Unit 44 Konvergenzverbesserung: Unterwegs zum Gipfel $\sqrt{2}$

44.1 Die längste Reise beginnt mit dem ersten Schritt

Unter den Möglichkeiten zur numerischen Berechnung von $\sqrt{2}$ erscheint die folgende Matrizendarstellung

- aus systematischer Sicht
- mit dem Ziel: hin zu immer schnellerer Konvergenz

von besonderem Interesse.

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};\ t = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{u(t)}{v(t)} = \sqrt{2} \tag{2}$$

Gl. (1) läßt sich auch rekursiv notieren

$$\begin{pmatrix} u(t+1) \\ v(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix};\ t = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Tabelle 1 zeigt die Werteverläufe von $u(t)$ und $v(t)$, der Quotienten

$$x(t) = \frac{u(t)}{v(t)} = \frac{v(t+1)}{v(t)} - 1 \tag{5}$$

$$y(t) = \frac{2\,v(t)}{u(t)} = \frac{u(t+1)}{u(t)} - 1\,, \tag{6}$$

des arithmetischen Mittels

$$z(t) = \frac{1}{2}\,(x(t) + y(t)) \tag{7}$$

sowie der zugehörigen Differenzenquotienten

$$dx(t) = \frac{x(t) - x(t+1)}{x(t+1) - x(t+2)} \tag{8}$$

$$dy(t) = \frac{y(t) - y(t+1)}{y(t+1) - y(t+2)} \tag{9}$$

$$dz(t) = \frac{z(t) - z(t+1)}{z(t+1) - z(t+2)}\,. \tag{10}$$

Man entnimmt aus Tabelle 1:

- $x(t)$ und $y(t)$ konvergieren gegenläufig oszillierend gegen $\sqrt{2}$ ($\rightarrow$ Konvergenzverbesserung durch Mittelwertbildung!)

  $$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \sqrt{2}\,; \tag{11}$$

  für die Anzahl $gx(t)$ bzw. $gy(t)$ der dabei erhaltenen gültigen Stellen von $\sqrt{2}$ hat man die Näherung

  $$gx(t) \approx gy(t) \approx \frac{3}{4}\,t\,. \tag{12}$$

- Die Differenzenquotienten von $x(t)$ und von $y(t)$ konvergieren:

  $$\lim_{t\to\infty} dx(t) = \lim_{t\to\infty} dy(t) = -(u(1) + v(1)\sqrt{2}) = -(3 + 2\sqrt{2})\,, \tag{13}$$

  werden allerdings nicht ganzzahlig, damit sind hier auf der Ganzzahligkeit des Differenzenquotienten basierende lineare Korrekturverfahren zur Konvergenzverbesserung [7] nicht anwendbar.

- Offenbar lassen sich aus den Basisgrößen $u(t)$ und $v(t)$ weitere relativ einfache Ausdrücke bilden, die wesentlich besser gegen $\sqrt{2}$ konvergieren als $x(t)$ und $y(t)$; so zeigt zB. deren arithmetisches Mittel $z(t)$ eine doppelt so schnelle Konvergenz:

  $$z(t) = x(2\,t+1) \tag{14}$$

  $$gz(t) \approx 2\,gx(t) \approx 2\,gy(t) \approx \frac{3}{2}\,t \tag{15}$$

$$\lim_{t\to\infty} dz(t) = \lim_{t\to\infty} dx(t)^2 = \lim_{t\to\infty} dy(t)^2 \tag{16}$$

