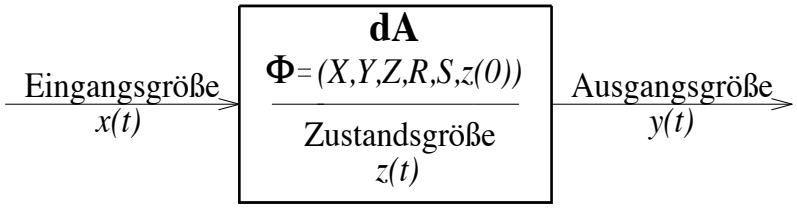


Bild 19: Deterministischer Automat

mit
– der Eingangsmenge X,
– der Ausgangsmenge Y,
– der Zustandsmenge Z,
– der (eindeutigen) Ergebnisabbildung

$$R : X \times Z \to Y\,,\; y = r\,(x, z)\,, \tag{50.162}$$

– der (eindeutigen) Folgezustandsabbildung

$$S : X \times Z \to Z\,,\; z' = s\,(x, z) \tag{50.163}$$

– und dem Anfangszustand $z(0)$

beschreibt formalisiert die sequentielle, äquidistant getaktete und deterministische Umformung einer Eingangsfolge (eines Eingabewortes)

$$wx(t) = x(0), x(1), \ldots, x(t) \in X^*;\ t \in \mathbb{N}_0 \tag{50.164}$$

in eine Ausgangsfolge (ein Ausgabewort)

$$wy(t) = y(0), y(1), \ldots, y(t) \in Y^*. \tag{50.165}$$

Dabei wird in jedem Taktzeitpunkt $\tau \in \mathbb{N}_0$ (fester aber beliebiger Zeitwert) aus dem einlaufenden Eingangswert $x(\tau) \in X$ und dem im Zeitintervall $(\tau - 1, \tau]$ „im dA gespeicherten“ Zustandswert $z(\tau) \in Z$

– der Ausgangswert $y(\tau) = r\,(x(\tau), z(\tau))$ gebildet und unmittelbar ausgegeben,

– der neue Zustandswert $z(\tau + 1) = s\,(x(\tau), z(\tau))$ gebildet und der alte Zustandswert $z(\tau)$ mit $z(\tau + 1)$ „überschrieben“. $z(\tau + 1)$ bleibt danach im Intervall $(\tau, \tau + 1]$ im dA gespeichert (Bild 20).

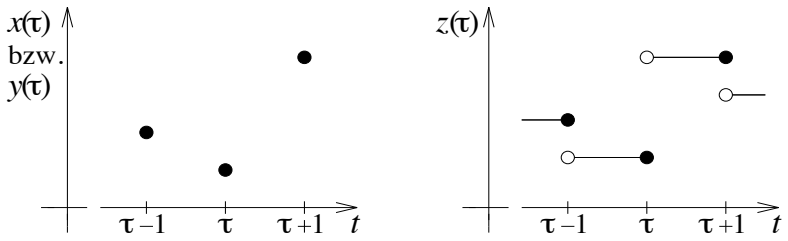


Bild 20: Arbeitsregime des dA

Beispiel

Verzögerungselement erster Ordnung (D1, Bild 21)

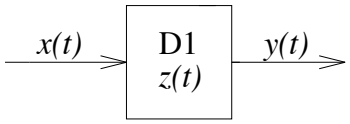


Bild 21: Verzögerungselement erster Ordnung

$$X = Y = Z \tag{50.166}$$

$$y = r\,(x, z) = z \tag{50.167}$$

$$z' = s\,(x, z) = x \tag{50.168}$$

Jeder Eingangswert $x(\tau)$ erscheint um einen Takt verzögert als $y(\tau + 1)$ am Ausgang, er wird als Zustandswert $z(\tau)$ für einen Takt in D1 gespeichert, dabei erfolgt eine vollständige Entkopplung $x(\tau)$ – $y(\tau)$.

50.3 Mittelwertautomaten

Die Einbettung von Algorithmen in das mathematische Modell dA ist ein nützliches Werkzeug für systematische Erweiterungen, Verallgemeinerungen, Kombinationen, ... von Algorithmen unter Einvernahme des theoretischen und ingenieurmäßig–pragmatischen Methodeninventars für die Analyse und Synthese von Automaten (Schaltbilddenken, Einfügen zusätzlicher Rückkopplungen, Zusammenschaltungen, Zustandskopplungen). Vielfach ergibt sich dabei zwanglos die Hinzunahme eines zunächst nicht vorhandenen Schalt– ($x \in \{0,1\}$) bzw. Steuereingangs ($x \in \mathbb{R}$) (Analogie: Diode $\rightarrow$ Transistor).

Die in Abschn. 50.1 untersuchten Algorithmen können leicht in den dA eingebettet werden. Dies soll im folgenden für den Heron–$\sqrt{2}$–Algorithmus (A1) detailliert gezeigt werden (vgl. auch [48]).

50.3.1 Automateneinbettung des Heron–sqr(2)–Algorithmus

Die Abarbeitung des Heron–Algorithmus entspricht genau dem in Abschn. 50.2 beschriebenen Umformungsprozeß einer Eingangsfolge, hier

$$\underbrace{wx(t)}_{\text{dA}} = \underbrace{a, a, \ldots, a}_{\text{(A1)}}\,, \tag{50.169}$$

in eine Ausgangsfolge, hier

$$\underbrace{wy(t)}_{\text{dA}} = x(0), x(1), \ldots, x(t) \;\text{ mit} \tag{50.170}$$

$$x(i+1) = \frac{1}{2}\left(x(i) + \frac{a}{x(i)}\right);\; i = 0, 1, 2, \ldots \tag{50.171}$$

$$\underbrace{\lim_{i\to\infty} x(i) = \sqrt{a} \;\text{ für alle }\; x(0) \in \mathbb{R}_+}_{\text{(A1)}}\,. \tag{50.172}$$

Die auf dieser Basis getroffene Zuordnung Tabelle 10 bettet den Heron–Algorithmus in den dA ein (vgl. [48]).

Aufgabe 15

Der dA nach Tabelle 10 generiert bei konstanter Eingabe $x(t) = a \in \mathbb{R}_+$ unabhängig von seinem Anfangszustand $z(0) \in \mathbb{R}_+$ nach einem Einschwingvorgang stationär die Ausgabe $y(t) = \sqrt{x(t)}$.

(a) Untersuchen Sie durch Berechnung und Experiment (Automatenband) die Abhängigkeit der Einschwingdauer des dA Tabelle 10 von a und $z(0)$ (vgl. [4], Baustein 2, Aufgabe 7).

(b) Untersuchen Sie experimentell das Verhalten von dA Tabelle 10 bei zeitveränderlicher Eingabe $x(t) \in \mathbb{R}_+$ (sprungförmig, linear ansteigend, quadratisch ansteigend, sinusförmig, ...), insbesondere für den Fall gegenüber dem Einschwingvorgang schneller bzw. langsamer Eingabeänderung.

Diskutieren Sie die Ergebnisse. □

50.3.2 Automateneinbettung der Algorithmen Archimedes (A2), Gregory (A3) und Cusanus (A5)

Die Automateneinbettung der π–Algorithmen (A2) und (A3) führt zu Generatorautomaten (dA ohne Eingabe). Tabelle 11 zeigt die entsprechende Zuordnung für (A2); die Zuordnung für (A3) ist ganz analog. Die so erhaltenen dA sind im Bild 22 und im Bild 23 dargestellt. Sie besitzen strukturell einen völlig gleichartigen Aufbau.

Die in Abschn. 50.1.4.2 untersuchte Outputkorrektur von (A2) mittels der Gln. (50.59) (rekursive Darstellung) bzw. (50.63) (Matrizendarstellung) läßt sich nun ebenfalls leicht in Automatenform überführen. Aus Gl. (50.63) folgt, daß zur Berechnung von $y4(t)$ (also für die Korrekturtiefe $k = 4$) die Outputwerte $y(t)$, $y(t+1)$, $y(t+2)$, $y(t+3)$ und $y(t+4)$ gleichzeitig zur Verfügung stehen müssen. Das kann durch Nachschalten einer 4–gliedrigen Schiebekette an den Ausgang des dA Bild 22 realisiert werden. Die gewichtete arithmetische Mittelung für die Korrekturstufen $k = 1, 2, 3$ und schließlich 4 geschieht mittels eines an die Schiebekette angeschalteten Netzwerkes aus Verknüpfungselementen gemäß Bild 24. Der so aufgebaute Korrekturautomat ist in Bild 25 dargestellt.

(A1)	i	$a \in \mathbb{R}_+$	$x(0) \in \mathbb{R}_+$	$x(i)$	$x(i+1) = \frac{1}{2}\left(x(i) + \frac{a}{x(i)}\right)$	$\lim\limits_{i\to\infty} x(i) = \sqrt{a}$ für alle $x(0) \in \mathbb{R}_+$
dA $(X, Y, Z, R, S, z(0))$	t	$x(t) = a$	$z(0)$	$y(t) = z(t)$	$z(t+1) = s\,(x(t), z(t))$ $= \frac{1}{2}\left(z(t) + \frac{x(t)}{z(t)}\right)$ $y(t) = r\,(x(t), z(t))$ $= z(t)$	$\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \sqrt{x(t)}$ für alle $z(0) \in \mathbb{R}_+$

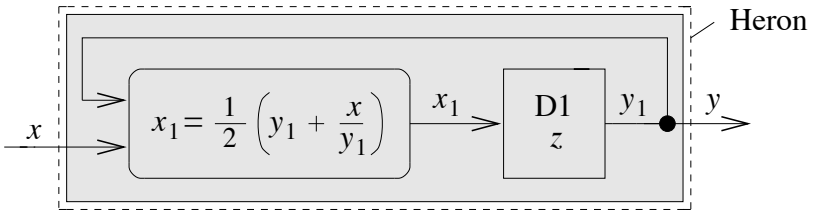
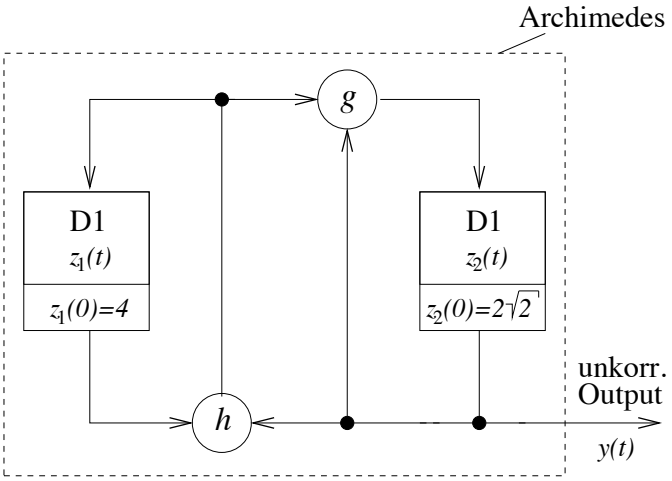


Tabelle 10: Heron–Automat

(A2)	t	$x(t)$	$y(t)$	$x(0) = 4$	$y(0) = 2\sqrt{2}$	$x(t+1) = h(x(t), y(t))$ $y(t+1) = g(x(t+1), y(t))$	$\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \pi$
dA $(X, Y, Z, R, S, z(0))$	t	$z_1(t)$	$z_2(t)$	$z_1(0) = 4$	$z_2(0) = 2\sqrt{2}$	$z_1(t+1) = h(z_1(t), z_2(t))$ $z_2(t+1) = g(h(z_1(t), z_2(t)), z_2(t))$ $y(t) = g((h(z_1(t), z_2(t)), z_2(t))$	$\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \pi$

Tabelle 11: Automateneinbettung von (A2)



$$z_1(t+1) = h(z_1(t), z_2(t))$$

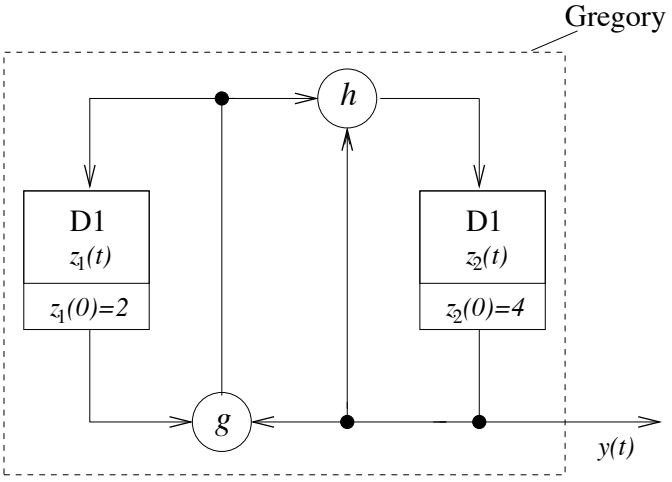
$$z_2(t+1) = g(h(z_1(t), z_2(t)), z_2(t))$$

$$y(t) = z_2(t)$$

$$\lim_{t\to\infty} z_1(t) = \lim_{t\to\infty} z_2(t) =$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \pi$$

Bild 22: (A2)–π–Generatorautomat



$$z_1(t+1) = g(z_1(t), z_2(t))$$

$$z_2(t+1) = h(g(z_1(t), z_2(t)), z_2(t))$$

$$y(t) = z_2(t)$$

$$\lim_{t\to\infty} z_1(t) = \lim_{t\to\infty} z_2(t) =$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \pi$$

Bild 23: (A3)–π–Generatorautomat

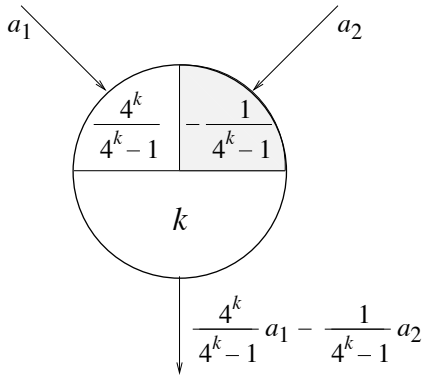


Bild 24: Verknüpfungselement des Korrekturautomaten

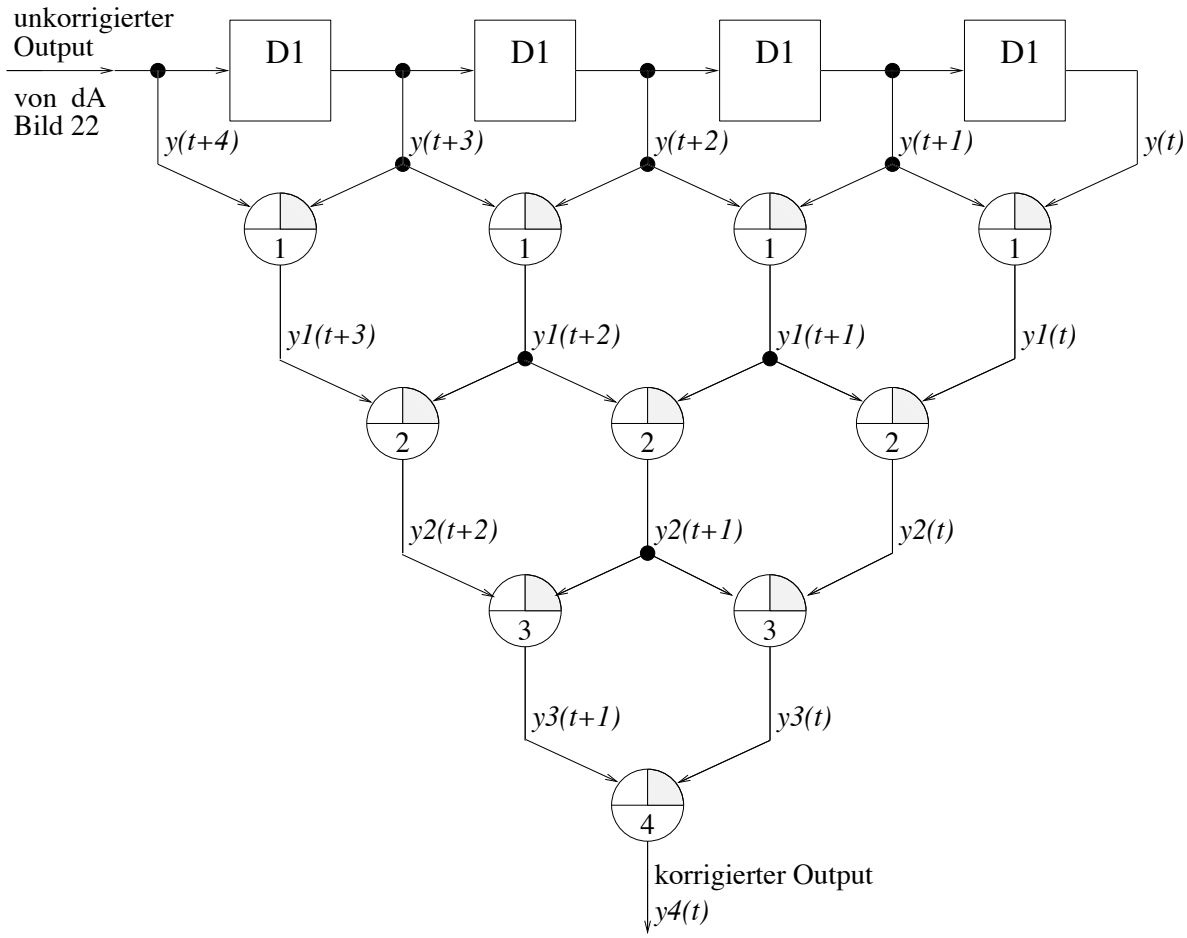


Bild 25: Korrekturautomat, $k = 4$

Aufgabe 16

Rückblickend auf die bei der Bearbeitung der Aufgaben 4, 7 und 8(c) erhaltenen Ergebnisse erkennen Sie, daß die Generatorautomaten Bild 22 (Archimedes) und Bild 23 (Gregory) mit den gegebenen Initialisierungen werteverlaufsgleiche Zustandsgrößen besitzen, in diesem Sinne also ebenso wie die ihnen zugrundeliegenden Algorithmen (A2) und (A3) äquivalent sind.

(a) Weisen Sie nach, daß gilt

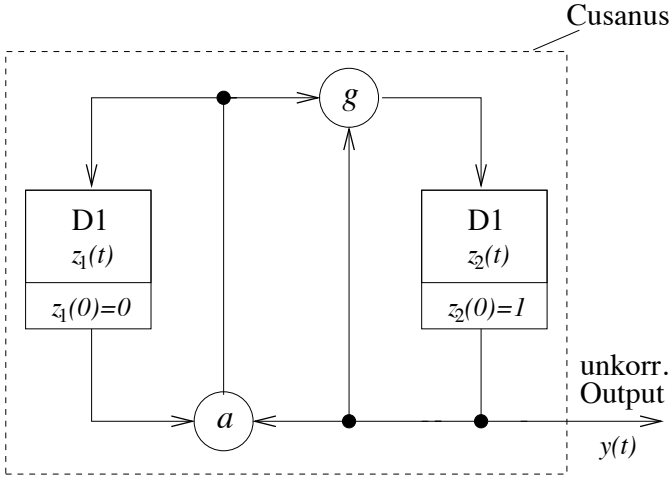
$$z_1(t)\big|_{\text{dA Bild 22}} = z_2(t)\big|_{\text{dA Bild 23}} \tag{50.173}$$

$$z_2(t)\big|_{\text{dA Bild 22}} = z_1(t+1)\big|_{\text{dA Bild 23}}\,. \tag{50.174}$$

Damit und mit den Ergebnissen von Aufgabe 7 und 8(c) ist klar, daß aus der in Abschn. 50.1.3 beschriebenen Archimedes–Grundidee nur ein einziger unabhängiger π bzw. $\frac{1}{\pi}$ generierender Algorithmus und folglich auch nur ein einziger derartiger Mittelwertautomat geboren wird; alle Geschwister (A2), (A3), (A5) und (A6) sowie die zugehörigen Mittelwertautomaten erweisen sich als identisch bzw. äquivalent. Im Lichte dieser Erkenntnis erscheint es zunächst aus Sicht der π–Berechnung sinnvoll, nur den dA Archimedes (Bild 22) und seine Konvergenzbeschleunigung weiter zu untersuchen. Jedoch:

(b) Zeigen Sie, daß die Automateneinbettung des Cusanus–Algorithmus (A5) zu einem Generatorautomaten (Bild 26) mit folgenden interessanten Eigenschaften führt:

- der dA Cusanus ist 0–1–initialisiert (Rückwärtsinitialisierung, geometrisch nicht mehr interpretierbar!),
- er enthält neben zwei Verzögerungselementen erster Ordnung nur die Verknüpfungselemente a und g
- und generiert damit $\frac{2}{\pi}$;
- sein Output ist wie der des dA Archimedes (Bild 22) mit gleicher Konvergenzbeschleunigung mit dem Korrekturautomaten Bild 25 korrigierbar.



$$z_1(t+1) = a(z_1(t), z_2(t))$$

$$z_2(t+1) = g(a(z_1(t), z_2(t)), z_2(t))$$

$$y(t) = z_2(t)$$

$$\lim_{t\to\infty} z_1(t) = \lim_{t\to\infty} z_2(t) =$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{2}{\pi}$$

Bild 26: (A5)–$\frac{2}{\pi}$–Generatorautomat

(c) Untersuchen Sie experimentell die Dynamik der dA Archimedes und Cusanus (Zeitverläufe $z_1(t)$ und $z_2(t)$ (Automatenband) sowie $pset(z_1(t), z_2(t))$ bzw. $pset(z_i(t), z_i(t+1))$ und $pset(y(t), y(t+1))$).

(d) Interpretieren Sie die dA Bild 22 und Bild 26 durch ein hydrodynamisches Modell. Suchen Sie mit diesem Hilfsmittel nach interessanten Erweiterungen der genannten

dA und observieren Sie deren Dynamik.

Lösung 1:

• Interpretation:

– Die Verzögerungselemente D1 entsprechen gleichgroßen Behältern mit den Füllständen $z_1(t)$ und $z_2(t)$, sie kommunizieren über die Verknüpfungselemente h (Bild 22) bzw. a (Bild 26) und g miteinander.

– Die Dynamik der dA entspricht dem getaktet ablaufenden Ausgleichsvorgang der anfangs unterschiedlichen Füllstände.

$$z_1(0) \neq z_2(0) \rightarrow z_1(\infty) = z_2(\infty). \tag{50.175}$$

– Welche Eigenschaften besitzt die benutzte „Arbeitsflüssigkeit“?

• Erweiterungsvorschlag für den dA Cusanus:

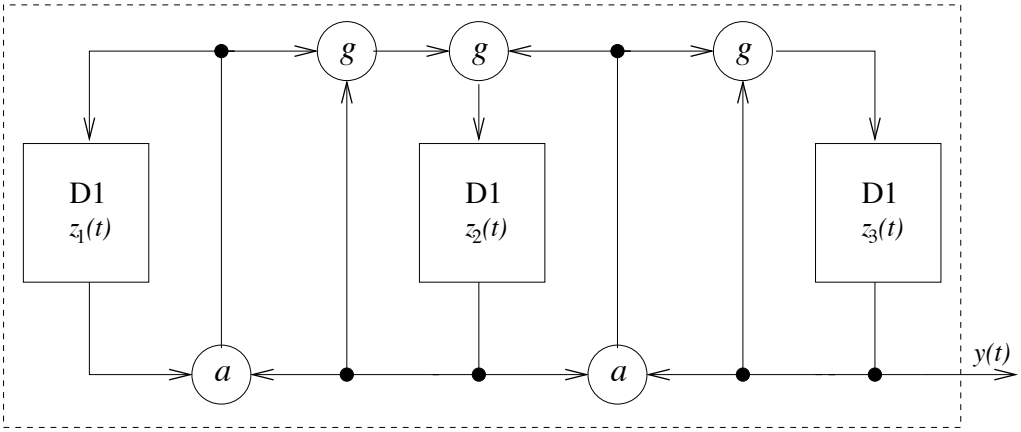


Bild 27: Zusammenschaltung zweier dA Cusanus
(Zustandskopplung über gemeinsames D1 und g)

(e) Finden Sie unter Berücksichtigung der Ergebnisse von Aufgabe 3

– innere (d.h. in die Folgezustandsabbildung eingreifende) und/oder

– äußere (d.h. nur die Ergebnisabbildung verändernde)

Beschaltungen des dA Cusanus (Bild 28), die eine wesentliche Konvergenzbeschleunigung bewirken und untersuchen Sie die Dynamik dieser Fast–Versionen experimentell (Zeitverläufe, *pset*).

Lösung 1 (äußere Beschaltung):

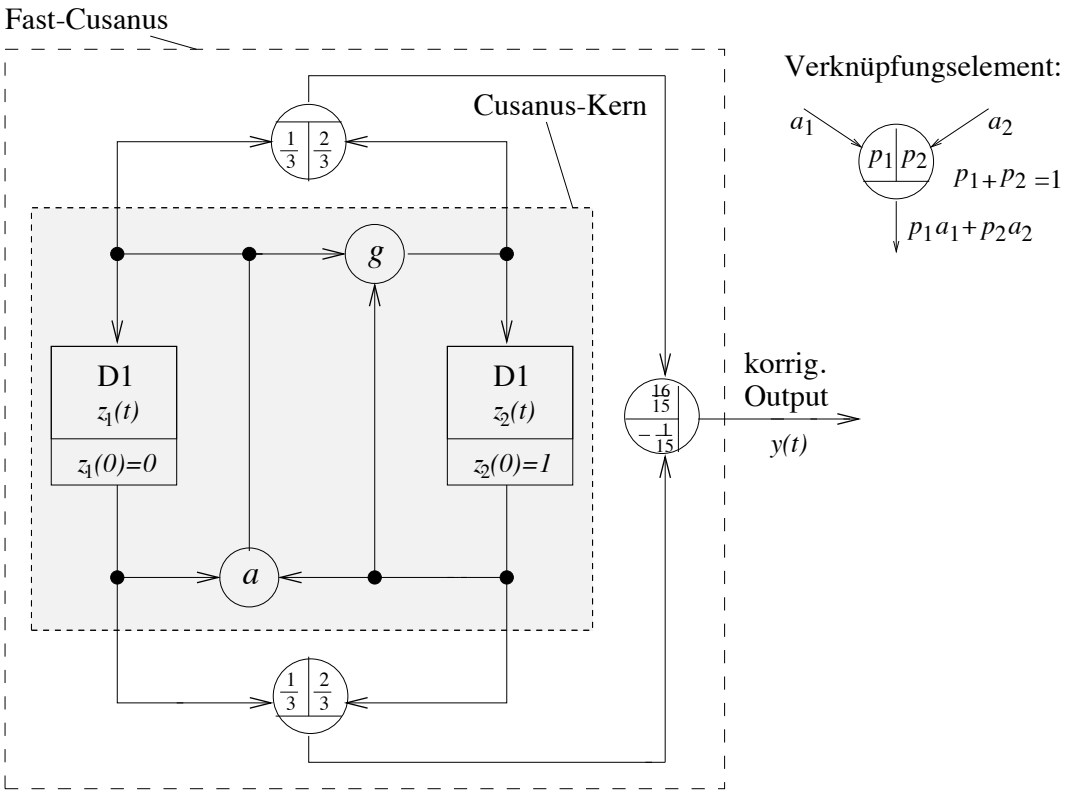


Bild 28: Äußere Beschaltung („über Kreuz“) des dA Cusanus zur Konvergenzbeschleunigung (optimale Wahl der Gewichte in den äußeren Verknüpfungselementen)

Experiment 1.4

t	$z_1(t)$	$z_2(t)$	$y(t)$	$d\,y(t)=\frac{y(t)-y(t+1)}{y(t+1)-y(t+2)}$
0	0.0	1.0	0.636164822177	84.974183590398
1	0.5	0.707106781187	0.636614402781	68.194645135578
2	0.603553390593	0.653281482438	0.636619693571	64.998685723704
3	0.628417436516	0.640728861935	0.636619771155	64.248576226417
4	0.634573149226	0.637643577336	0.636619772349	64.040183696900
5	0.636108363281	0.636875507722	0.636619772367	
6	0.636491935501	0.636683692726	0.636619772368	
7	0.636587814114	0.636635751615	0.636619772368	

Tabelle 12: Dynamik des dA nach Bild 28

Man erkennt aus Tabelle 12:

– $$\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{2}{\pi}. \tag{50.176}$$

Durch die äußere Beschaltung des Cusanus–Kerns nach Bild 28 verdreifacht sich im Mittel die Anzahl der so erzeugten gültigen $\frac{2}{\pi}$–Stellen in $y(t)$ gegenüber dem unkorrigierten Output $z_2(t)$ des Cusanus–Kerns (vgl. Bild 26).

– Die Zustandswerte $z_1(t)$ und $z_2(t)$ des Cusanus–Kerns generieren Werte der trigonometrischen Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ für diskrete Argumente (vgl.[4], Baustein 1):

$$\frac{z_1(t)}{z_2(t)} = \cos\left(\frac{1}{2^t}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{2^t-1}{2^t}\cdot\frac{\pi}{2}\right) \tag{50.177}$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{\substack{t\text{–fach geschachtelte Kettenwurzel,}\\ t\text{–mal Radikand 2}\\ (t-1)\text{–stelliges Vorzeichenwort} + + + \ldots +}} \; ; \quad t = 1, 2, 3, \ldots . \tag{50.178}$$

□

50.3.3 Der dA Cusanus für beliebige Initialisierungen

Die in Aufgabe 16(b) mit einer Rückwärtsinitialisierung begonnene Herauslösung des Cusanus–Kerns aus seinem ursprünglichen geometrischen Beziehungsgeflecht (s. Abschn. 50.1.5) und die effizienten Beschaltungsmöglichkeiten zur Konvergenzbeschleunigung (Korrekturautomat Bild 25 und äußere Beschaltung Bild 28) legen es nahe zu untersuchen, welche Verhaltensmuster der dA Cusanus in der Fast–Konfiguration Bild 28 für beliebige Initialisierungen realisiert.

Aufgabe 17

(a) Untersuchen Sie experimentell die Dynamik des dA Bild 28 (Zeitverläufe, *pset*) für beliebige Initialisierungen $(z_1(0), z_2(0))$.

Lösung:

Experiment 1.5

t	$z_1(t)$	$z_2(t)$	$y(t)$	$d\,y(t) = \frac{y(t)-y(t+1)}{y(t+1)-y(t+2)}$
0	0.0	-1.0	0.369498155510	-49.323944186771
1	-0.5	0.707106781187	0.208928406432	144.906756690154
2	0.103553390593	0.270598050073	0.212183818215	74.296141669628
3	0.187075720333	0.224994055784	0.212206283778	66.292606092213
4	0.206034888059	0.215305887280	0.212206586156	64.557961167909
5	0.210670387669	0.212975526154	0.212206590717	64.141280520070
6	0.211822956912	0.212398459740	0.212206590788	64.322528363047
7	0.212110708326	0.212254535270	0.212206590789	

Tabelle 13: Dynamik des dA nach Bild 28, aber mit anderer Initialisierung:
$z_1(0) = 0$ und $z_2(0) = -1$

Tabelle 13 zeigt:

– $$\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{2}{3\,\pi}. \tag{50.179}$$

Die im Experiment 1.4 konstatierte Konvergenzbeschleunigung wird hier in gleichem Maße realisiert.

– Auch hier generieren $z_1(t)$ und $z_2(t)$ Werte von $\sin x$ und $\cos x$ für diskrete Argumente:

$$\frac{z_1(t)}{z_2(t)} = \frac{z_2(t)}{z_2(t-1)} = \cos\left(\frac{3}{2^t}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{2^t-3}{2^t}\cdot\frac{\pi}{2}\right) \tag{50.180}$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2-\sqrt{2}}}}}_{\substack{t\text{–fach geschachtelte Kettenwurzel,}\\ t\text{–mal Radikand 2}\\ (t-1)\text{–stelliges Vorzeichenwort } ++\ldots+-}} \;;\; t = 1,2,3,\ldots\,. \tag{50.181}$$

– Zusammenfassend ergibt sich aus Tabelle 12 und 13:

$z_1(0)$	$z_2(0)$	$\frac{z_1(t)}{z_2(t)} = \cos\left(\frac{2k+1}{2^t}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ mit $k =$
0	1	1
0	-1	3

Lassen sich bei anderen Initialisierungen $(z_1(0), z_2(0))$ so auch die Werte von $\cos\left(\frac{2k+1}{2^t}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ für $k = 5, 7, \ldots, 2^{t-1}-1$ generieren?

Experiment 1.6

t	$z_1(t)$	$z_2(t)$	$y(t)$	$d\,y(t) = \frac{y(t)-y(t+1)}{y(t+1)-y(t+2)}$
0	1.666666666667	1.333333333333	1.442700014725	61.07932636243
1	1.5	1.414213562373	1.442695122276	63.24347895451
2	1.457106781187	1.435499972755	1.442695042176	63.80905236545
3	1.446303376971	1.440891549783	1.442695040909	63.94206008584
4	1.443597463377	1.442243871982	1.442695040889	
5	1.442920667679	1.44258223014	1.442695040889	
6	1.44275144891	1.442666837044	1.442695040889	
7	1.442709142977	1.442687989855	1.442695040889	

Tabelle 14: Dynamik des dA nach Bild 28, Initialisierung: $z_1(0) = \frac{5}{3}$, $z_2(0) = \frac{4}{3}$

Experiment 1.7

t	$z_1(t)$	$z_2(t)$	$y(t)$	$d\,y(t) = \frac{y(t)-y(t+1)}{y(t+1)-y(t+2)}$
0	1.333333333333	1.666666666667	1.553995019912	66.755484729894
1	1.5	1.581138830084	1.553998818560	64.666948358537
2	1.540569415042	1.560722307960	1.553998875464	64.162926623923
3	1.550645861501	1.555675926339	1.553998876344	64.404588112617
4	1.553160893920	1.554417901467	1.553998876358	
5	1.553789397694	1.554103617808	1.553998876358	
6	1.553946507751	1.554025060794	1.553998876358	
7	1.553985784272	1.554005422409	1.553998876358	

Tabelle 15: Dynamik des dA nach Bild 28, Initialisierung: $z_1(0) = \frac{4}{3}$, $z_2(0) = \frac{5}{3}$

Experiment 1.8

t	$z_1(t)$	$z_2(t)$	$y(t)$	$d\,y(t) = \frac{y(t)-y(t+1)}{y(t+1)-y(t+2)}$
0	1.333333333333	−1.666666666667	0.359973648612	−138.31252127108
1	−0.166666666667	0.527046276694	0.263489580106	99.843314203983
2	0.180189805014	0.308169378477	0.264187160250	70.278102309580
3	0.244179591746	0.274314915790	0.264194146999	65.460223486970
4	0.259247253768	0.266674686812	0.264194246414	64.358856075540
5	0.262960970290	0.264811318481	0.264194247933	64.078685559240
6	0.263886144386	0.264348326690	0.264194247957	
7	0.264117235538	0.264232755850	0.264194247957	

Tabelle 16: Dynamik des dA nach Bild 28, Initialisierung: $z_1(0) = \frac{4}{3}$, $z_2(0) = -\frac{5}{3}$

Experiment 1.9

t	$z_1(t)$	$z_2(t)$	$y(t)$	$dy(t) = \frac{y(t)-y(t+1)}{y(t+1)-y(t+2)}$
0	1.0	j	0.384389067700	69.196963653513
			$+0.685786301877j$	$+23.061558501125j$
1	0.5	0.321797126453	0.384213352224	66.463794286433
	$+0.5j$	$+0.776886987015j$	$+0.684751016816j$	$+4.791021731099j$
2	0.410898563226	0.370588065355	0.384206578936	64.660906364754
	$+0.638443493508j$	$+0.707889807331j$	$+0.684738312754j$	$+1.126901843956j$
3	0.390743314291	0.380921178669	0.384206463846	64.167555554352
	$+0.673166650420j$	$+0.690524399231j$	$+0.684738129908j$	$+0.277414075369j$
4	0.385832246480	0.383392518782	0.384206462018	64.052337953842
	$+0.681845524825j$	$+0.686184465547j$	$+0.684738127112j$	$+0.059518369561j$
5	0.384612382631	0.384003436023	0.384206461989	
	$+0.684014995186j$	$+0.685099695405j$	$+0.684738127068j$	
6	0.384307909327	0.384155734217	0.384206461989	
	$+0.684557345296j$	$+0.684828518104j$	$+0.684738127068j$	
7	0.384231821772	0.384193781840	0.384206461989	
	$+0.684692931700j$	$+0.684760724761j$	$+0.684738127068j$	

Tabelle 17: Dynamik des dA nach Bild 28,
Initialisierung: $z_1(0) = 1$ und $z_2(0) = j = \sqrt{-1}$

Diskussion der Experimente 1.6, 1.7, 1.8 und 1.9:

- Tabelle 18 (s. S. 61)
  Auch hier wird dieselbe Konvergenzbeschleunigung wie im Falle der Experimente 1.4 und 1.5 realisiert!
- $z_1(t)$ und $z_2(t)$ generieren dabei folgende Funktionen: Tabelle 19 (s. S. 62).

(b)
- Verifizieren Sie die in den Tabellen 18 und 19 zusammengestellten empirisch (also durch gezieltes Probieren) gewonnenen Formelausdrücke.
- Geben Sie auf dieser Basis allgemeine Formelausdrücke für $\lim_{t\to\infty} y(t)$ und $\frac{z_1(t)}{z_2(t)}$ des dA Cusanus nach Bild 28 in Abhängigkeit von der Initialisierung $(z_1(0), z_2(0))$ an.
- Untersuchen Sie nun systematisch charakteristische Spezialfälle.

Bei den vorliegenden Initialisierungen		liefert der dA nach Bild 28 im eingeschwungenen Zustand den Output	
$z_1(0)$	$z_2(0)$	$\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$	
$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\dfrac{1}{\ln 2}$	(50.182)
$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\dfrac{1}{\arccos\left(\frac{4}{5}\right)}$	(50.183)
$\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$\dfrac{1}{\pi + \arccos\left(\frac{4}{5}\right)}$	(50.184)
1	j	$\dfrac{\sqrt{2}}{\ln(1+\sqrt{2}) - \frac{\pi}{2}\,j} = \dfrac{\sqrt{2}}{\ln(1+\sqrt{2}) - \ln\, j} = \dfrac{\sqrt{2}}{\ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{j}\right)}$	(50.185)

Tabelle 18: Empirisch gewonnene Formelausdrücke für $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$

$z_1(0)$	$z_2(0)$	$\frac{z_1(t)}{z_2(t)} = \frac{z_2(t)}{z_2(t-1)}$
$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\cosh\left(\frac{1}{2^t}\ln 2\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt[2^t]{2} + \frac{1}{\sqrt[2^t]{2}}\right)$ (50.186)
$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\cos\left(\frac{1}{2^t}\arccos\left(\frac{4}{5}\right)\right)$ (50.187)
$\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$\cos\left(\frac{1}{2^t}\left(\pi + \arccos\left(\frac{4}{5}\right)\right)\right)$ (50.188)
1	j	

Tabelle 19: Empirisch gewonnene Formelausdrücke für $\frac{z_1(t)}{z_2(t)}$

Lösungshinweis:

Mit

$$z_1(0) = u,\ z_2(0) = v \tag{50.189}$$

erhält man die allgemeinen Formelausdrücke

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{\sqrt{u^2 - v^2}}{\ln\left(\frac{u + \sqrt{u^2 - v^2}}{v}\right)}\ ^{9} \tag{50.190}$$

$$= \frac{\sqrt{u^2 - v^2}}{\operatorname{arcosh}\left(\frac{u}{v}\right)} \tag{50.191}$$

$$\frac{z_1(t)}{z_2(t)} = \frac{z_2(t)}{z_2(t-1)} = \cosh\left(\frac{1}{2^t}\ln\left(\frac{u + \sqrt{u^2 - v^2}}{v}\right)\right)\ ^{9} \tag{50.192}$$

$$= \cosh\left(\frac{1}{2^t}\operatorname{arcosh}\left(\frac{u}{v}\right)\right). \tag{50.193}$$

Hieraus ergeben sich z.B. folgende charakteristische Spezialfälle (Tabelle 20).

[9] Treten im Verlaufe der Berechnung der rechten Seiten der Gln. (50.190)–(50.193) komplexe Zahlen in algebraischer Notation

$$z = a + b\,j \tag{50.194}$$

auf, so ist bei deren Umformung in exponentielle Notation

$$z = |\,z\,|\,e^{\arg(z)\,j} \tag{50.195}$$

der Winkel $\arg(z)$ von der positiv gerichteten reellen Achse der Gaußschen Zahlenebene ausgehend im positiven mathematischen Drehsinn zu bestimmen. Es ist also für

$$z = -4 - 3\,j \tag{50.196}$$

$$\arg(z) = \pi + \arccos\left(\frac{4}{5}\right) \tag{50.197}$$

(vgl. Bild 29) und nicht (wie z.B. bei dem Softwaresystem Mathematica) der Hauptwert

$$\mathrm{Arg}(z) = -\pi + \arccos\left(\frac{4}{5}\right) \tag{50.198}$$

zu nehmen!