$$= u(3) + v(3)\sqrt{2} = 17 + 12\sqrt{2}\,. \tag{17}$$

t	$u(t)$	$v(t)$	$x(t)$	$dx(t)$	$y(t)$	$dy(t)$	$z(t)$	$dz(t)$
0	1	1	$\frac{1}{1} = \underline{1}.0$		$\frac{2}{1} = 2.0$		$\frac{3}{2} = \underline{1}.5$	
1	3	2	$\frac{3}{2} = \underline{1}.5$		$\frac{4}{3} = \underline{1}.\overline{3}$		$\frac{17}{12} = \underline{1.41}\overline{6}$	
2	7	5	$\frac{7}{5} = \underline{1.4}$		$\frac{10}{7} = \underline{1.4}285714285714$		$\frac{99}{70} = \underline{1.4142}857142865$	33.9
3	17	12	$\frac{17}{12} = \underline{1.41}\overline{6}$		$\frac{24}{17} = \underline{1.41}17647058823$		$\frac{577}{408} = \underline{1.41421}56862745$	33.9
4	41	29	$\frac{41}{29} = \underline{1.41}37931034482$		$\frac{58}{41} = \underline{1.4146}341463414$		$\frac{363}{2378} = \underline{1.4142136}248948$	
5	99	70	$\frac{99}{70} = \underline{1.4142}857142857$	-5.82857	$\frac{140}{99} = \underline{1.414}1\overline{41}$	-5.82828	$\frac{19601}{13860} = \underline{1.4142135}42135$	
6	239	169	$\frac{239}{169} = \underline{1.4142}011834319$	-5.82840	$\frac{338}{239} = \underline{1.4142}259414225$	-5.82845	$\frac{114243}{80782} = \underline{1.414213562}427$	
7	577	408	$\frac{577}{408} = \underline{1.41421}56862745$	-5.82843	$\frac{816}{577} = \underline{1.41421}14384748$	-5.82841	$\frac{665857}{470832} = \underline{1.414213562374}$	
8	1393	985	$\frac{1393}{985} = \underline{1.41421}31979695$	-5.82840	$\frac{1970}{1393} = \underline{1.41421}39267767$	-5.82842		
9	3363	2378	$\frac{3363}{2378} = \underline{1.4142136}248948$		$\frac{4756}{3363} = \underline{1.41421}34998513$			
10	8119	5741	$\frac{8119}{5741} = \underline{1.4142135}516460$		$\frac{11482}{8119} = \underline{1.4142135}731001$			
11	19601	13860	$\frac{19601}{13860} = \underline{1.4142135}642135$		$\frac{27720}{19601} = \underline{1.4142135}605326$			
12	47321	33461	$\frac{47321}{33461} = \underline{1.414213562}0573$		$\frac{66922}{47321} = \underline{1.414213562}6888$			
13	114243	80782	$\frac{114243}{80782} = \underline{1.414213562}4272$		$\frac{161564}{114243} = \underline{1.41421356}218$			
14	275807	195025	$\frac{275807}{195025} = \underline{1.414213562}3637$		$\frac{390050}{275807} = \underline{1.41421356}282$			
15	665857	470832	$\frac{665857}{470832} = \underline{1.414213562374}6$		$\frac{941664}{665857} = \underline{1.41421356237}1$			
16	1607521	1136689	$\frac{1607521}{1136689} = \underline{1.41421356237}2$					

Tabelle 1: Werteverläufe von $u(t)$ und $v(t)$ sowie daraus abgeleiteter Größen

Aufgabe 44.1

Zeigen Sie, daß

- für $u(t)$ und $v(t)$ anstelle der gekoppelten rekursiven Berechnung mittels Gl. (3) und Gl. (4) auch eine separate rekursive Berechnung möglich ist:

$$\begin{pmatrix} u(t+2) \\ v(t+2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) & u(t+1) \\ v(t) & v(t+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix};\ t = 0, 1, 2, \ldots \tag{18}$$

$$\begin{pmatrix} u(0) & u(1) \\ v(0) & v(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

- sich $u(t)$ und $v(t)$ neben der Matrizendarstellung Gl. (1) auch als Potenzreihen darstellen lassen:

$$u(t) = \binom{t+1}{0} \cdot 2^0 + \binom{t+1}{2} \cdot 2^1 + \binom{t+1}{4} \cdot 2^2 + \binom{t+1}{6} \cdot 2^3 + \ldots \tag{20}$$

$$v(t) = \binom{t+1}{1} \cdot 2^0 + \binom{t+1}{3} \cdot 2^1 + \binom{t+1}{5} \cdot 2^2 + \binom{t+1}{7} \cdot 2^3 + \ldots \tag{21}$$

$$t = 0, 1, 2, \ldots ; \ \binom{n}{i} = 0 \ \text{ für } \ i > n \tag{22}$$

- für $u(t)$ und $v(t)$ Additions– und Subtraktionstheoreme von $\sin x$–$\cos x$–Typ [1] existieren:

$$\begin{pmatrix} u(t_1 + t_2 + 1) \\ v(t_1 + t_2 + 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t_1) & 2\,v(t_1) \\ v(t_1) & u(t_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t_2) \\ v(t_2) \end{pmatrix} \tag{23}$$

$$\begin{pmatrix} u(t_2 - t_1 - 1) \\ v(t_2 - t_1 - 1) \end{pmatrix} = (-1)^{t_1} \begin{pmatrix} -u(t_1) & 2\,v(t_1) \\ v(t_1) & -u(t_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t_2) \\ v(t_2) \end{pmatrix} \tag{24}$$

$$= \begin{pmatrix} u(t_1) & 2\,v(t_1) \\ v(t_1) & u(t_1) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u(t_2) \\ v(t_2) \end{pmatrix};\ t_1 < t_2\,. \tag{25}$$

  Anmerkung:

  Mittels Gl. (23) ist ebenfalls eine gekoppelte (nichtlineare) rekursive Berechnung von $u(t)$ und $v(t)$ möglich.

Geben Sie weitere Darstellungsmöglichkeiten für $u(t)$ und $v(t)$ an.