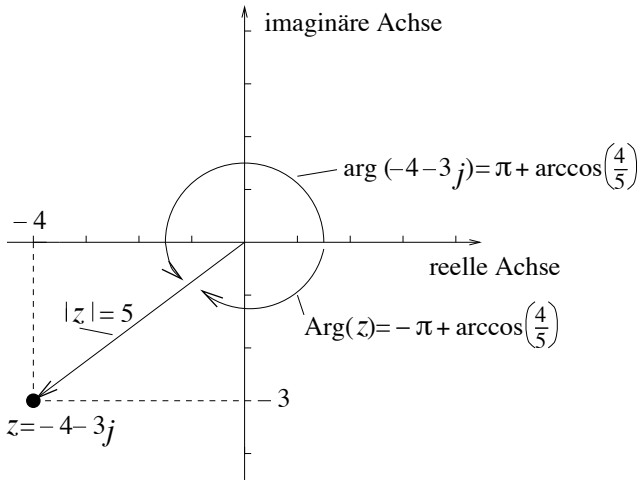


Bild 29: Gaußsche Zahlenebene, Berechnung von $\arg(z)$

$z_1(0)=u$	$z_2(0)=v$	Einschränkungen	$\frac{1}{\lim\limits_{t\to\infty} y(t)}$	$\frac{z_1(t)}{z_2(t)}=\frac{z_2(t)}{z_2(t-1)}$
$\frac{x^2+1}{x^2-1}$	$\frac{2\,x}{x^2-1}$	$x\neq 1;\ x\in\mathbb{R}_+$	$\ln x$	$\cosh\left(\frac{\ln x}{2^t}\right)=$
$x-1$	1	$u^2-v^2=1$		$\frac{1}{2}\left(\sqrt[2^t]{x}+\frac{1}{\sqrt[2^t]{x}}\right)$
$\frac{1}{x}+x$	$\frac{1}{x}-x$	$0<x<1;\ x\in\mathbb{R}_+$ $u^2-v^2=1$	$\operatorname{artanh} x$	$\cosh\left(\frac{\operatorname{artanh} x}{2^t}\right)$
x	1	$0<x<1;\ x\in\mathbb{R}_+$ $u^2-v^2=-1$	$\arccos x$	$\cos\left(\frac{\arccos x}{2^t}\right)$

Tabelle 20: Spezialfälle der Gln. (50.190)–(50.193)

(c) Läßt sich für $\cosh\left(\frac{1}{2^t}\ln 2\right)$ ein ähnlicher geschachtelter Wurzelausdruck wie für $\cos\left(\frac{1}{2^t}\frac{\pi}{2}\right)$ (Gln. (50.177) und (50.178)) angeben?

Lösung:

$$\cosh\left(\frac{1}{2^t}\ln 2\right) = \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\left(\frac{3}{2}\right)\sqrt{2}}}}}_{\substack{t\text{–fach geschachtelte Kettenwurzel,}\\ t\text{–mal Radikand 2}}};\quad t=1,2,3,\ldots \tag{50.199}$$

$$\cosh\left(\frac{2\,a+1}{2^t}\ln 2\right) = \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\left(2^a+2^{-(a+1)}\right)\sqrt{2}}}}}_{\substack{t\text{–fach geschachtelte Kettenwurzel,}\\ t\text{–mal Radikand 2}}}. \tag{50.200}$$

$$t=1,2,3,\ldots;\ a\in\mathbb{N}_0$$

□

50.3.4 Modifikationen des dA Cusanus

Die Untersuchung des dA Cusanus (Bild 28) für verschiedene frei gewählte Initialisierungen hat gezeigt,

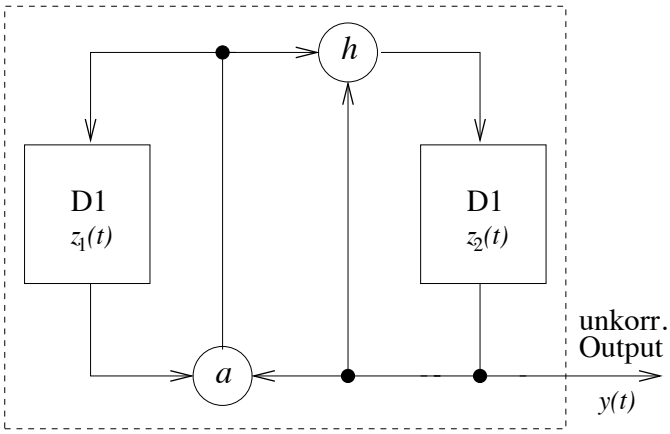
– daß auf diese Weise die Funktionswerte einer Reihe von Funktionen berechnet werden können,

– wobei die für die $\frac{2}{\pi}$–Berechnung benutzten Beschaltungen zur Konvergenzbeschleunigung (Korrekturautomat Bild 25 bzw. äußere Beschaltung Bild 28) hier in gleichem Maße wirksam sind.

Es liegt daher im Sinne der Zielstellung dieses Buches nahe, diesen „Schlüsselautomaten“ weiter auszuloten.

50.3.4.1 Substitution $g \to h$

Hierzu soll zunächst in Bild 26 bzw. 28 die Substitution $g \to h$ vorgenommen werden. Man erhält so den modifizierten dA Bild 30.



$$z_1(t+1) = a(z_1(t), z_2(t))$$

$$z_2(t+1) = h(a(z_1(t), z_2(t)), z_2(t))$$

$$y(t) = z_2(t)$$

Bild 30: Modifikation des dA Cusanus, Substitution $g \to h$

Aufgabe 18

(a) Untersuchen Sie experimentell die Dynamik des dA Bild 30 und seiner Fast–Variation Bild 31:

- Zeitverläufe $z_1(t)$, $z_2(t)$ und $y(t)$ (Automatenband)
- $pset(z_1(t), z_2(t))$, $pset(z_2(t), z_2(t+1))$ und $pset(y(t), y(t+1))$

für verschiedene Initialisierungen $z_1(0), z_2(0))$.

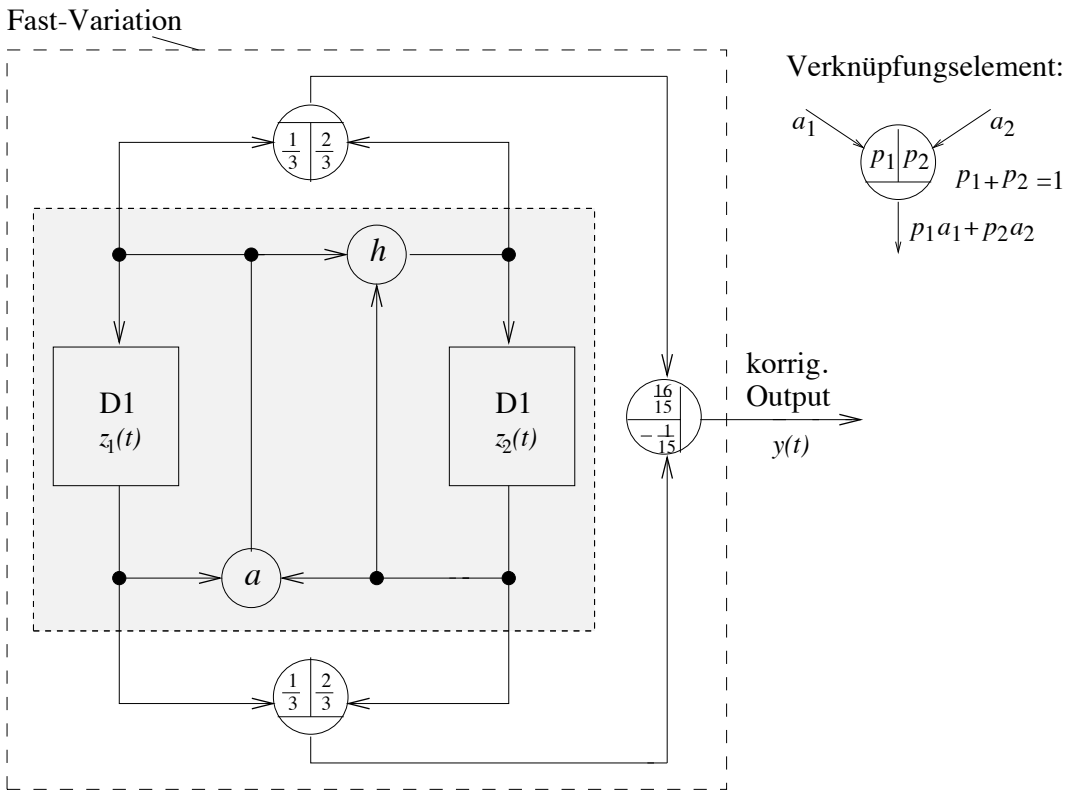


Bild 31: Äußere Beschaltung („über Kreuz“) des dA nach Bild 30 zur Konvergenzbeschleunigung

Lösung:

Experiment 1.10 (Tabelle 21)

Man erkennt aus Tabelle 21:

– $$\lim_{t\to\infty} y(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{4^k-2}{4^k-1} = 0.60914\,97110\,66228\ldots . \tag{50.201}$$

Durch die äußere Beschaltung nach Bild 31 verdreifacht sich im Mittel die Anzahl der so erzeugten gültigen Stellen in $y(t)$ gegenüber dem unkorrigierten Output $z_2(t)$ des Kern–dA Bild 30.

– $$z_1(t) = z_2(t)\,\frac{4^t-1}{4^t} \tag{50.202}$$

$$z_2(t) = \prod_{k=1}^{t} \frac{4^k-2}{4^k-1}\,. \tag{50.203}$$

t	$z_1(t)$	$z_2(t)$	$y(t)$	$d\,y(t)$
0	0.0	1.0	0.607407407407	126.0
1	$\frac{2}{3}\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	0.609135802469	72.8571429
	$= 0.5$	$= 0.666666666667$		
2	$\frac{2}{3}\frac{14}{15}\frac{15}{16}$	$\frac{2}{3}\frac{14}{15}$	0.609149519890	66.0
	$= 0.583333333333$	$= 0.622222222222$		
3	$\frac{2}{3}\frac{14}{15}\frac{62}{63}\frac{63}{64}$	$\frac{2}{3}\frac{14}{15}\frac{62}{63}$	0.609149708169	64.4881890
	$= 0.602777777778$	$= 0.612345679012$		
4	$\frac{2}{3}\frac{14}{15}\frac{62}{63}\frac{254}{255}\frac{255}{256}$	$\frac{2}{3}\frac{14}{15}\frac{62}{63}\frac{254}{255}$	0.609149711021	64.1213307
	$= 0.607561728395$	$= 0.609944323408$		
5	$\frac{2}{3}\frac{14}{15}\frac{62}{63}\frac{254}{255}\frac{1022}{1023}\frac{1023}{1024}$	$\frac{2}{3}\frac{14}{15}\frac{62}{63}\frac{254}{255}\frac{1022}{1023}$	0.609149711065	64.0302884
	$= 0.608753025902$	$= 0.609348092398$		
6	$\frac{2}{3}\frac{14}{15}\frac{62}{63}\frac{254}{255}\frac{1022}{1023}\frac{1023}{1024}\frac{4094}{4095}\frac{4095}{4096}$	$\frac{2}{3}\frac{14}{15}\frac{62}{63}\frac{254}{255}\frac{1022}{1023}\frac{1023}{1024}\frac{4094}{4095}$	0.609149711066	64.0075693
	$= 0.609050559150$	$= 0.609199289445$		

Tabelle 21: Dynamik des dA nach Bild 31, Initialisierung: $z_1(0) = 0$ und $z_2(0) = 1$

(b) Zeigen Sie experimentell, daß die Gewichte in den Verknüpfungselementen der äußeren Beschaltung Bild 31 die so maximal erreichbare Konvergenzbeschleunigung realisieren.

(c) Geben Sie allgemeine Formelausdrücke für $z_1(t)$, $z_2(t)$ und $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$ des dA nach Bild 31 in Abhängigkeit von $(z_1(0), z_2(0))$ an und untersuchen Sie charakteristische Spezialfälle.

Lösungshinweis:

Mit

$$z_1(0) = u,\ z_2(0) = v \tag{50.204}$$

erhält man die Formelausdrücke

$$z_1(t) = z_2(t)\,\frac{u + (4^t - 1)\,v}{4^t\,v} \tag{50.205}$$

$$z_2(t) = u \prod_{k=1}^{t} \frac{2\,u + \left(4^k - 2\right) v}{u + (4^k - 1)\,v} \tag{50.206}$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = u \prod_{k=1}^{\infty} \frac{2\,u + \left(4^k - 2\right) v}{u + (4^k - 1)\,v}\,. \tag{50.207}$$

(d) Aus Gl. (50.202) folgt

$$\frac{z_2(t)}{z_1(t)} = \frac{4^t}{4^t - 1} \tag{50.208}$$

$$\frac{z_1(t) - z_2(t)}{z_1(t)} = -\frac{1}{4^t - 1}\,, \tag{50.209}$$

d.h. der dA nach Bild 30 generiert für die Initialisierung

$$z_1(0) = 0,\ z_2(0) = 1 \tag{50.210}$$

die Gewichte der Verknüpfungselemente Bild 24 für den Korrekturautomaten Bild 25, mit dessen Hilfe sowohl der Output des dA Archimedes (Bild 22) als auch des dA Cusanus (Bild 26) auf hohe Konvergenzbeschleunigung korrigiert werden kann.
Entwerfen Sie für den Cusanus–Kern (Bild 26) entsprechende Realisierungsschaltungen für eine möglichst hohe Konvergenzbeschleunigung mit den Komponenten

- dA Bild 30
- Verknüpfungselement Bild 24
- Korrekturautomat Bild 25

und versuchen Sie diese Komponenten möglichst kompakt zu integrieren.

(e) Untersuchen Sie experimentell die Leistungsfähigkeit dieser Schaltungen mit verallgemeinerten Verknüpfungselementen (Bild 32), deren Gewichte durch $z_1(t)$ und $z_2(t)$ des dA nach Bild 30 mit beliebigen Initialisierungen

$$((z_1(0), z_2(0)) = (u, v) \neq (0, 1) \tag{50.211}$$

generiert werden.

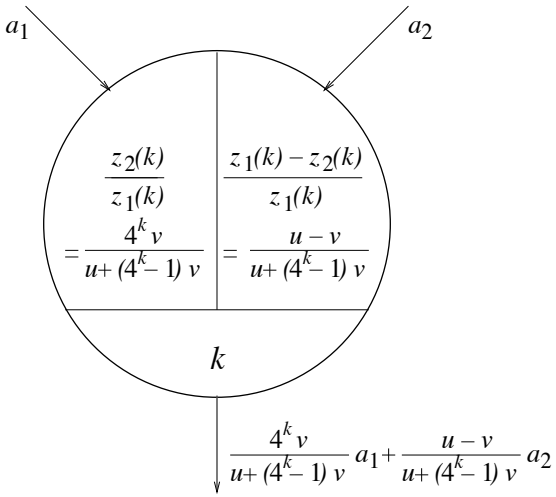
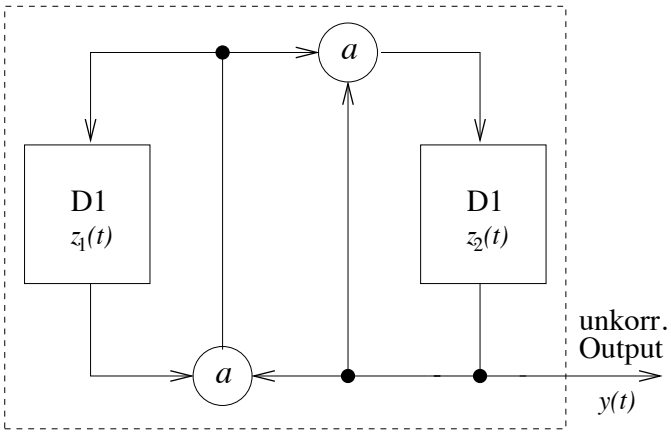


Bild 32: Verallgemeinertes Verknüpfungselement

Diskutieren Sie die erhaltenen Ergebnisse. □

50.3.4.2 Substitution $g \to a$

Nach der Substitution $g \to h$, die sich als sehr produktiv erwiesen hat, liegt es nun natürlich nahe, eine weitere Modifikation des dA Cusanus, die durch die zunächst als trivial erscheinende Substitution $g \to a$ erhalten wird (Bild 33), in der äußeren Beschaltung nach Bild 31 zu untersuchen. Tabelle 22 zeigt zugehörige Zeitverläufe von $z_1(t)$, $z_2(t)$ und $y(t)$.



$$z_1(t+1) = a(z_1(t), z_2(t))$$

$$z_2(t+1) = a(a(z_1(t), z_2(t)), z_2(t))$$

$$y(t) = z_2(t)$$

Bild 33: Modifikation des dA Cusanus, Substitution $g \to a$

Experiment 1.11

t	$z_1(t)$	$z_2(t)$	$y(t)$
0	1.0	0.0	0.333333333333
1	0.5	0.25	0.333333333333
2	0.375	0.3125	0.333333333333
3	0.34375	0.328125	0.333333333333
4	0.3359375	0.33203125	0.333333333333
5	0.333984375	0.3330078125	0.333333333333
6	0.33349609375	0.333251953125	0.333333333333

Tabelle 22: Dynamik des dA nach Bild 33 mit der äußeren Beschaltung nach Bild 31; $z_1(0) = 1$, $z_2(0) = 0$

Man erkennt aus Tabelle 22:

– $$\lim_{t\to\infty} z_1(t) = \lim_{t\to\infty} z_2(t) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{1}{3}\,, \tag{50.212}$$

d.h. der dA nach Bild 33 realisiert die Drittelung von 1 durch fortlaufende Bildung des arithmetischen Mittels und ist damit der Automateneinbettung des Algorithmus (A11) äquivalent. Durch die äußere Beschaltung nach Bild 31 (Drittelung im Horizontalzweig) wird der Endwert $\frac{1}{3}$ von $y(t)$ natürlich schon für $t = 1$ erreicht.

– $$z_1(t) = \frac{1}{3}\,\frac{4^t + 2}{4^t} \tag{50.213}$$

$$z_2(t) = \frac{1}{3}\,\frac{4^t - 1}{4^t}\,. \tag{50.214}$$

Aufgabe 19

(a) Geben Sie allgemeine Formelausdrücke für $z_1(t)$ und $z_2(t)$ des dA nach Bild 33 in Abhängigkeit von $(z_1(0), z_2(0))$ an.

(b) Untersuchen Sie experimentell den Einsatz der Werte von $z_1(t)$ und $z_2(t)$ für die Konstruktion verallgemeinerter Verknüpfungselemente für den Korrekturautomaten Bild 25 (vgl. Aufgabe 18(d) und (e)). □

Aufgabe 20

Bearbeiten Sie die Fragestellungen der Aufgaben 18 und 19 nun auch für die anderen nach Tabelle 1 möglichen Substitutionen $g \to qa_f$. □

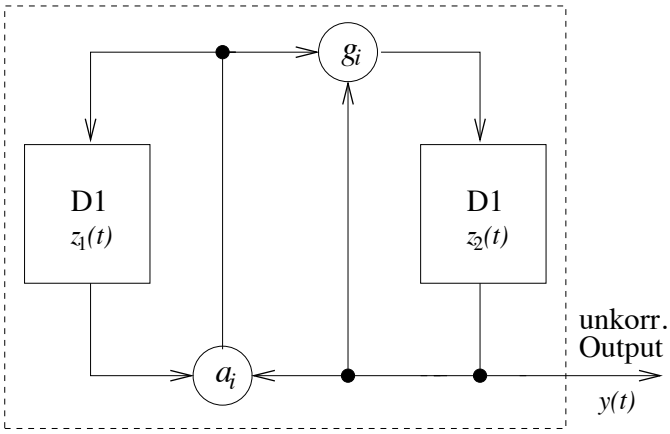
50.3.4.3 Substitution $a \to a_i$, $g \to g_i$

Eine weitere Modifikation des dA Cusanus basiert auf der Pappos–Leiter (Bild 2 und Gln. (50.9)–(50.11)). Die zugehörigen Substitutionen lauten hier

$$a \to a_i \;=\; a\left(\frac{g}{a}\right)^{2i} = a\left(\frac{h}{a}\right)^{i};\; i = 1, 2, 3, \ldots \tag{50.215}$$

$$g \to g_i \;=\; g\left(\frac{g}{a}\right)^{2i} = g\left(\frac{h}{a}\right)^{i};\; i = 1, 2, 3, \ldots, \tag{50.216}$$

der so erhaltene Generatorautomat ist im Bild 34 dargestellt.



$$z_1(t+1) = a_i(z_1(t), z_2(t))$$

$$z_2(t+1) = g_i(a_i(z_1(t), z_2(t)), z_2(t))$$

$$y(t) = z_2(t)$$

Bild 34: Modifikation des dA Cusanus, Substitutionen $a \to a_i$, $g \to g_i$

Aufgabe 21

(a) Untersuchen Sie experimentell die Dynamik des dA Bild 34 mit der äußeren Beschaltung nach Bild 31 und wie in Aufgabe 18(a).

Lösungshinweis:

Experiment 1.12 (Tabelle 23)

(b) Diskutieren Sie die erhaltenen Ergebnisse und versuchen Sie in Analogie zu Aufgabe 17(a) und 18(a) Formelausdrücke für $\frac{z_1(t)}{z_2(t)}$ und $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$ zu gewinnen.

(c) Verifizieren Sie diese Formelausdrücke und gewinnen Sie auf dieser Basis eine Verallgemeinerung für beliebige Initialisierungen $(z_1(0), z_2(0))$.

(d) Zeigen Sie experimentell, daß die Gewichte in den Verknüpfungselementen der äußeren Beschaltung nach Bild 31 auch hier die so maximal erreichbare Konvergenzbeschleunigung realisieren.

i	t	$z_1(t)$	$z_2(t)$	$y(t)$	$dy(t) = \frac{y(t)-y(t+1)}{y(t+1)-y(t+2)}$
1	0	1.666666666667	1.333333333333	1.412918199490	135.27501720215
	1	1.463191586648	1.390737091375	1.413207699537	79.43285349633
	2	1.425125483633	1.407406390951	1.413209839622	67.86505602926
	3	1.416155096491	1.411746859521	1.413209866564	64.96275706707
	4	1.413944106293	1.412843347194	1.413209866961	64.00465116279
	5	1.413393298105	1.413118188883	1.413209866967	
	6	1.413255716717	1.413186944435	1.413209866967	
2	0	1.666666666667	1.333333333333	1.399837615706	187.92741403654
	1	1.445127492986	1.381374567261	1.400698897189	81.68500118610
	2	1.411095166780	1.395681385392	1.400703480243	68.22958709205
	3	1.403261309713	1.399435424784	1.400703536349	65.04596469658
	4	1.401340533346	1.400385711296	1.400703537172	64.33333333333
	5	1.400862634219	1.400624030661	1.400703537184	
	6	1.400743301957	1.400683657422	1.400703537184	
3	0	1.666666666667	1.333333333333	1.387631307084	294.47974536727
	1	1.427286412826	1.373129985840	1.389333091091	83.53916328025
	2	1.398114743737	1.385115611994	1.389338870042	68.53901525710
	3	1.391493756441	1.388271719268	1.389338939219	65.11978166815
	4	1.389875268517	1.389071411361	1.389338940228	64.33364055300
	5	1.389472874881	1.389272012607	1.389338940243	
	6	1.389372414705	1.389322205493	1.389338940244	
4	0	1.666666666667	1.333333333333	1.376059929991	523.92005846768
	1	1.409665592914	1.365668146759	1.378803033448	83.72686839771
	2	1.385924014110	1.375386067682	1.378808269177	68.52060346182
	3	1.380554504305	1.377943631048	1.378808331710	65.11027326733
	4	1.379242889816	1.378591576759	1.378808332623	64.47906026558
	5	1.378916848739	1.378754107235	1.378808332637	
	6	1.378835453977	1.378794774007	1.378808332637	

Tabelle 23: Dynamik des dA nach Bild 34 mit der äußeren Beschaltung nach Bild 31; $z_1(0) = \frac{5}{3}$, $z_2(0) = \frac{4}{3}$ □

50.3.4.4 Hinzunahme einer Eingangsgröße

Bisher wurde der Generatorautomat Cusanus nach der Herauslösung aus seiner geometrischen Herkunft mehrfachen Erweiterungsoperationen unterworfen (äußere Beschaltung zur Konvergenzbeschleunigung, beliebige Initialisierung, Substitution der ursprünglichen Verknüpfungselemente). Dabei traten immer wieder neue interessante Facetten des Leistungsspektrums dieses Schlüsselautomaten ans Licht.

Es ist daher legitim zu erwarten, daß dies bei formaler (d.h. geometrisch nicht inter-

pretierbarer) Hinzunahme einer Eingangsgröße (Regelfall des dA), z.B. in der Konfiguration Bild 35, auch der Fall sein wird.

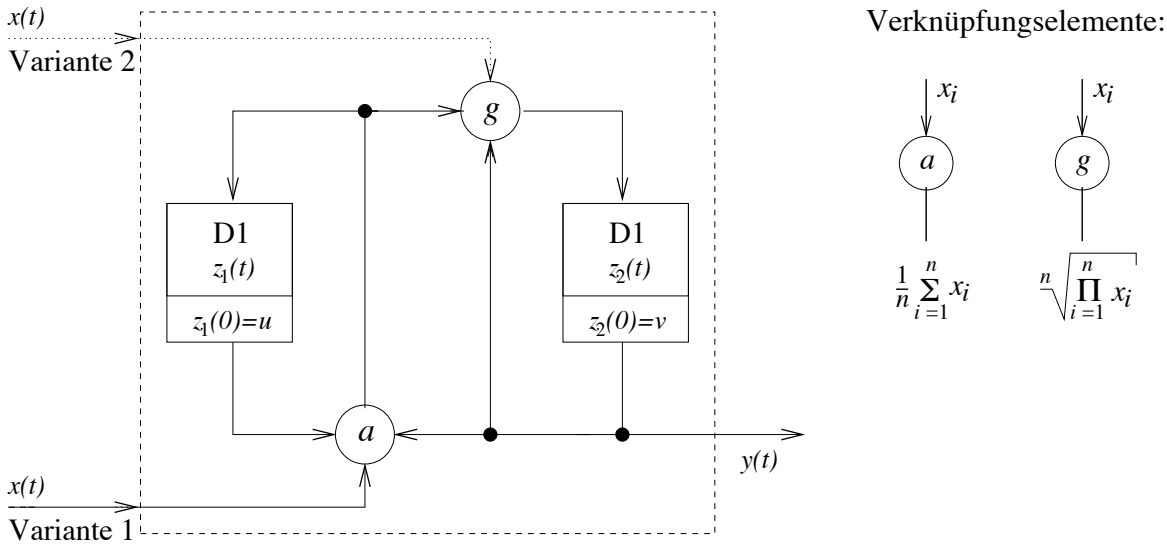


Bild 35: dA Cusanus, Hinzunahme einer Eingangsgröße

Aufgabe 22

(a) Untersuchen Sie experimentell die Dynamik des Vollautomaten Cusanus (Varianten 1 und 2) nach Bild 35 für verschiedene charakteristische Verläufe der Eingangsgröße $x(t)$ (konstante, sprungförmige, linear ansteigende, ... Eingabe, Eingabe eines zweiwertigen Steuersignals, konstante Eingabe mit überlagerten „kleinen Störungen“, ...) bei unterschiedlichen Initialisierungen $(z_1(0), z_2(0))$.

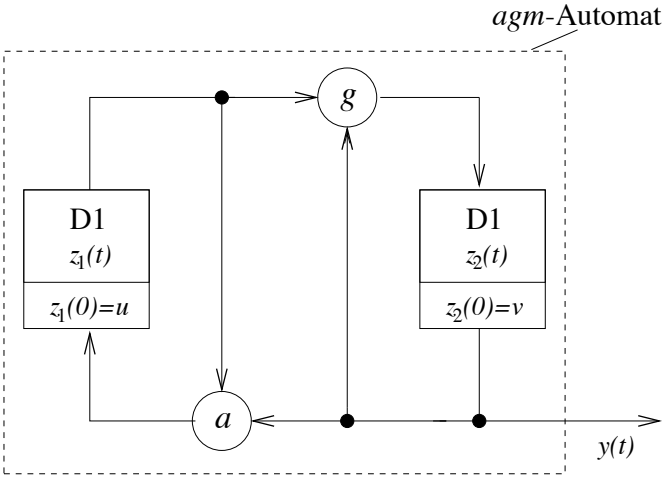
(b) Welche weiteren Funktionen können auf diese Weise generiert werden?

(c) Wie reagiert dabei eine äußere Beschaltung nach Bild 28?

(d) Welche Eigenschaften und Leistungsmerkmale besitzt die Hintereinanderschaltung zweier dA nach Bild 35? □

50.3.5 Automateneinbettung des agm–Algorithmus (A8) und seiner $a-h$–Modifikation (A9)

Die Automateneinbettung der Algorithmen (A8) und (A9) geschieht völlig analog zu der von (A2) und (A3) und liefert die im Bild 35 bzw. Bild 36 dargestellten Generatorautomaten.



$$z_1(t+1) = a(z_1(t), z_2(t))$$

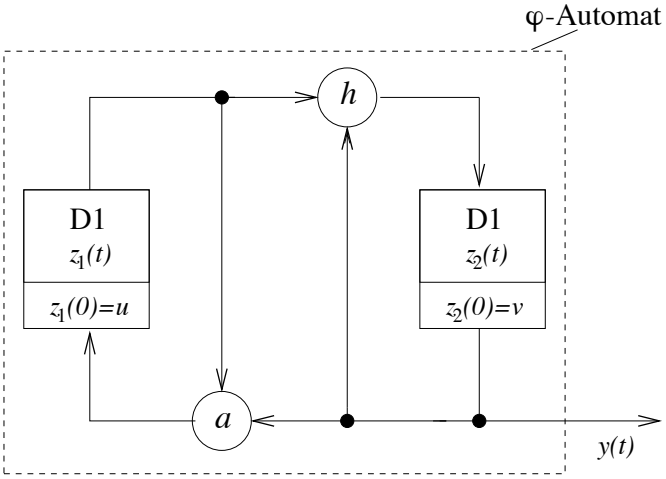
$$z_2(t+1) = g(z_1(t), z_2(t))$$

$$y(t) = z_2(t)$$

$$\lim_{t\to\infty} z_1(t) = \lim_{t\to\infty} z_2(t) =$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = agm(u, v)$$

Bild 36: *agm*–Generatorautomat



$$z_1(t+1) = a(z_1(t), z_2(t))$$

$$z_2(t+1) = h(z_1(t), z_2(t))$$

$$y(t) = z_2(t)$$

$$\lim_{t\to\infty} z_1(t) = \lim_{t\to\infty} z_2(t) =$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \varphi(u, v)$$

Bild 37: φ–Generatorautomat

Aufgabe 23

(a) Transferieren Sie die bei der Bearbeitung von Aufgabe 9 erhaltenen Ergebnisse in die Untersuchung der Dynamik des *agm*–Automaten Bild 36.

(b) Der *agm*–Automat Bild 36 kann formal (als „Muster“) — wie in Bild 38 gezeigt — durch Drehung eines Schaltungsteils (eines „Teilmusters“) aus dem dA Cusanus Bild 26 erzeugt werden.
Diese Betrachtungsweise legt nahe, die Drehoperation versuchsweise auch auf den rechten Schaltungsteil des dA Cusanus anzuwenden (Bild 39).
Interpretieren Sie den so entstandenen dA Bild 39(b):
- Verhaltensweise (Formelnotation)
- Dynamik für charakteristische Initialisierungen
- Erzeugung von Funktionen.

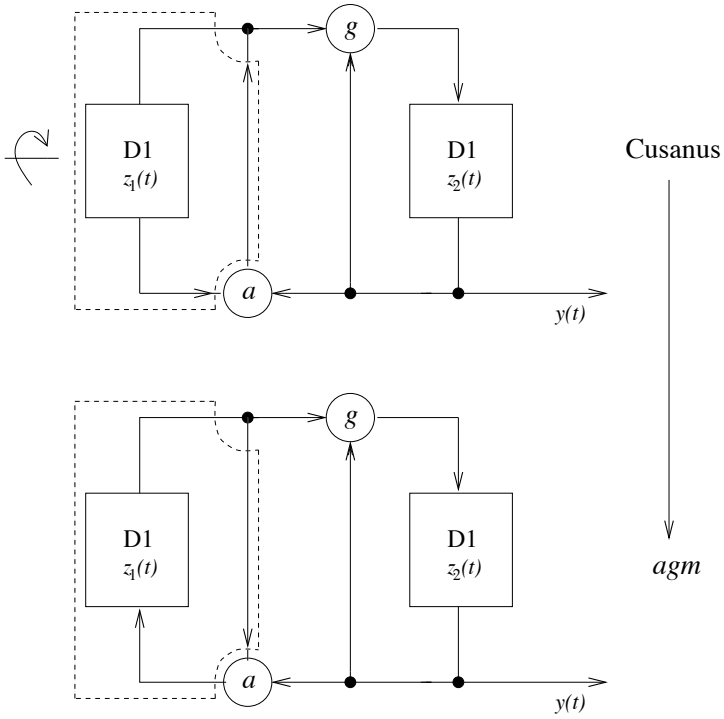


Bild 38: Formale Erzeugung des *agm*–Automaten aus dem dA Cusanus

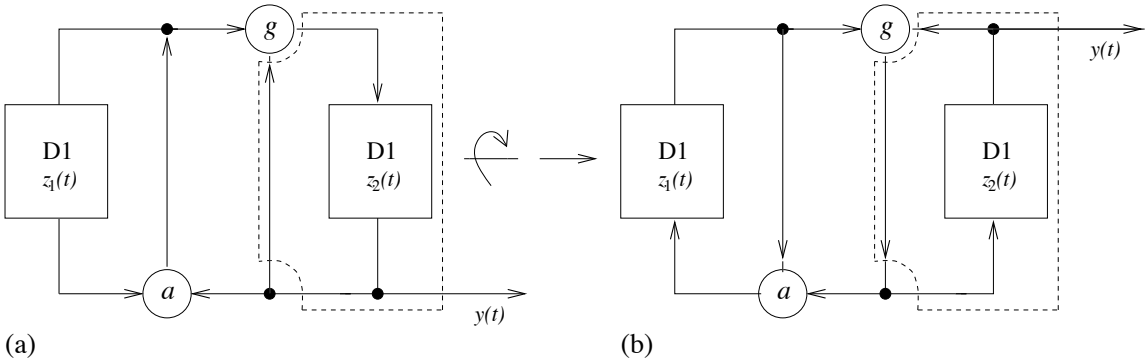


Bild 39: Formale Anwendung der Drehoperation auf den rechten Schaltungsteil des dA Cusanus

(c) Loten Sie den in (b) eingeführten Denkansatz weiter aus:

– Untersuchen Sie wie in (b) Ketten, Ringe und räumliche Strukturen aus Cusanus–Automaten bzw. dessen Derivaten (Abschn. 50.3.4), z.B. die im Bild 40 dargestellten Muster.

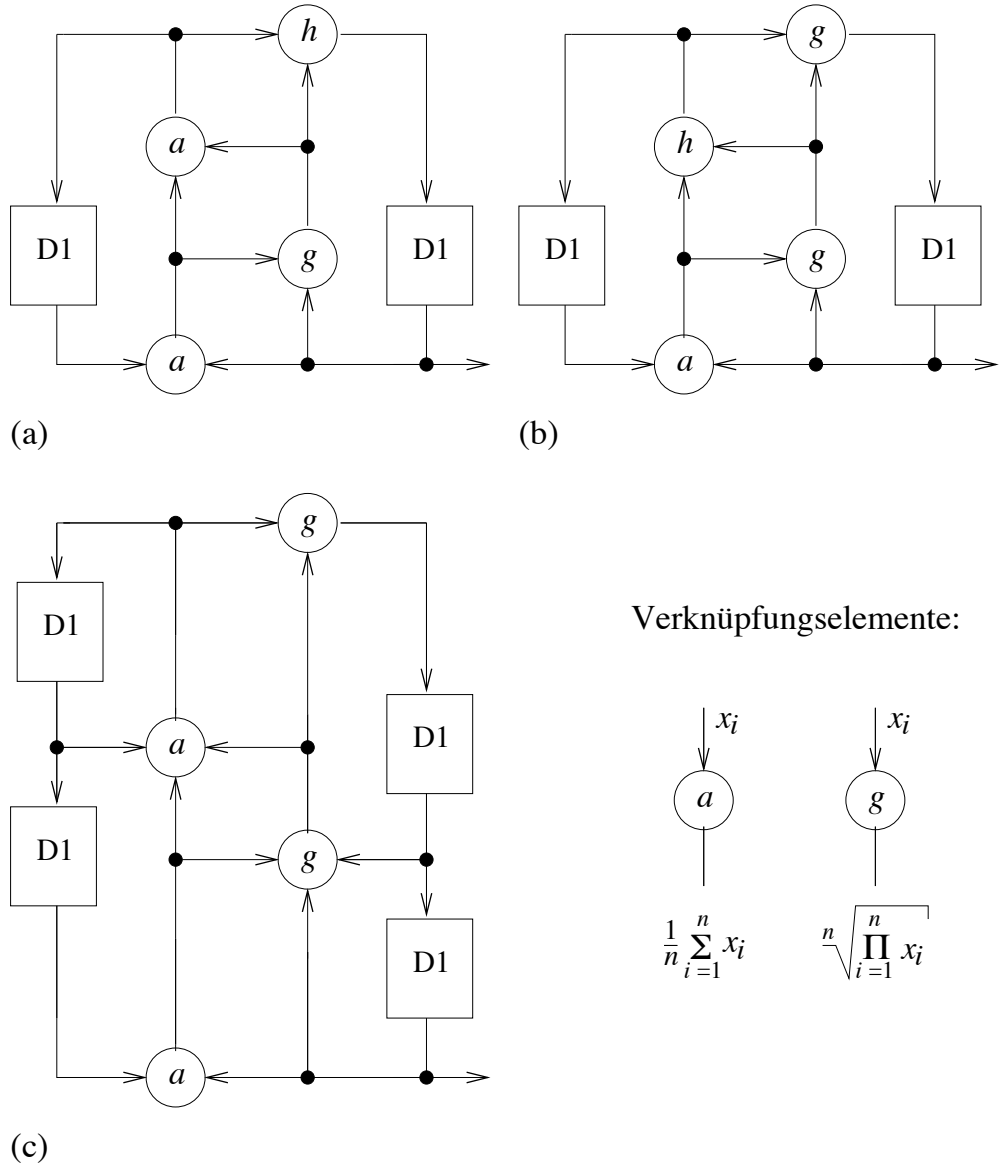


Bild 40: Ausloten des Muster–Konzepts, Beispiele

– Läßt sich die Erzeugung solcher Muster durch eine formale Grammatik, ähnlich etwa der Lindenmayer–Grammatik [49, 50, 51, 52] beschreiben? □

Aufgabe 24

(a) Untersuchen Sie experimentell die Dynamik des dA nach Bild 37 (Automatenband und *pset*) für verschiedene Initialisierungen $(z_1(0), z_2(0))$.

Lösung:

Experiment 1.13

t	$z_1(t)$	$z_2(t) = y(t)$	$\frac{\ln d\,y(t)}{2^t}$
0	1.0	2.0	2.140066163496
			$+3.141592653590j$
1	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	1.733735254306
	$=1.5$	$=1.33333333333333333$	
2	$\frac{17}{12}$	$\frac{24}{17}$	1.762314085770
	$=1.41666666666666666$	$=1.41176470588235294$	
3	$\frac{577}{408}$	$\frac{816}{577}$	1.762746986311
	$=1.41421568627450980$	$=1.41421143847487002$	
4	$\frac{665857}{470832}$	$\frac{941664}{665857}$	1.762747174039
	$=1.41421356237468991$	$=1.41421356237150019$	
5	$\frac{886731088897}{627013566048}$	$\frac{1254027132096}{886731088897}$	1.762747174039
	$=1.41421356237309505$	$=1.41421356237309505$	
6	$\frac{1111984844349868137938112}{157258404803291863335321 7}$	$\frac{2223969688699736275876224}{157258404803291863335321 7}$	1.762747174039
	$=1.41421356237309505$	$=1.41421356237309505$	

Tabelle 24: Dynamik des dA nach Bild 37, Initialisierung: $z_1(0) = 1$, $z_2(0) = 2$

Tabelle 24 zeigt:

– $$\lim_{t\to\infty} z_1(t) = \lim_{t\to\infty} z_2(t) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \sqrt{2}\,. \tag{50.217}$$

– Die Berechnung von $y(t)$ konvergiert sehr schnell (ähnlich wie bei (A8), vgl. Aufgabe 9(a)), schon für $t = 7$ stimmen $z_1(t)$ und $z_2(t) = y(t)$ in 97 Stellen überein.
Der Differenzenquotient von $y(t)$ steigt mit größer werdendem t sehr stark an, die logarithmische Darstellung offenbart den Grenzwert

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln d\,y(t)}{2^t} = c(1,2) = 1.76274\,71740\,39086\,05046\,52186\,49959\ldots \tag{50.218}$$

und damit den asymptotischen Verlauf

$$d\,y(t) \approx \left(e^{c(1,2)}\right)^{2^t} \approx \left(d\,y(t-1)\right)^2\,. \tag{50.219}$$

– $$z_1(t)\cdot z_2(t) = z_1(0)\cdot z_2(0) = 2\,. \tag{50.220}$$

$z_2(t) = y(t)$ besitzt folgende rekursive Darstellungen:

$$* \; z_2(t+1) = \frac{f(t+1)}{((f(t))^2+1)}; \;\; t = 1,2,3,\ldots \tag{50.221}$$

mit

$$f(t+2) \;=\; 2\,f(t+1)\left((f(t))^2+1\right) \tag{50.222}$$

$$\;=\; 2^{t+3}\,3\prod_{i=1}^{t}\left((f(i))^2+1\right); \;\; t = 1,2,3,\ldots \tag{50.223}$$

$$f(1) = 4$$

$$f(2) = 24\,.$$

$$* \; z_2(t+1) = 2^{t+2}\,\frac{\prod_{i=1}^{t}\varphi(i)}{\varphi(t+1)} = \frac{\sqrt{\varphi(t+2)-1}}{\varphi(t+1)}; \;\; t = 1,2,3,\ldots \tag{50.224}$$

mit

$$\varphi(t+2) \;=\; \left(2^{t+2}\prod_{i=1}^{t}\varphi(i)\right)^2 + 1; \;\; t = 1,2,3,\ldots \tag{50.225}$$

$$\varphi(1) = 3$$

$$\varphi(2) = 17\,.$$

Experiment 1.14

t	$z_1(t)$	$z_2(t) = y(t)$	$\frac{\ln d\,y(t)}{2^t}$
0	1.0	3.0	1.945910149055
			$+3.141592653590j$
1	2.0	$\frac{3}{2}$	1.247634718412
		$=1.5$	
2	$\frac{7}{4}$	$\frac{12}{7}$	1.314387129219
	$=1.75$	$=1.71428571428571429$	
3	$\frac{97}{56}$	$\frac{168}{97}$	1.316951254084
	$=1.73214285714285714$	$=1.73195876288659794$	
4	$\frac{18817}{10864}$	$\frac{32592}{18817}$	1.316957896837
	$=1.73205081001472754$	$=1.73205080512302705$	
5	$\frac{708158977}{408855776}$	$\frac{1226567328}{708158977}$	1.316957896925
	$=1.73205080756887730$	$=1.73205080756887729$	
6	$\frac{1002978273411373057}{579069776145402304}$	$\frac{1737209328436206912}{1002978273411373057}$	1.316957896925
	$=1.73205080756887729$	$=1.73205080756887729$	

Tabelle 25: Dynamik des dA nach Bild 37, Initialisierung: $z_1(0) = 1$, $z_2(0) = 3$

Tabelle 25 läßt prinzipiell das gleiche Verhaltensmuster wie Tabelle 24 erkennen:

– $$\lim_{t\to\infty} z_1(t) = \lim_{t\to\infty} z_2(t) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \sqrt{3}\,. \tag{50.226}$$

– Auch hier konvergiert $y(t)$ sehr schnell, für $t = 7$ stimmen $z_1(t)$ und $z_2(t) = y(t)$ bereits in 72 gültigen Stellen überein.
Für den Differenzenquotienten erhält man

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln d\,y(t)}{2^t} = c(1,3) = 1.31695\,78969\,24816\,70862\,50463\,47307\,\ldots \tag{50.227}$$

$$d\,y(t) \approx \left(e^{c(1,3)}\right)^{2^t} \approx \left(d\,y(t-1)\right)^2\,. \tag{50.228}$$

– $$z_1(t)\cdot z_2(t) = z_1(0)\cdot z_2(0) = 3\,. \tag{50.229}$$

$z_2(t) = y(t)$ besitzt die folgende rekursive Darstellung:

$$z_2(t+1) = 2^{t+1}\,\frac{\prod_{i=1}^{t}\psi(i)}{\psi(t+1)};\quad t = 1,2,3,\ldots \tag{50.230}$$

mit

$$\begin{aligned}\psi(t+1) &= 2\left(\psi(t)\right)^2 - 1;\quad t = 2,3,4,\ldots \\ &\quad\ \psi(1) = 3 \\ &\quad\ \psi(2) = 7\,.\end{aligned} \tag{50.231}$$

(b) Verifizieren Sie die in (a) erhaltenen Formelausdrücke für $z_1(t)$ und $z_2(t) = y(t)$.

(c) Geben Sie darauf basierend allgemeine Formelausdrücke für $\lim_{t\to\infty} y(t)$, $z_1(t)$, $z_2(t) = y(t)$ und $d\,y(t)$ des dA nach Bild 37 in Abhängigkeit von der Initialisierung $(z_1(0), z_2(0))$ an.

Lösungshinweis:

– $$\lim_{t\to\infty} y(t) = \sqrt{z_1(0)\,z_2(0)} = g(z_1(0), z_2(0))\,, \tag{50.232}$$

d.h. der dA nach Bild 37 berechnet das geometrische Mittel der Initialisierung $z_1(0)$ und $z_2(0)$.

– Die Berechnung von $y(t)$ konvergiert sehr schnell, für $d\,y(t)$ gilt asymptotisch

$$d\,y(t) \approx \left(e^{c(z_1(0),z_2(0))}\right)^{2^t} \approx \left(d\,y(t-1)\right)^2 \tag{50.233}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln d\,y(t)}{2^t} = c(z_1(0), z_2(0))\,. \tag{50.234}$$

(d) Interpretieren Sie die Funktion $c(z_1(0), z_2(0))$, stützen Sie sich dabei auf die Zahlenwerte für $c(1,2)$ – Gl. (50.218) und $c(1,3)$ – Gl. (50.227) sowie auf Bild 41.

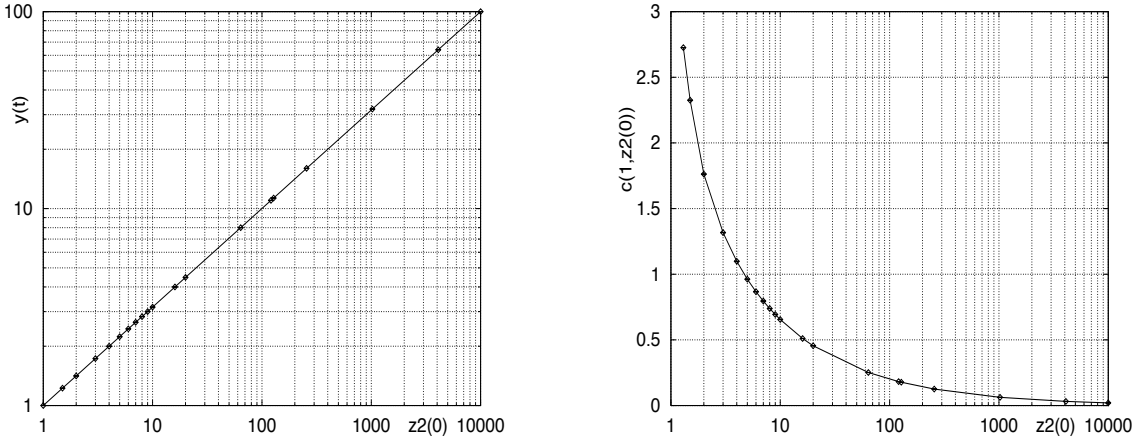


Bild 41: Werteverlauf der Funktionen $\lim_{t\to\infty} y(t) = \sqrt{z_2(0)}$ und $c(1, z_2(0))$; $z_1(0) = 1$, $z_2(0) \in \mathbb{R}\,[1, 10000]$ □

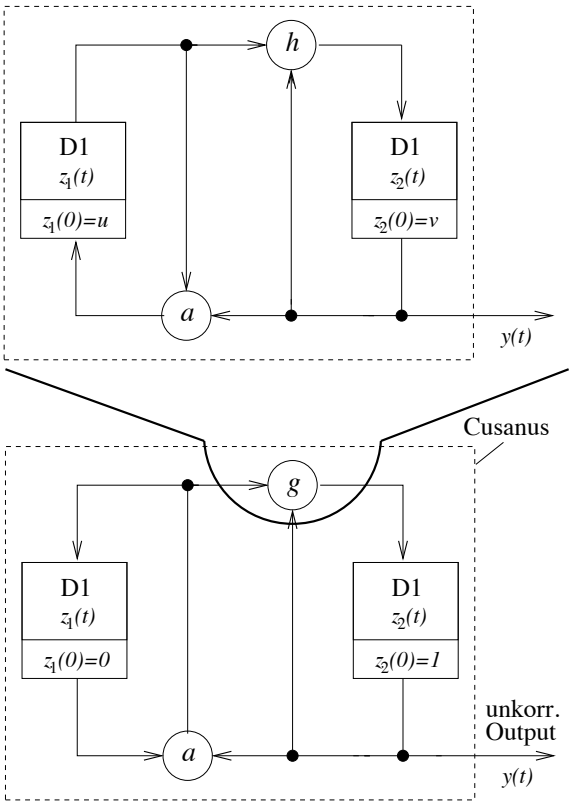
Aufgabe 25

(a) Der dA nach Bild 37 realisiert die schnelle Berechnung des geometrischen Mittels durch wiederholte gestaffelte Berechnung des arithmetischen und harmonischen Mittels. Die Idee liegt nahe, diesen g–Automaten anstelle des Verknüpfungselementes g (und damit der numerisch aufwendigen Wurzelberechnung) in den dA Cusanus Bild 26 zu implantieren (Bild 42).

Entwerfen Sie entsprechende Hybridschaltungen und untersuchen Sie experimentell deren Leistungsfähigkeit (erreichbare Genauigkeit, Konvergenzverhalten).

Lösung 1:

(g) im dA Cusanus wird durch „statische Näherungen“ substituiert, die einem bzw. zwei Takten des g–Automaten entsprechen: Bild 43.



$$z_1(t+1) = a(z_1(t), z_2(t))$$

$$z_2(t+1) = h(z_1(t), z_2(t))$$

$$y(t) = z_2(t)$$

$$\lim_{t\to\infty} z_1(t) = \lim_{t\to\infty} z_2(t) =$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = g(u, v)$$

$$z_1(t+1) = a(z_1(t), z_2(t))$$

$$z_2(t+1) = g(a(z_1(t), z_2(t)), z_2(t))$$

$$y(t) = z_2(t)$$

$$\lim_{t\to\infty} z_1(t) = \lim_{t\to\infty} z_2(t) =$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{2}{\pi}$$

Bild 42: Implantieren des g–Automaten (Bild 37) in den dA Cusanus (Bild 26)

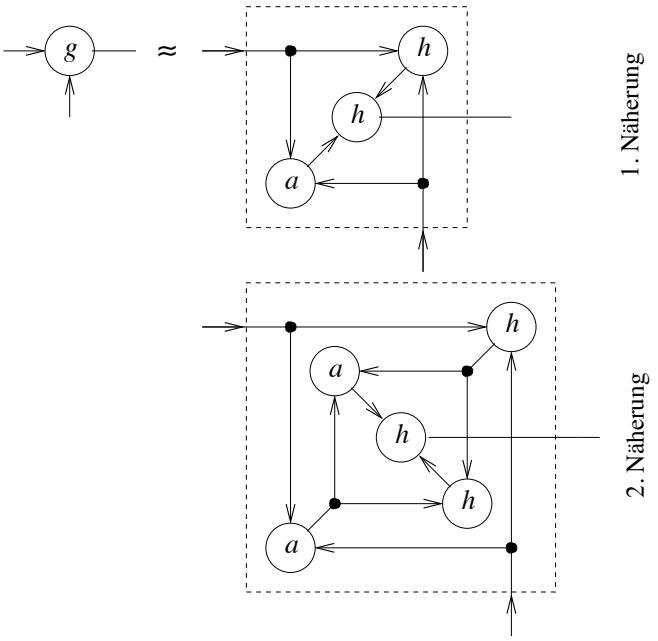


Bild 43: Substitution von (g) durch statische Näherungen

Experiment 1.15

t	$z_1(t)$	$z_2(t)$	$y(t)$	$d\,y(t)$
0	0.0	1.0	0.635294117647	96.542215577179
1	0.5	0.705882352941	0.635811058842	69.614861048990
2	0.602941176471	0.652381360320	0.635816413403	65.298565413350
3	0.627661268395	0.639901943935	0.635816490320	64.318607312830
4	0.633781606165	0.636834422563	0.635816491498	64.079282400168
5	0.635308014364	0.636070760590	0.635816491516	64.019797628591
6	0.635689387477	0.635880045442	0.635816491516	

Tabelle 26: erste Näherung für $\left(g\right)$ und äußere Beschaltung nach Bild 28, Initialisierung: $z_1(0) = 0$, $z_2(0) = 1$

Experiment 1.16

t	$z_1(t)$	$z_2(t)$	$y(t)$	$d\,y(t)$
0	0.0	1.0	0.636164067013	84.986685532895
1	0.5	0.707105719237	0.636613707996	68.194632703876
2	0.603552859619	0.653280704512	0.636618998719	64.998709838665
3	0.628416782066	0.640728146811	0.636619076301	64.246739393894
4	0.634572464438	0.637642877445	0.636619077495	64.061503911952
5	0.636107670942	0.636874811611	0.636619077514	64.015364710879
6	0.636491241276	0.636682997558	0.636619077514	

Tabelle 27: zweite Näherung für $\left(g\right)$ und äußere Beschaltung nach Bild 28, Initialisierung: $z_1(0) = 0$, $z_2(0) = 1$

Diskussion

- Die erste Näherung für $\left(g\right)$ im dA Cusanus mit äußerer Beschaltung nach Bild 28 liefert bei guter Konvergenz für $\frac{2}{\pi}$ nur zwei gültige Nachkommastellen, ist also praktisch unbrauchbar.
- Demgegenüber werden mit der zweiten Näherung bei gleich guter Konvergenz nach dem dritten Takt bereits 6 gültige Nachkommastellen berechnet!
  Außerdem erhält man wie beim dA Cusanus

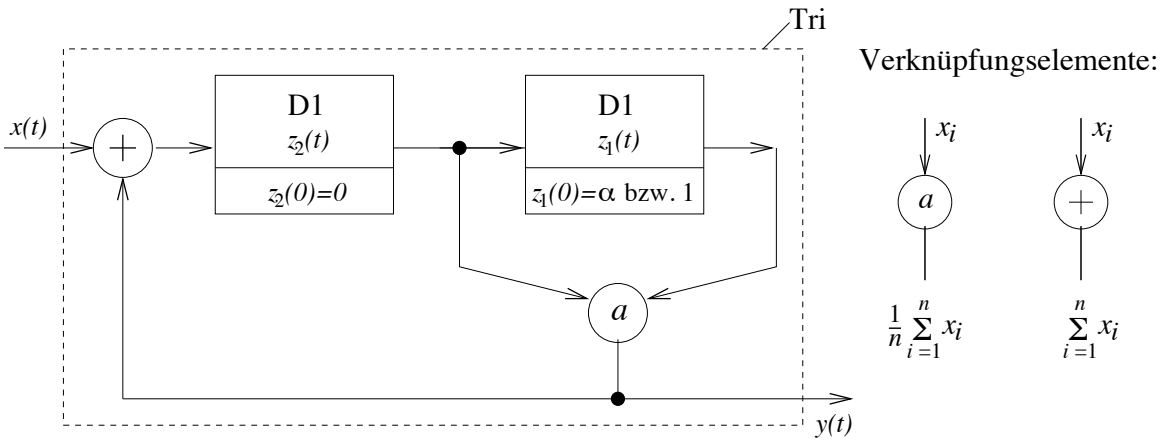
  $$\frac{z_1(t)}{z_2(t)} \approx \cos\left(2^t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \tag{50.235}$$

  mit 5 bzw. 6 gültigen Nachkommastellen.
- Es lohnt sich also, die 3. Näherung zu untersuchen! □

50.3.6 Automateneinbettung des Algorithmus zur Dreiteilung eines Winkels (A10) und seiner Verallgemeinerungen (A11) bis (A16)

50.3.6.1 Der dA Tri

Die Automateneinbettung des Algorithmus zur näherungsweisen Dreiteilung eines beliebigen Winkels α (A10) und seiner Verallgemeinerungen (A11) bis (A16) führt wie die der π–Algorithmen (A2), (A3) und (A5) sowie des agm–Algorithmus (A8) und seiner $a-h-$Modifikation (A9) primär zu Generatorautomaten. In Tabelle 28 ist die (Ai)–dA–Zuordnung prototypisch für (A10) angegeben, Bild 44 zeigt den erhaltenen dA Tri in einer möglichen Konfiguration mit hinzugenommener Eingangsgröße.



$$z_1(t+1) = z_2(t)$$

$$z_2(t+1) = x(t) + a(z_1(t), z_2(t))$$

$$y(t) = a(z_1(t), z_2(t))$$

$$\lim_{t\to\infty} z_1(t) = \lim_{t\to\infty} z_2(t) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{\alpha}{3} \text{ bzw. } \frac{1}{3} \text{ für } x(t) = 0$$

Bild 44: Automateneinbettung von (A10) mit hinzugenommener Eingangsgröße, dA Tri

Aufgabe 26

(a) Untersuchen Sie experimentell die Dynamik des dA Tri für
- $x(t) = 0$, $z_1(0) = 1$, $z_2(0) = 0$
- $x(t) = 0$, andere Initialisierungen $(z_1(0), z_2(0))$
- $x(t) = 1$, $z_1(0) = 1$, $z_2(0) = 0$
- andere charakteristische Eingaben, beliebige Initialisierungen $(z_1(0), z_2(0))$.

(A10)	t	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_1(0) = \alpha$ bzw. 1	$x_2(0) = 0$	$x_1(t+1) = x_2(t)$ $x_2(t+1) = a(x_1(t), x_2(t))$	$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = \lim_{t\to\infty} x_2(t) =$ $\frac{\alpha}{3}$ bzw. $\frac{1}{3}$
dA $(X, Y, Z, R, S, z(0))$	t	$z_1(t)$	$z_2(t)$	$z_1(0) = \alpha$ bzw. 1	$z_2(0) = 0$	$z_1(t+1) = z_2(t)$ $z_2(t+1) = a(z_1(t), z_2(t))$ $y(t) = a(z_1(t), z_2(t))$	$\lim_{t\to\infty} z_1(t) = \frac{\alpha}{3}$ bzw. $\frac{1}{3}$ $\lim_{t\to\infty} z_2(t) = \frac{\alpha}{3}$ bzw. $\frac{1}{3}$ $\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{\alpha}{3}$ bzw. $\frac{1}{3}$

Tabelle 28: Automateneinbettung von (A10)

Lösung:

Experiment 1.17

t	0	1	2	3	4	5	...
$x(t)$	0	0	0	0	0		...
$z_1(t)$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{16}$	...
$z_2(t)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{11}{32}$	...
$y(t)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{11}{32}$		...
$d\,y(t)$	-2	-2	-2	-2	-2		...

Tabelle 29: Dynamik des dA nach Bild 44; $x(t) = 0$, $z_1(0) = 1$, $z_2(0) = 0$

(b) Tabelle 29 zeigt: Die Folge der $y(t)$ konvergiert oszillierend und langsam. Untersuchen Sie Möglichkeiten zur Verbesserung des Konvergenzverhaltens des dA Tri.

Lösung 1:

– Die Formeldarstellung der Folgezustandsabbildung des dA Tri für $x(t) = 0$ (vgl. Bild 44)

$$z_1(t+1) = z_2(t) \tag{50.236}$$

$$z_2(t+1) = a(z_1(t), z_2(t)) = \frac{1}{2}\, z_1(t) + \frac{1}{2}\, z_2(t) \tag{50.237}$$

läßt sich wie folgt in Matrizenschreibweise notieren:

$$\begin{pmatrix} z_1(t+1) \\ z_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \underline{A} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}, \tag{50.238}$$

es ist also

$$\begin{pmatrix} z_1(t+2) \\ z_2(t+2) \end{pmatrix} = \underline{A} \begin{pmatrix} z_1(t+1) \\ z_2(t+1) \end{pmatrix} = \underline{A}^2 \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} \tag{50.239}$$

und allgemein

$$\begin{pmatrix} z_1(t+1+k) \\ z_2(t+1+k) \end{pmatrix} = \underline{A}^{k+1} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} \tag{50.240}$$

mit

$$\underline{A}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \; \underline{A}^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}, \; \underline{A}^4 = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{16} & \frac{11}{16} \end{pmatrix}, \; \ldots . \tag{50.241}$$

– Eine lineare Konvergenzbeschleunigung läßt sich mit einem dA realisieren, der nach einem Takt den Output liefert, den der dA Tri nach $(k+1)$ Takten erzeugt, für den also gilt

$$\left.\begin{pmatrix} z_1(t+1) \\ z_2(t+1) \end{pmatrix}\right|_{\text{dA?}} = \left.\begin{pmatrix} z_1(t+1+k) \\ z_2(t+1+k) \end{pmatrix}\right|_{\text{dA Tri}} = \underline{A}^{k+1} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}. \qquad (50.242)$$

– Die Konstruktion des dA? soll zunächst für den Fall $k = 1$ betrachtet werden. Für diesen Automaten gilt dann

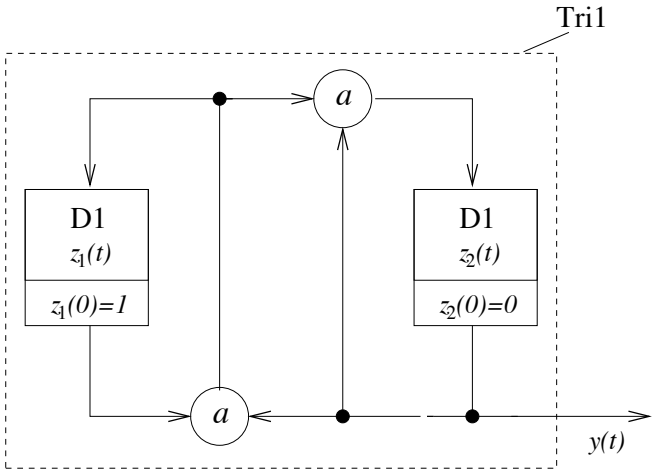
$$z_1(t+1) = \frac{1}{2} z_1(t) + \frac{1}{2} z_2(t) = \frac{1}{2} (z_1(t) + z_2(t)) = a(z_1(t), z_2(t)) \qquad (50.243)$$

$$z_2(t+1) = \frac{1}{4} z_1(t) + \frac{3}{4} z_2(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (z_1(t) + z_2(t)) + z_2(t) \right)$$
$$= a(a(z_1(t), z_2(t)), z_2(t)) \,. \qquad (50.244)$$

Das sind aber mit der Festsetzung

$$y(t) = z_2(t) \qquad (50.245)$$

genau Folgezustands– und Ergebnisabbildung des dA nach Bild 33, der in Abschn. 50.3.4.2 durch die Substitution $g \to a$ aus dem dA Cusanus erhalten wurde! Man hat also für die erste Beschleunigungsstufe $k = 1$ des dA Tri den Realisierungsautomaten Tri1 (Bild 45).



$$z_1(t+1) = a(z_1(t), z_2(t))$$
$$z_2(t+1) = a(a(z_1(t), z_2(t)), z_2(t))$$
$$y(t) = z_2(t)$$
$$\lim_{t\to\infty} z_1(t) = \lim_{t\to\infty} z_2(t) =$$
$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{1}{3}$$

Bild 45: Konvergenzbeschleunigung, dA Tri1

– Für $k = 2$ ist dann

$$z_1(t+1) = \frac{1}{4} z_1(t) + \frac{3}{4} z_2(t) = a(a(z_1(t), z_2(t)), z_2(t)) \qquad (50.246)$$

$$z_2(t+1) = \frac{3}{8} z_1(t) + \frac{5}{8} z_2(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (z_1(t) + z_2(t)) + z_2(t) \right) + \frac{1}{2} (z_1(t) + z_2(t)) \right)$$
$$= a(a(a(z_1(t), z_2(t)), z_2(t)), a(z_1(t), z_2(t))) \,. \qquad (50.247)$$

Der zugehörige Realisierungsautomat Tri2 ist im Bild 46 dargestellt, Bild 47 zeigt den nachfolgenden Tri3.

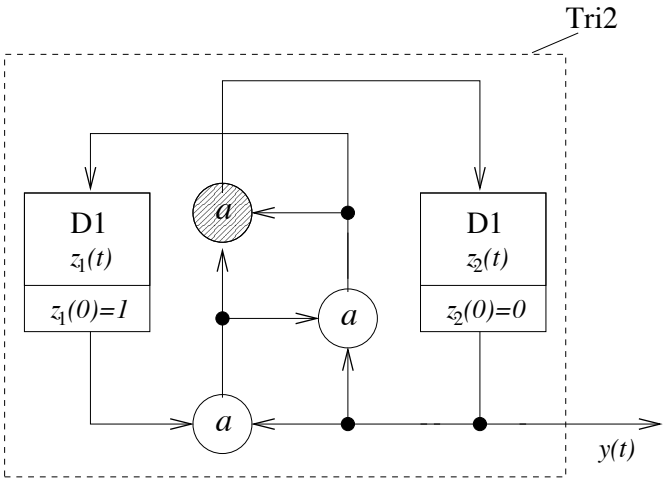


Bild 46: Konvergenzbeschleunigung, dA Tri2

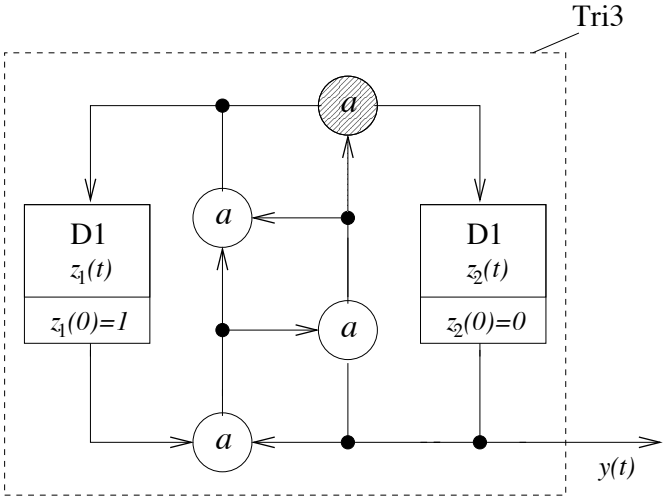


Bild 47: Konvergenzbeschleunigung, dA Tri3

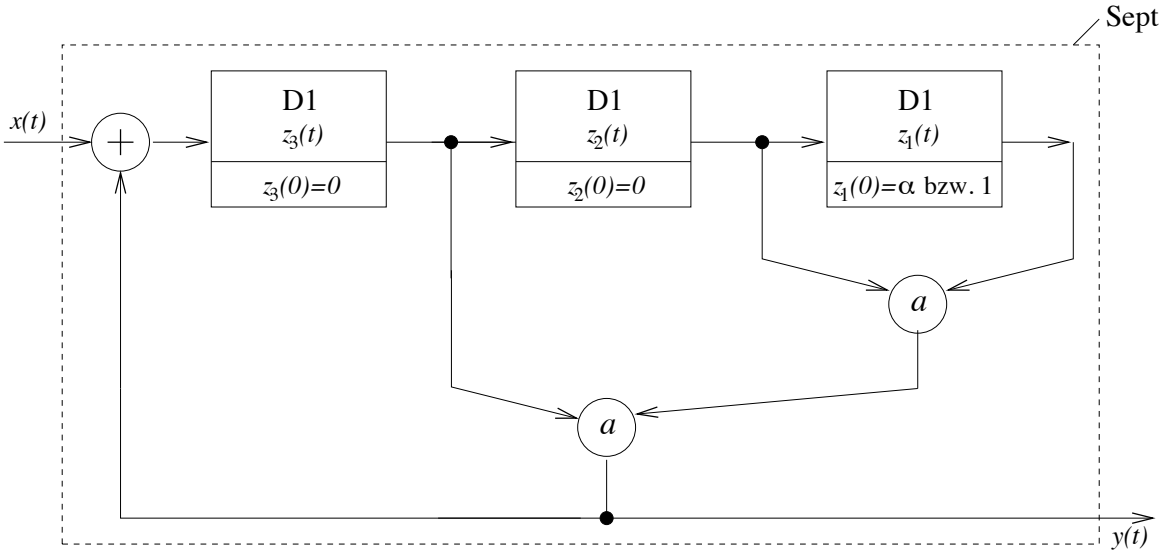
(c) Vergleichen Sie experimentell die Leistungsfähigkeit der in (b) konstruierten Schaltungen zur Konvergenzbeschleunigung des dA Tri.

(d) – Substituieren Sie in Bild 46 und in Bild 47 (a) durch (g) und untersuchen Sie experimentell die jeweiligen Verläufe von $y(t)$. Diskutieren Sie das Ergebnis.

– Geben Sie jeweils allgemeine Formelausdrücke für $\lim_{t\to\infty} y(t)$ in Abhängigkeit von $z_1(0)$ und $z_2(0)$ an. □

50.3.6.2 Der dA Sept

Die Automateneinbettung des Algorithmus (A15) zur näherungsweisen Siebenteilung eines beliebigen Winkels α bzw. von 1 durch fortlaufende strukturierte Mittelwertbildung ergibt den dA Sept (im Bild 48 mit hinzugenommener Eingangsgröße).



$$z_1(t+1) = z_2(t)$$

$$z_2(t+1) = z_3(t)$$

$$z_3(t+1) = x(t) + a(a(z_1(t), z_2(t)), z_3(t))$$

$$y(t) = a(a(z_1(t), z_2(t)), z_3(t))$$

$$\lim_{t\to\infty} z_1(t) = \lim_{t\to\infty} z_2(t) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{\alpha}{7} \text{ bzw. } \frac{1}{7} \text{ für } x(t) = 0$$

Bild 48: Automateneinbettung von (A15) mit hinzugenommener Eingangsgröße, dA Sept

Aufgabe 27

(a) Bearbeiten Sie die Fragestellungen von Aufgabe 26(a) für den dA Sept.

(b) Untersuchen Sie in Analogie zu Aufgabe 26(b) Möglichkeiten zur Verbesserung des Konvergenzverhaltens des dA Sept.

Lösung 1:

– Auch hier läßt sich die Formeldarstellung der Folgezustandsabbildung für $x(t) = 0$ (vgl. Bild 47)

$$z_1(t+1) = z_2(t) \tag{50.248}$$
$$z_2(t+1) = z_3(t) \tag{50.249}$$
$$z_3(t+1) = a(a(z_1(t), z_2(t)), z_3(t)) = \frac{1}{4}\, z_1(t) + \frac{1}{4}\, z_2(t) + \frac{1}{2}\, z_3(t) \tag{50.250}$$

sofort in Matrizenform notieren:

$$\begin{pmatrix} z_1(t+1) \\ z_2(t+1) \\ z_3(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} = \underline{A} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix}. \tag{50.251}$$

Über $(k+1)$ Takte gilt dann der Zusammenhang

$$\begin{pmatrix} z_1(t+1+k) \\ z_2(t+1+k) \\ z_3(t+1+k) \end{pmatrix} = \underline{A}^{k+1} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix}. \tag{50.252}$$

Hierbei ist

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ \underline{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ \underline{A}^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}, \ldots. \tag{50.253}$$

– Damit läßt sich ein dA angeben, der nach einem Takt den Output liefert, den der dA Sept nach 3 Takten erzeugt:

$$\begin{pmatrix} z_1(t+1) \\ z_2(t+1) \\ z_3(t+1) \end{pmatrix}_{|\,\text{dA?}} = \begin{pmatrix} z_1(t+3) \\ z_2(t+3) \\ z_3(t+3) \end{pmatrix}_{|\,\text{dA Sept}} = \underline{A}^3 \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix}; \tag{50.254}$$

in Komponentenschreibweise gilt für den dA?

$$z_1(t+1) = \frac{1}{4}\, z_1(t) + \frac{1}{4}\, z_2(t) + \frac{1}{2}\, z_3(t) \tag{50.255}$$
$$z_2(t+1) = \frac{1}{8}\, z_1(t) + \frac{3}{8}\, z_2(t) + \frac{1}{2}\, z_3(t) \tag{50.256}$$
$$z_3(t+1) = \frac{1}{8}\, z_1(t) + \frac{1}{4}\, z_2(t) + \frac{5}{8}\, z_3(t)\,. \tag{50.257}$$

Mit

$$z_1(0) = 1,\ z_2(0) = z_3(0) = 0 \tag{50.258}$$

folgt aus den Gln. (50.255)–(50.257) sofort

$$z_2(t) = z_3(t) \tag{50.259}$$

und man erhält für die Folgezustandsabbildung das reduzierte Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} z_1(t+1) \\ z_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \\ \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \underline{B} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}, \tag{50.260}$$

das sich in Analogie zum dA Tri weiter in beliebiger Stufe l beschleunigen läßt:

$$\begin{pmatrix} z_1(t+1) \\ z_2(t+1) \end{pmatrix}_{|\,\mathrm{dA??}} = \underline{B}^{l+1} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}, \tag{50.261}$$

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \\ \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix}, \; \underline{B}^2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{32} & \frac{27}{32} \\ \\ \frac{9}{64} & \frac{55}{64} \end{pmatrix}, \; \ldots . \tag{50.262}$$

– Auch hier soll die Konstruktion eines zugehörigen dA?? zunächst für $l = 1$ erfolgen. Es ist dann

$$\begin{aligned} z_1(t+1) = \frac{1}{4}\, z_1(t) + \frac{3}{4}\, z_2(t) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(z_1(t) + z_2(t)) + z_2(t)\right) \\ &= a(a(z_1(t), z_2(t)), z_2(t)) \end{aligned} \tag{50.263}$$

$$\begin{aligned} z_2(t+1) = \frac{1}{8}\, z_1(t) + \frac{7}{8}\, z_2(t) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(z_1(t) + z_2(t)) + z_2(t)\right) + z_2(t)\right) \\ &= a(a(a(z_1(t), z_2(t)), z_2(t)), z_2(t)) \end{aligned} \tag{50.264}$$

Bild 49 zeigt den Realisierungsautomaten Sept1'.

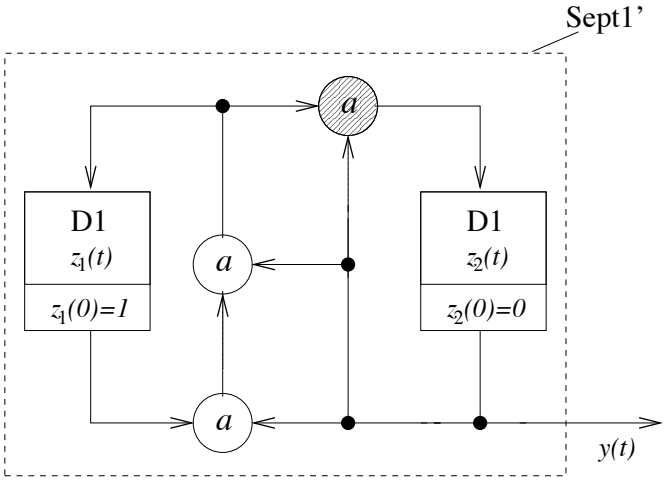


Bild 49: Konvergenzbeschleunigung, dA Sept1'

Der nachstehende dA Sept2' (Bild 50) realisiert die Beschleunigungsstufe $l = 2$.

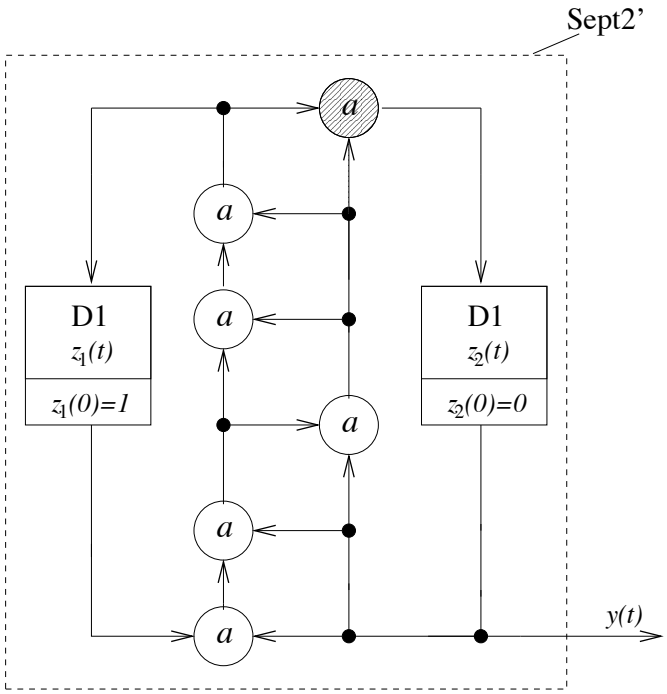


Bild 50: Konvergenzbeschleunigung, dA Sept2'

(c) Vergleichen Sie experimentell die Leistungsfähigkeit der in (b) konstruierten Schaltungen zur Konvergenzbeschleunigung des dA Sept.

Lösung:

Experiment 1.18

t	$z_1(t)$	$z_2(t) = y(t)$	$d\,y(t)$
0	1.0	0.0	8.0
1	0.25	0.125	8.0
2	0.15625	0.140625	8.0
3	0.14453125	0.142578125	8.0
4	0.14306640625	0.142822265625	8.0
5	0.142883300781	0.142852783203	8.0
6	0.142860412598	0.1428565979	8.0
7	0.142857551575	0.142857074738	8.0

Tabelle 30: Dynamik des dA Sept1'

Experiment 1.19

t	$z_1(t)$	$z_2(t) = y(t)$	$d\,y(t)$
0	1.0	0.0	64.0
1	0.15625	0.140625	64.0
2	0.14306640625	0.142822265625	64.0
3	0.142860412598	0.1428565979	64.0
4	0.142857193947	0.142857134342	64.0
5	0.142857143655	0.142857142724	64.0
6	0.14285714287	0.142857142855	64.0
7	0.142857142857	0.142857142857	64.0

Tabelle 31: Dynamik des dA Sept2'

(d) Bearbeiten Sie die Fragestellung der Aufgabe 26(d) für die dA Sept1' und Sept2'.

Lösungshinweis:

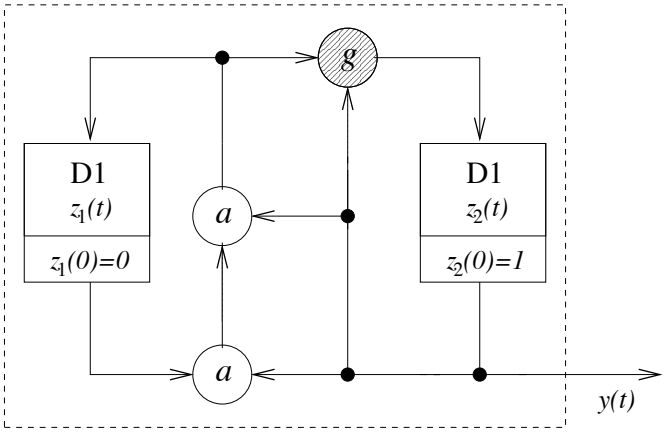


Bild 51: Zu Aufgabe 26(d), Substitution $a \to g$ in Bild 49

Man erhält für den dA nach Bild 51

$$\frac{z_1(t)}{z_2(t)} = \frac{z_2(t)}{z_2(t-1)} = \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{3+\frac{1}{2}\sqrt{3+\frac{1}{2}\sqrt{3+\ldots+\frac{1}{2}\sqrt{3}}}}}_{\substack{t\text{–fach geschachtelte Kettenwurzel} \\ t\text{–mal Radikand 3; } t=1,2,3,\ldots}} \tag{50.265}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\ldots+\sqrt{12}}}} \tag{50.266}$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \prod_{t=1}^{\infty}\left(\frac{z_1(t)}{z_2(t)}\right) = 0.84934\,28175\,83135\,\ldots\,. \tag{50.267}$$

Zum Vergleich:

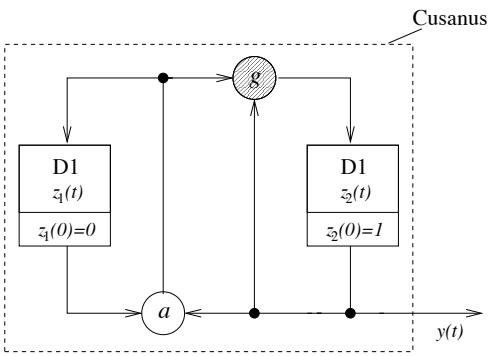
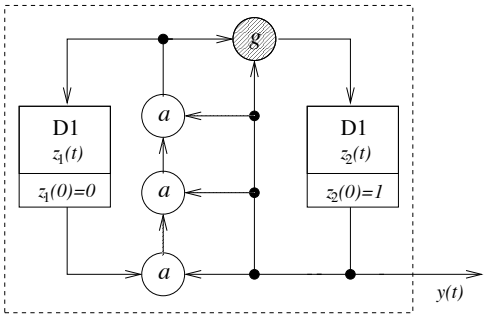
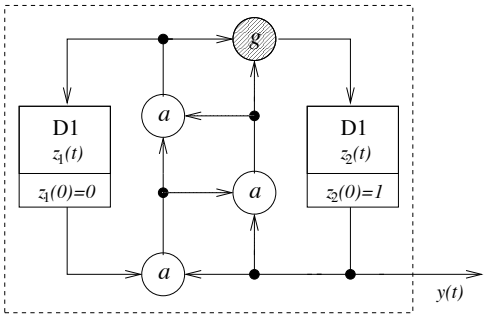
Für die dA	ist
	$\frac{z_1(t)}{z_2(t)} = \frac{z_2(t)}{z_2(t-1)} =$ $\frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{t\text{–fach geschachtelte Kettenwurzel}} = \cos\left(\frac{1}{2^t}\,\frac{\pi}{2}\right)$ t–mal Radikand 2; t=1,2,3,... $y(\infty) = 0.63661\,97723\,67581\,\ldots = \frac{2}{\pi}$
	$\frac{z_1(t)}{z_2(t)} = \frac{z_2(t)}{z_2(t-1)} =$ $\frac{1}{8}\underbrace{\sqrt{56+\sqrt{56+\sqrt{56+\ldots+\sqrt{56}}}}}_{t\text{–fach geschachtelte Kettenwurzel}} =?$ t–mal Radikand 56; t=1,2,3,... $y(\infty) = 0.93137\,95539\,84150\,\ldots =?$
	$\frac{z_1(t)}{z_2(t)} =?$ $\frac{z_2(t)}{z_2(t-1)} =?$ $y(\infty) = 0.66476\,18136\,49466\,\ldots =?$

Tabelle 32: Untersuchung von $y(t)$ bei Substitution $a \to g$, $z(0) = (0, 1)$ □

Aufgabe 28

Untersuchen Sie nun mit den Fragestellungen der Aufgaben 26 und 27 die Automateneinbettung des Algorithmus (A16) sowie seiner in Aufgabe 13 behandelten Spezialfälle. □

Aufgabe 29

Diskutieren Sie die drei klassischen Konstruktionsprobleme der antiken Mathematik

– Quadratur bzw. Rektifikation des Kreises

– Dreiteilung eines beliebigen Winkels

– Würfelverdoppelung (Delisches Problem)

mit Blick auf die drei gleichartig aufgebauten dA Cusanus, Tri1 und Delos (Bild 52).

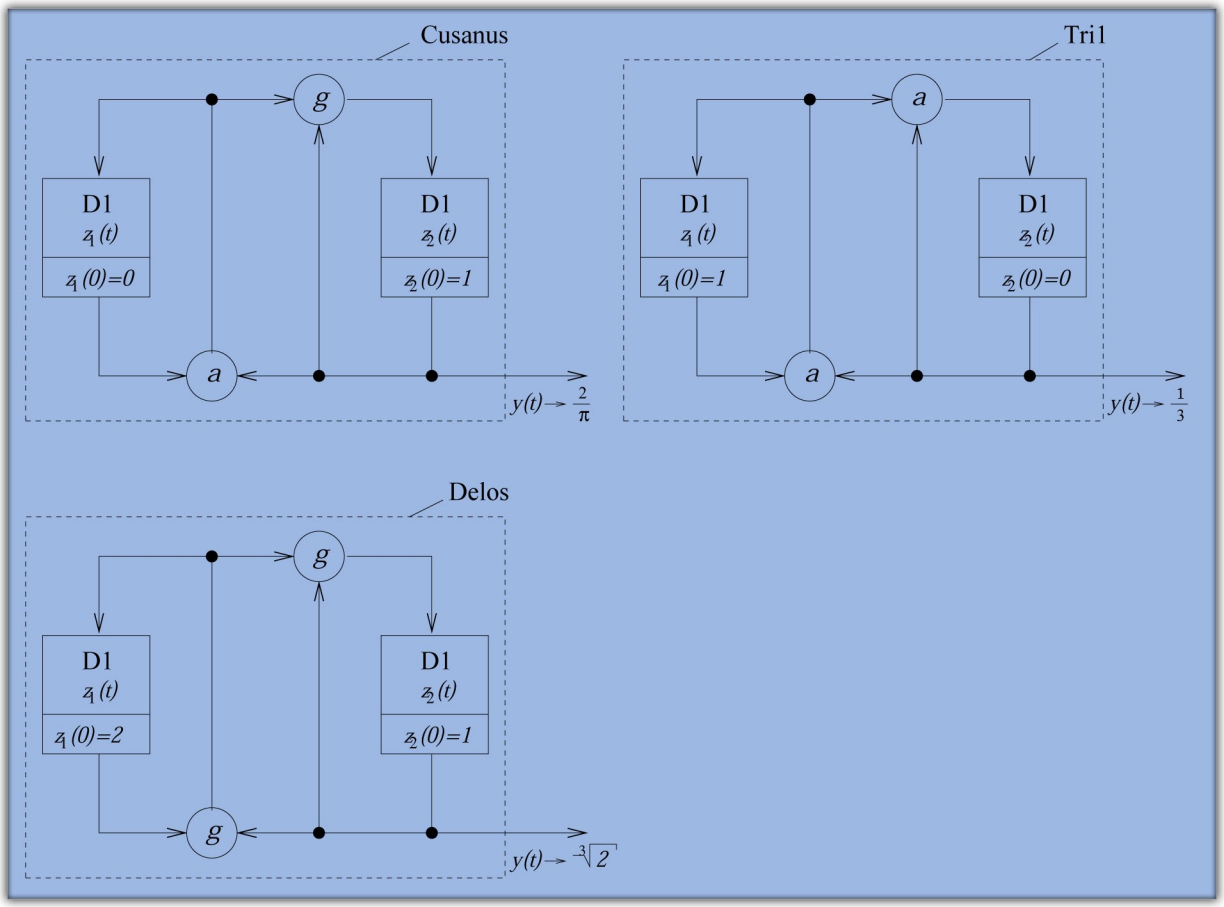
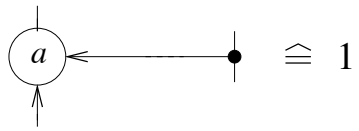


Bild 52: Klassische antike Konstruktionsprobleme und dA vom Cusanus–Typ

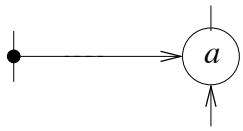
Lesen Sie hierzu [28, 36, 37, 39, 40, 41]. □

50.3.6.3 Eine Verallgemeinerung

Die in den Aufgaben 26 und 27 betrachteten Schaltungen zur Konvergenzbeschleunigung für die dA Tri und Sept (Bilder 45, 46, 47, 49 und 50) besitzen alle die gleiche Grundstruktur: Zwei Verzögerungselemente erster Ordnung (D1) arbeiten auf eine kettenförmige Anordnung (Verknüpfungskette) aus zwei Elementen



$$\widehat{=}\ 1 \tag{50.268}$$



$$\widehat{=}\ 0 \tag{50.269}$$

deren Abfolge ($\widehat{=}$ binäres Verknüpfungswort w) zusammen mit den Abgriffen ($\widehat{=}$ u bzw. v) und der binären Initialisierung der D1

$$(z_1(0), z_2(0)) \in \{(0,1),(1,0)\} \tag{50.270}$$

den Output

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{A}{B};\ A, B \in \mathbb{N};\ A < B \tag{50.271}$$

bestimmen: Bild 53.

Das Startelement ($\widehat{=}$ Startzeichen) ist wie in Bild 51 angegeben mit 1 festgelegt.

Der / des	linken D1 liegt am	rechten D1 liegt am
obere Abgriff	Verzweigungsknoten • eines höher gelegenen Elementes.	Verknüpfungsknoten (a) eines höher gelegenen Elementes.
untere Zugang	(a) des Startelementes.	• des Startelementes.

Hierbei sind die Endkonfigurationen Bild 51 und Bild 45 möglich.

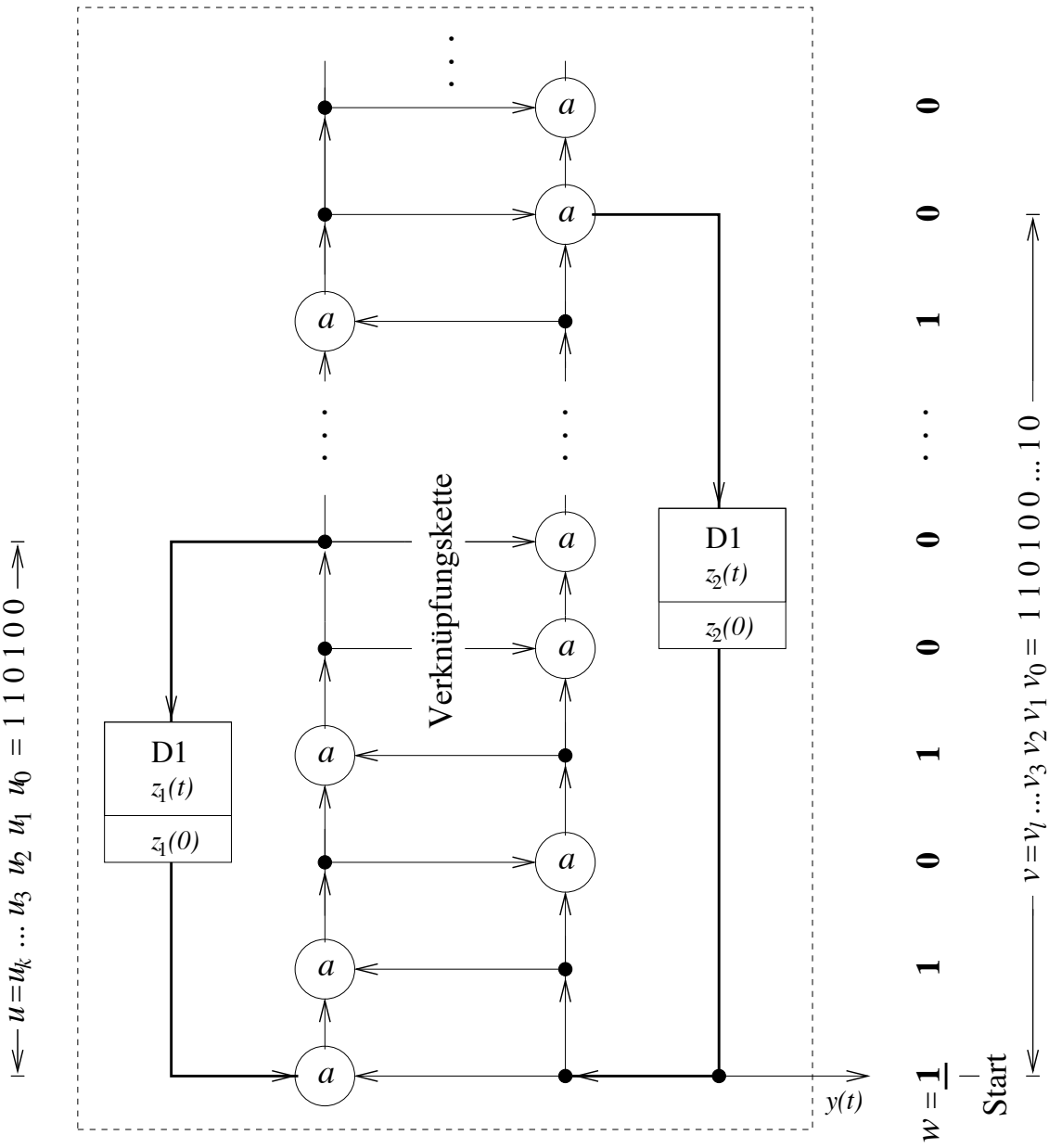


Bild 53: Grundstruktur der dA zur Konvergenzbeschleunigung, Beispiel

Aufgabe 30

(a) Untersuchen Sie für den Spezialfall $u = v$ experimentell den Zusammenhang zwischen $\frac{A}{B}$ und v bei der Initialisierung $(z_1(0), z_2(0))$.

Lösung:

Experiment 1.20

$u = v;\ k = l = 3:$								
$v =$	v_3	v_2	v_1	v_0	v_{dez}	$\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \frac{A}{B}$ für $(z_1(0), z_2(0)) = (0,1)$	$\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \frac{A}{B}$ für $(z_1(0), z_2(0)) = (1,0)$	$\lim\limits_{t\to\infty} d\,y(t)$
	1	0	0	0	8	$\frac{8}{15}$	$\frac{7}{15}$	16
	1	0	0	1	9	$\frac{10}{17}$	$\frac{7}{17}$	-16
	1	0	1	0	10	$\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$	$\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$	16
	1	0	1	1	11	$\frac{12}{17}$	$\frac{5}{17}$	-16
	1	1	0	0	12	$\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$	$\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$	16
	1	1	0	1	13	$\frac{14}{17}$	$\frac{3}{17}$	-16
	1	1	1	0	14	$\frac{14}{15}$	$\frac{1}{15}$	16
	1	1	1	1	15	$\frac{16}{17}$	$\frac{1}{17}$	-16

Tabelle 33: Zusammenhang zwischen $\frac{A}{B}$ und v bei Initialisierung $(z_1(0), z_2(0))$

(b) Geben Sie auf Grundlage Ihrer experimentellen Ergebnisse für diesen Zusammenhang einen Formelausdruck an.

Lösungshinweis:

Verhaltensweise und Output des dA nach Bild 53 lassen sich wie folgt aus v und $(z_1(0), z_2(0))$ bestimmen:

$$\begin{pmatrix} z_1(t+1) \\ \\ z_2(t+1) \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{l+1}} \begin{pmatrix} 2^{l+1} - (v_{dez} + v_0) & v_{dez} + v_0 \\ \\ 2^{l+1} - (v_{dez} + 1 - v_0) & v_{dez} + 1 - v_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \\ z_2(t) \end{pmatrix} \quad (50.272)$$

$$y(t) = z_2(t) \quad (50.273)$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{A}{B} = \begin{cases} \frac{v_{dez}+v_0}{2^{l+1}-1+2\,v_0} \\ \\ \frac{2^{l+1}-(v_{dez}+1-v_0)}{2^{l+1}-1+2\,v_0} \end{cases} \text{ für } (z_1(0), z_2(0)) = \begin{cases} (0,1) \\ \\ (1,0) \end{cases}. \quad (50.274)$$

(c) Untersuchen Sie die Umkehrung von Gl. (50.274):

Gegeben: A, B

Gesucht: Realisierungsautomat nach Bild 53 mit $u = v$ und Initialisierung $(z_1(0), z_2(0))$.

(d) Bearbeiten Sie nun die Fragestellungen (a) und (b) für den allgemeinen Fall $u \neq v$.

Lösungshinweis:

Für die Verhaltensweise und den Output des dA nach Bild 53 in Abhängigkeit von u, v und $(z_1(0), z_2(0))$ erhält man bei

$\boxed{u \leq v}$

$$\begin{pmatrix} z_1(t+1) \\ \\ z_2(t+1) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2^{l+1}} \begin{pmatrix} 2^{l+1} - (u_{dez} + u_0)\, 2^{l-k} & (u_{dez} + u_0)\, 2^{l-k} \\ \\ 2^{l+1} - (v_{dez} + 1 - v_0) & v_{dez} + 1 - v_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \\ z_2(t) \end{pmatrix} \quad (50.275)$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{A}{B} = \begin{cases} \frac{(u_{dez}+u_0)\, 2^{l-k}}{2^{l+1}-(v_{dez}+1-v_0)+(u_{dez}+u_0)\, 2^{l-k}} \\ \\ \frac{2^{l+1}-(v_{dez}+1-v_0)}{2^{l+1}-(v_{dez}+1-v_0)+(u_{dez}+u_0)\, 2^{l-k}} \end{cases} \text{ für } (z_1(0), z_2(0)) = \begin{cases} (0,1) \\ \\ (1,0) \end{cases} \quad (50.276)$$

und bei

$\boxed{u \geq v}$

$$\begin{pmatrix} z_1(t+1) \\ \\ z_2(t+1) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2^{k+1}} \begin{pmatrix} 2^{k+1} - (u_{dez} + u_0) & (u_{dez} + u_0) \\ \\ 2^{k+1} - (v_{dez} + 1 - v_0)\, 2^{k-l} & (v_{dez} + 1 - v_0)\, 2^{k-l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \\ z_2(t) \end{pmatrix} \quad (50.277)$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{A}{B} = \begin{cases} \frac{(u_{dez}+u_0)}{2^{k+1}-(v_{dez}+1-v_0)\, 2^{k-l}+(u_{dez}+u_0)} \\ \\ \frac{2^{k+1}-(v_{dez}+1-v_0)\, 2^{k-l}}{2^{k+1}-(v_{dez}+1-v_0)\, 2^{k-l}+(u_{dez}+u_0)} \end{cases} \text{ für } (z_1(0), z_2(0)) = \begin{cases} (0,1) \\ \\ (1,0) \end{cases} . \quad (50.278)$$

(e) Untersuchen Sie experimentell das Konvergenzverhalten des dA nach Bild 53 für charakteristische Fälle, insbesondere bei $\mathrm{ggT}\,(A, B) \neq 1$.

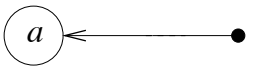
(f) Entwickeln Sie aus den Gln. (50.272) bis (50.278) einen möglichst einfachen Umkehralgorithmus:

Gegeben: A, B

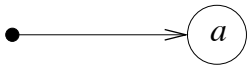
Gesucht: Realisierungsautomat nach Bild 53 mit u, v und der Initialisierung $(z_1(0), z_2(0))$ bei möglichst guter Konvergenz und möglichst kurzer Verknüpfungskette. □

Aufgabe 31

Erweitern Sie den dA Bild 53 durch Hinzunahme weiterer Elemente in der Verknüpfungskette:



$$\widehat{=}\ a1 \tag{50.279}$$



$$\widehat{=}\ a0 \tag{50.280}$$



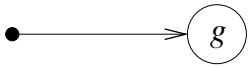
$$\widehat{=}\ h1 \tag{50.281}$$



$$\widehat{=}\ h0 \tag{50.282}$$



$$\widehat{=}\ g1 \tag{50.283}$$



$$\widehat{=}\ g0 \tag{50.284}$$

(a) Mit welcher speziellen Verknüpfungskette berechnet ein so konfigurierter dA

– $$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{2\,t+1}{2\,t-1}\right)^{t} = e = 2.71828\,18284\,59045\ldots \tag{50.285}$$

– $$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \prod_{i=1}^{2\,t} \left(\frac{2\,i+1}{2\,i-1}\right)^{(-1)^i \cdot i} \tag{50.286}$$

$$= \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^2 \left(\frac{9}{7}\right)^4 \left(\frac{13}{11}\right)^6 \left(\frac{17}{15}\right)^8 \left(\frac{21}{19}\right)^{10} \cdots}{\left(\frac{3}{1}\right)^1 \left(\frac{7}{5}\right)^3 \left(\frac{11}{9}\right)^5 \left(\frac{15}{13}\right)^7 \left(\frac{19}{17}\right)^9 \cdots} \tag{50.287}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{\prod_{i=1}^{t-1} (4\,i+1)^{4\,i+1}}{\prod_{i=1}^{t} (4\,i-1)^{4\,i-1}} \, (4\,t+1)^{2\,t} \tag{50.288}$$

$$= \frac{5^5 \cdot 9^9 \cdot 13^{13} \cdot 17^{17} \cdot 21^{10} \cdot \ldots}{3^3 \cdot 7^7 \cdot 11^{11} \cdot 15^{15} \cdot 19^{19} \cdot \ldots} \tag{50.289}$$

$$= 0.9202\ldots$$

$$= 1.0867\ldots^{-1} \tag{50.290}$$

$$-\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \prod_{i=1}^{2\,t} \left(\frac{i+2}{i}\right)^{(-1)^i \cdot i} \tag{50.291}$$

$$= \frac{\left(\frac{4}{2}\right)^2 \left(\frac{6}{4}\right)^4 \left(\frac{8}{6}\right)^6 \left(\frac{10}{8}\right)^8 \left(\frac{12}{10}\right)^{10} \cdots}{\left(\frac{3}{1}\right)^1 \left(\frac{5}{3}\right)^3 \left(\frac{7}{5}\right)^5 \left(\frac{9}{7}\right)^7 \left(\frac{11}{9}\right)^9 \ldots} \tag{50.292}$$

$$= \lim_{t\to\infty} (2\,t+1) \left(\frac{\binom{2\,t}{t}}{2^{2\,t}}\right)^2 \left(\frac{2\,t+2}{2\,t+1}\right)^{2\,t} = \frac{2\,e}{\pi} \qquad [54] \tag{50.293}$$

$$-\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \prod_{i=1}^{t} \frac{(2\,i)^2}{(2\,i)^2-1} \tag{50.294}$$

$$= \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3} \cdot \frac{4\cdot 4}{3\cdot 5} \cdot \frac{6\cdot 6}{5\cdot 7} \cdot \frac{8\cdot 8}{7\cdot 9} \cdot \ldots \tag{50.295}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2\,t+1} \left(\frac{2^{2\,t}}{\binom{2\,t}{t}}\right)^2 = \frac{\pi}{2} \qquad \text{(Wallis, 1655)} \tag{50.296}$$

$$-\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \prod_{i=1}^{t} \frac{h(i)+1}{h(i)} = e \tag{50.297}$$

$$h(i) = i\Big(1 + (i-1)\Big(1 + \ldots + 3\Big(1 + 2\Big(1 + 1\Big(1\Big)\Big)\Big)\ldots\Big)\Big) \tag{50.298}$$

$$-\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \prod_{i=0}^{2\,t} \left(\frac{2\,i+2}{2\,i+1}\right)^{(-1)^{b(i)} \cdot b(i)} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \quad [10] \qquad [55,\ 56,\ 57] \tag{50.299}$$

[10] Sei

$$(i)_2 = a_k\, a_{k-1} \ldots a_1\, a_0 \in \{0,1\}^{k+1};\ k = \lceil \mathrm{ld}\, i \rceil \tag{50.300}$$

die Binärdarstellung von i.

$$- \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \prod_{i=0}^{2\,t} \left(\frac{2\,i+2}{2\,i+1}\right)^{(-1)^{b(i)}} = \sqrt{2} \qquad [58,\ 59,\ 60] \qquad (50.302)$$

$$- \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} t\left(\sqrt[t]{2} - 1\right) = \ln 2 \qquad (50.303)$$

$$- \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^t - 1}{\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^t + 1} = \tanh(1)\,. \qquad (50.304)$$

(b) Welche Funktionen werden in diesen Fällen durch die Quotienten

$$\frac{z_1(t)}{z_2(t)} \ \text{ und } \ \frac{z_2(t)}{z_2(t-1)} \qquad (50.305)$$

generiert?

(c) Interpretieren Sie die Zahlenwerte Gl. (50.290), benutzen Sie hierzu [7, 19, 20, 21, 22, 61, 62, 63].

(d) Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten von $y(t)$ für die aufgeführten Fälle. Diskutieren Sie Möglichkeiten zur Konvergenzverbesserung. Stützen Sie sich dabei insbesondere auf den Verlauf von $d\,y(t) = \frac{y(t)-y(t+1)}{y(t+1)-y(t+2)}$.

Lösungshinweis:

Zu Gl. (50.285)

Untersucht man die Dynamik von Gl. (50.285) für Zweierpotenzschritte, also für

$$y(t) = \left(\frac{2^{t+1}+1}{2^{t+1}-1}\right)^{2^t}\ ;\ t = 0, 1, 2, \ldots\,, \qquad (50.306)$$

so erhält man den in Tabelle 34 dargestellten Verlauf (einschließlich Korrektur zur Konvergenzverbesserung).

Überraschenderweise zeigt sich bei diesem Ansatz zur näherungsweisen Berechnung von e dasselbe Dynamikmuster, das in Aufgabe 3 für den Algorithmus (A2) zur näherungsweisen Berechnung von π gefunden wurde:

$$- \lim_{t\to\infty} d\,y(t) = 4\,. \qquad (50.307)$$

Dann ist

$$b(i) = \sum_{j=0}^{k} a_j \qquad (50.301)$$

die Anzahl der Einsen in $(i)_2$.

– Das dementsprechend gebildete gewichtete arithmetische Mittel (Korrektur erster Stufe)

$$y1(t) = \frac{4}{3}\, y(t+1) - \frac{1}{3}\, y(t) \tag{50.308}$$

nähert sich e unter allen gewichteten arithmetischen Mitteln

$$\frac{a\, y(t+1) + b\, y(t)}{a+b} \tag{50.309}$$

in engstmöglicher Weise. Dabei verdoppelt sich die Anzahl der gültigen Stellen in $y1(t)$ gegenüber $y(t)$.

– $$\lim_{t\to\infty} d\, y1(t) = 16 = 4^2\,. \tag{50.310}$$

– Weiter wie bei (A2).

Das heißt aber, daß eine effiziente Korrektur des Outputs von Gl. (50.307) ebenfalls durch die Matrizengleichung (50.64) bzw. den Korrekturautomaten nach Bild 25 erfolgen kann.

Zu Gl. (50.303)

Die Untersuchung der Dynamik von Gl. (50.303) erfolge wie im Falle der Gl. (50.285) in Zweierpotenzschritten, also für

$$y(t) = 2^t \left(2^{\frac{1}{2^t}} - 1\right);\ t = 0, 1, 2, \ldots\,. \tag{50.311}$$

Man erhält dann den in Tabelle 35 dargestellten Verlauf (einschließlich Korrektur zur Konvergenzverbesserung).

Wir beobachten hier ein gegenüber e (Tabelle 34) etwas abweichendes Dynamikmuster:

– $$\lim_{t\to\infty} d\, y(t) = 2\,. \tag{50.312}$$

– Das dementsprechend gebildete gewichtete arithmetische Mittel (Korrektur erster Stufe)

$$y1(t) = 2\, y(t+1) - y(t) \tag{50.313}$$

nähert sich $\ln 2$ unter allen gewichteten arithmetischen Mitteln

$$\frac{a\, y(t+1) + b\, y(t)}{a+b} \tag{50.314}$$

in engstmöglicher Weise. Dabei verdoppelt sich im Mittel die Anzahl der gültigen Stellen in $y1(t)$ gegenüber $y(t)$.

– $\lim\limits_{t\to\infty} d\,y1(t) = 4\,.$ (50.315)

Die zugehörige Korrektur zweiter Stufe

$$y2(t) = \frac{4}{3}\,y1(t+1) - \frac{1}{3}\,y1(t) \tag{50.316}$$

liefert im Mittel die dreifache Ausgabe genauer Stellen gegenüber $y(t)$.

t	$y(t)$	$d\,y(t)$	$y1(t) = \frac{4}{3}y(t+1) - \frac{1}{3}y(t)$	$d\,y1(t)$	$y2(t) = \frac{16}{15}y1(t+1) - \frac{1}{15}y1(t)$	$d\,y2(t)$
0	3.0	4.920082	2.703703703703704	20.288517	2.718479440150965904124 31	82.248775
1	$2.7\overline{7}$	4.190017	2.717555956623012	16.880144	2.718284237370273069438 96	67.729335
2	2.7326114119	4.045540	2.718238719823569	16.210658	2.718281864048844990085 52	64.891797
3	2.7218318928	4.011269	2.718279167534765	16.052110	2.718281829007582294037 62	64.220554
4	2.7191673489	4.002810	2.718281662665531	16.012993	2.718281828467587036845 16	64.054991
5	2.7185030842	4.000702	2.718281818104958	16.003246	2.718281828459178587775 91	64.013738
6	2.7183371346	4.000176	2.718281827812040	16.000811	2.718281828459047318549 86	64.013738
7	2.7182956545	4.000044	2.718281828418609	16.000203	2.718281828459045267908 40	64.003434
8	2.7182852849	4.000011	2.718281828456518	16.000051	2.718281828459045235868 84	64.000858
9	2.7182826926	4.000003	2.718281828458887	16.000013	2.718281828459045235368 23	64.000215
10	2.7182820445	4.000001	2.718281828459035	16.000003	2.718281828459045235360 41	64.000054

Tabelle 34: Näherungsweise Berechnung von e, Dynamik von Gl. (50.285) für Zweierpotenzschritte

t	$y(t)$	$d\,y(t)$	$y1(t)$	$d\,y1(t)$	$y2(t)$	$d\,y2(t)$	$y3(t)$	$d\,y3(t)$
0	1.0	2.3963	0.65685425	4.6782	0.694688310537	9.1453	0.6931211957356697	17.9503
1	0.82842712	2.1851	0.68522980	4.3204	0.693317085086	8.5452	0.6931457279544062	16.9338
2	0.75682846	2.0895	0.69129526	4.1558	0.693167147596	8.2662	0.6931470946269586	16.4571
3	0.72406186	2.0440	0.69269918	4.0768	0.693149601248	8.1315	0.6931471753336493	16.2262
4	0.70838052	2.0218	0.69303700	4.0382	0.693147478573	8.0654	0.6931471802377102	16.1125
5	0.70070876	2.0109	0.69311986	4.0190	0.693147217530	8.0325	0.6931471805399417	16.0561
6	0.69691431	2.0054	0.69314038	4.0095	0.693147185164	8.0183	0.6931471805586993	16.0280
7	0.69502734	2.0027	0.69314548	4.0047	0.693147181134	7.9812	0.6931471805598676	16.0140
8	0.69408641	2.0014	0.69314676	4.0024	0.693147180632		0.6931471805599404	16.0070
9	0.69361658	2.0007	0.69314707	4.0012	0.693147180569		0.6931471805599450	16.0035
10	0.69338183	2.0003	0.69314715	4.0006	0.693147180561		0.6931471805599452	16.0018
⋮								
15	0.69315451		0.69314718053410		0.6931471805599453 43588		0.6931471805599453094172 1405100	
⋮								
20	0.69314741		0.69314718055992		0.693147180559945309418		0.693147180559945309417232121 44	

Tabelle 35: Näherungsweise Berechnung von $\ln 2$, Dynamik von Gl. (50.303) für Zweierpotenzschritte

– $\lim\limits_{t\to\infty} d\,y2(t) = 8\,.$ (50.317)

Die zugehörige Korrektur dritter Stufe

$$y3(t) = \frac{8}{7}\,y1(t+1) - \frac{1}{7}\,y1(t) \tag{50.318}$$

liefert im Mittel die vierfache Ausgabe genauer Stellen gegenüber $y(t)$.

– In dieser Weise läßt sich die Korrektur beliebig fortführen.

Zu Gl. (50.304)

Fußend auf den Untersuchungen zur Konvergenzverbesserung der Gln. (50.285) und (50.303) soll nun der Versuch unternommen werden, t nicht nur in Zweierpotenzen, sondern auch in Dreier–, Vierer– und Fünferpotenzen zu variieren.

Tabelle 36 zeigt den entsprechenden Dynamikverlauf (einschließlich der Korrekturen zur Konvergenzverbesserung). Auf diese Weise läßt sich tatsächlich eine weitere, allerdings nicht linear ansteigende Konvergenzverbesserung erreichen. Am gravierendsten ist dabei der Zugewinn an gültigen Stellen beim Übergang von $t = 2^i$ zu $t = 3^i$. □

i	$t=2^i$	$v(i)=y(t)$	$d\,v(i)$	$v1(i)=\frac{4}{3}v(i+1)-\frac{1}{3}v(i)$	$d\,v1(i)$	$v2(i)=\frac{16}{15}v1(i+1)-\frac{1}{15}v1(i)$	$d\,v2(i)$
1	2	0.8	4.3681	0.76071765816808310	17.9857	0.76160033098018764367552984322	73.3752
2	4	0.77053824	4.0836	0.76154516392943111	16.4450	0.76159424023993336729673252045	66.0787
3	8	0.76379343	4.0204	0.76159117297052698	16.1085	0.76159415723174863463028168065	64.5056
4	16	0.76214174	4.0051	0.76159397071542228	16.0270	0.76159415597554770062133233017	64.1255
5	32	0.76173091	4.0013	0.76159414439678986	16.0067	0.76159415595607339652762241853	64.0313
i	$t=3^i$	$v(i)=y(t)$	$d\,v(i)$	$v1(i)=\frac{9}{8}v(i+1)-\frac{1}{8}v(i)$	$d\,v1(i)$	$v2(i)=\frac{81}{80}v1(i+1)-\frac{1}{80}v1(i)$	$d\,v2(i)$
1	3	0.77777778	9.3599	0.76152388265262593	85.1679	0.76159419849335704961316273161	772.4638
2	9	0.76332987	9.0382	0.76159333039655790	81.4394	0.76159415601083609363785589639	733.5579
3	27	0.76178628	9.0042	0.76159414581806723	81.0485	0.76159415595558399627925426962 6	729.5033
4	81	0.76161549	9.0005	0.76159415583068227	81.0054	0.76159415595576499103158366357	729.0559
5	243	0.7615965	9.0001	0.76159415595422076	81.0006	0.76159415595576488826061637089	729.0062
i	$t=4^i$	$v(i)=y(t)$	$d\,v(i)$	$v1(i)=\frac{16}{15}v(i+1)-\frac{1}{15}v(i)$	$d\,v1(i)$	$v2(i)=\frac{256}{255}v1(i+1)-\frac{1}{255}v1(i)$	$d\,v2(i)$
1	4	0.77053824	16.3546	0.76158197116230780	263.2240	0.76159415726247010470197217958	4229.4394
2	16	0.76214174	16.0216	0.76159410966051634	256.4380	0.76159415595607384505930712882	4104.0655
3	64	0.76162834	16.0013	0.76159415577523182	256.0273	0.76159415595576496340019629809	4096.5031
4	256	0.76159629	16.0001	0.76159415595505976	256.0017	0.76159415595576488813783511255	
5	1024	0.76159429	16.0000	0.76159415595576213		0.76159415595576488811946276910	
i	$t=5^i$	$v(i)=y(t)$	$d\,v(i)$	$v1(i)=\frac{25}{24}v(i+1)-\frac{1}{24}v(i)$	$d\,v1(i)$	$v2(i)=\frac{625}{624}v1(i+1)-\frac{1}{624}v1(i)$	$d\,v2(i)$
1	5	0.76727273	25.3518	0.76159099720264661	636.1565	0.76159415604440643851977771359	15946.5576
2	25	0.76181827	25.0138	0.76159415099025962	625.4376	0.76159415595577044679001356389	15637.5862
3	125	0.76160312	25.0006	0.76159415594782563	625.0175	0.76159415595576488847492687982	
4	625	0.76159451	25.0000	0.76159415595575218		0.76159415595576488811948103186	
5	3125	0.76159417		0.76159415595576487			

Tabelle 36: Näherungsweise Berechnung von tanh(1), Dynamik von Gl. (50.304)

50.4 Literatur

[1] S. Gottwald, H.–J. Ilgands, K.–H. Schlote. *Lexikon bedeutender Mathematiker.* Leipzig 1990

[2] H.L. Resnikoff, R.O. Wells. *Mathematik im Wandel der Kulturen.* Braunschweig, Wiesbaden 1983

[3] A. Pichot. *Die Geburt der Wissenschaft. Von den Babyloniern zu den frühen Griechen.* Frankfurt, ... 1995

[4] E.P. Stoschek. *Abenteuer Algorithmus.* Dresden 1996

[5] L.N.H. Bunt, P.S. Jones, J.D. Bedient. *The Historical Roots of Elementary Mathematics.* Englewood Cliffs 1976

[6] J. Aczél. *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen.* Berlin 1961

[7] M. Abramowitz, I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables.* Washington 1970

[8] H. Schöne. *Herons von Alexandria Vermessungslehre und Dioptra.* Leipzig 1903

[9] W. Krämer. *Numerische Berechnung von Schranken für π.* Überblicke Mathematik. Jahrbuch 1995. Braunschweig, Wiesbaden 1993

[10] J. Ziegenbalg. *Algorithmen. Von Hammurapi bis Gödel.* Heidelberg, Berlin, Oxford 1996

[11] W. Lietzmann. *Altes und Neues vom Kreis.* Leipzig 1966

[12] E. Fiume. *Scientific Computing. Eine Einführung in numerische, grafische und symbolische Methoden mit Beispielen in MAPLE und C.* 1996

[13] D. Kahaner, C.M. Moler, S. Nash. *Numerical Methods and Software.* New York 1989

[14] W. Press, S. Teukolsky, W. Vetterling, B. Flannery. *Numerical Recipes in C.* Cambridge 1992

[15] A. Engel. *Elementarmathematik vom algorithmischen Standpunkt.* Stuttgart 1977

[16] J. Stillwell. *Mathematics and Its History.* New York, Tokyo 1989

[17] Ch. Huygens. *De Circuli magnitudine inventa.* Lugduni Batavorum 1654

[18] В. Вавилов. Об одной формуле Гюйгенса. Квант 26(1995)4, 5–9

[19] D. Wells. *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers.* London, New York 1987

[20] S. Finch. *Table of Mathematical Constants.* http://www.mathsoft.com/asolve/constant/table.html

[21] J. Borwein, P. Borwein. *A Dictionary of Real Numbers.* Pacific Grove 1990

[22] S. Plouffe. *Tables of Constants.* http://www.cecm.sfn.ca/projects/ISC/I_d.html

[23] R.W. Gosper. *Acceleration of series. AI Memo♯304.* M.I.T. Artifical Intelligence Laboratory, Cambridge, Mass. 1974

[24] E.W. Weisstein. *Convergence Improvement.* http://www.astro.virginia.edu/∼eww6n/math/ConvergenceImprovement.html

[25] H.–O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe. *Chaos and Fractals. New Frontiers of Science.* New York, Berlin, Budapest 1992

[26] F. Nagel. *Nicolaus Cusanus und die Entstehung der exakten Wissenschaften.* Münster 1984

[27] G. Heinz–Mohr, W.P. Eckert. *Das Werk des Nicolaus Cusanus.* Köln 1981

[28] R. Rannacher, E. Stein. *Finite Elemente.* Spektrum der Wissenschaft 20(1997)3, S. 90–98

[29] S.C. Brenner. *The Mathematical Theory of Finite Elements.* Berlin 1994

[30] H.–J. Bartsch. *Taschenbuch mathematischer Formeln.* Leipzig 1993

[31] E. Salamin. *Computation of π Using Arithmetic–Geometric Mean.* Mathematics of Computation 30(1976), 565–570

[32] R.P. Brent. *Fast Multiple–Precision Evaluation of Elementary Functions.* Journal of the Association of Computing Machinery 23(1976), 242–251

[33] *The Arithmetic–Geometric Mean Iteration.* http: // www.cecm.sfu.ca/ organics/ papers/ borwein/ paper/ html/local/omlink4/ html/node1–an.shtml

[34] I.M. Ryshik, I.S. Gradstein. *Summen–, Produkt– und Integral–Tafeln.* Berlin 1957

[35] H. Meschkowski. *Ungelöste und unlösbare Probleme der Geometrie.* Mannheim, Wien, Zürich 1975

[36] H. Dörrie. *100 Great Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solutions.* New York 1965

[37] T. Rossel. *Der Zusammenhang der vier antiken Probleme.* Wiesbaden 1960

[38] W. Dunham. *The Mathematical Universe.* New York 1994

[39] W. Breidenbach. *Das Delische Problem.* Leipzig 1952

[40] E. Beutel. *Die Quadratur des Kreises.* Leipzig 1951

[41] W. Breidenbach. *Die Dreiteilung des Winkels.* Leipzig 1951

[42] R.C. Yates. *The Trisection Problem.* Washington 1971

[43] http://stratus.esam.nwu.edu/∼judd/recmath/ksect.html

[44] A.O. Gelfond. *Differenzenrechnung.* Berlin 1958

[45] S.N. Elaydi. *An Introduction to Difference Equations.* New York 1996

[46] D. Schönfeld, H. Klimant, R. Piotraschke. *Informations– und Kodierungstheorie.* Wiesbaden 2012

[47] D.A. Huffman. *A Method for the Construction of Minimum–Redundancy Codes.* Proc. IRE 40(1952), pp. 1098–1101

[48] E.P. Stoschek. *Abenteuer Algorithmus. Teil 2.* Dresden 1997

[49] P. Prusinkiewicz, A. Lindenmayer. *The Beauty of Plants.* New York 1990

[50] R.M.Dickau. *Two–dimensional L–Systems.* http: //forum.swarthmore.edu/advanced/robertd/lsys2d.html

[51] R.M.Dickau. *Three–dimensional L–Systems.* http: //forum.swarthmore.edu/advanced/robertd/lsys3d.html

[52] *Famous L–systems of mathematical history.* http: // www.math.okstate.edu/ ∼wrightd/ dynamics/ lecnotes/ node21.html♯ SECTION00049000000000000000

[53] K.E. Drexler. *Nanosystems: Molecular Machinery, Manufacturing, and Computation.* New York 1992

[54] Z.A. Melzak. *Infinite products for* $\pi \cdot e$ *and* $\frac{\pi}{e}$. American Mathematical Monthly 68(1961), 39–41

[55] J.–P. Allouche, H. Cohen, M. Mendes France, J.O. Shallit. *De nouveaux curieux produits infinis.* Acta Arithmetica 49(1987), 141–153

[56] J.–P. Allouche, J.O. Shallit. *Infinite products associated with counting blocks in binary strings.* J. London Math. Soc. (2) 39(1989), 193–204

[57] J.–P. Allouche, P. Hajnal, J.O. Shallit. *Analysis of an infinite product algorithm.* SIAM J. Discrete Math. 2(1989), 1–15

[58] D.R. Woods. *Problem E2692.* American Mathematical Monthly 85(1978), 48

[59] D. Robbins. *Solution to problem E2692.* American Mathematical Monthly 86(1979), 394–395

[60] *Infinite Product Constants.* http://www.mathsoft.com/

[61] R.K. Gray, J.H. Conway. *The Book of Numbers.* New York 1996

[62] W. Kranzer. *So interessant ist Mathematik.* Berlin 1989

[63] M. Miller. *Gelöste und ungelöste mathematische Probleme.* Leipzig 1973