Beispiel:

$$v(t_1 + t_2 + 2) = v(t_1)v(t_2) + v(t_1 + 1)v(t_2 + 1) \tag{26}$$

□

Aufgabe 44.2

Interpretieren Sie Gl. (3) als

- Kettengleichung eines elektrischen Vierpols [2,3]
- Folgezustandsabbildung eines deterministischen Automaten [4]. □

Aufgabe 44.3

Die „Generatormatrix“ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ läßt sich wie folgt als Produkt darstellen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Diskutieren Sie diesen Sachverhalt in Bezug auf die $\sqrt{2}$–Berechnung und im Zusammenhang mit Aufgabe 44.2 (vgl. auch [5]). □

Aufgabe 44.4

Zeigen Sie, daß der gemäß Gl. (5) aus $u(t)$ und $v(t)$ gebildete Quotient $x(t)$ zugleich auch t–ter Partialbruch der nachstehenden Kettenbruchdarstellung [6] von $\sqrt{2}$ ist:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 1 + \overline{\frac{1\,|}{|\,2}} \qquad (28) \\ &= \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{1}_{x(0)} + \frac{1\,|}{|\,2}}_{x(1)} + \frac{1\,|}{|\,2}}_{x(2)} + \frac{1\,|}{|\,2}}_{x(3)} + \frac{1\,|}{|\,2}}_{x(4)} + \frac{1\,|}{|\,2}}_{x(5)} + \ldots . \end{aligned}$$

Anmerkung:
$\sqrt{2}$ besitzt eine weitere bemerkenswerte „Quasikettenbruch“–Darstellung ($a_0 \in \mathbb{Q}_+$)

$$\sqrt{2} = \frac{1}{2} + \overline{\frac{1\,|}{|\,1} + \frac{1\,|}{|10} + \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{1\,|}{|\,1}}. \tag{29}$$

□

Aufgabe 44.5

Wie lautet die (besser als Gl. (28) konvergierende) Kettenbruchdarstellung von $\sqrt{2}$ mit dem t–ten Partialbruch $z(t)$ gemäß Gl. (7); Tabelle 1, Spalte 8?
Lösung:

$$\sqrt{2} = \frac{3}{2} + \overline{\frac{1 \quad |}{|-12} + \frac{1|}{|3}}\,. \tag{30}$$

□

Aufgabe 44.6

Zeigen Sie, daß sich $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$ auch unabhängig von der Berechnung der Basisgrößen $u(t)$ und $v(t)$ mittels eigener Rekursionsgleichungen berechnen lassen:

$$x(t+1) = \frac{\mathbf{1}\cdot x(t) + \mathbf{2}}{\mathbf{1}\cdot x(t) + \mathbf{1}};\ t = 0, 1, 2, \ldots \tag{31}$$

$$x(0) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}} \tag{32}$$

$$y(t+1) = \frac{\mathbf{1}\cdot y(t) + \mathbf{2}}{\mathbf{1}\cdot y(t) + \mathbf{1}};\ t = 0, 1, 2, \ldots \tag{33}$$

$$y(0) = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1}} \tag{34}$$

$$z(t+1) = \frac{\mathbf{3}\cdot z(t) + \mathbf{4}}{\mathbf{2}\cdot z(t) + \mathbf{3}};\ \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2;\ t = 0, 1, 2, \ldots \tag{35}$$

$$z(0) = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} \tag{36}$$

Lösungshinweis:
Aus Gl. (3) und Gl. (5) folgt

$$x(t+1) = \frac{u(t+1)}{v(t+1)} = \frac{u(t) + 2\,v(t)}{u(t) + v(t)} = \frac{\frac{u(t)}{v(t)} + 2}{\frac{u(t)}{v(t)} + 1} = \frac{x(t) + 2}{x(t) + 1} \tag{37}$$

$$x(0) = \frac{u(0)}{v(0)} = \frac{1}{1} = 1\,. \tag{38}$$

□

Aufgabe 44.7

- Welchen Grenzwert liefert Gl. (1) für die veränderte Generatormatrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{39}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{u(t)}{v(t)} = ? \tag{40}$$

Lösung:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{u(t)}{v(t)} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right). \tag{41}$$

- Bearbeiten Sie alle im vorliegenden Abschnitt untersuchten Fragestellungen sinngemäß nun auch für diesen Fall. □

44.2 Aufstieg im Vorgebirge

Die in Abschn. 44.1, Tabelle 1 experimentell gefundene Konvergenzverbesserung $x(t) \to z(t)$ soll im folgenden eine erste systematische Erweiterung (hin zu immer besserer Konvergenz!) erfahren. Im Zusammenhang mit der Lösung von Aufgabe 44.6 liegt es nahe, die Rekursionsgleichungen (31) und (35) durch ein allgemeines Bildungsgesetz fortzusetzen:

$$x_1(t+1) = \frac{1\cdot x_1(t)+2}{1\cdot x_1(t)+1};\ t=0,1,2,\ldots;\ x_1(0)=1 \tag{42}$$

$$x_2(t+1) = \frac{3\cdot x_2(t)+4}{2\cdot x_2(t)+3};\ t=0,1,2,\ldots;\ x_2(0)=1;\ \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 \tag{43}$$

$$x_3(t+1) = \frac{7\cdot x_3(t)+10}{5\cdot x_3(t)+7};\ t=0,1,2,\ldots;\ x_3(0)=1;\ \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^3 \tag{44}$$

$$\vdots$$

$$x_n(t+1) = \frac{a_n\cdot x_n(t)+b_n}{c_n\cdot x_n(t)+d_n};\ t=0,1,2,\ldots;\ x_n(0)=1;\ \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n. \tag{45}$$

Tabelle 2 summiert die zugehörigen Werteverläufe:

- $\lim_{t\to\infty} x_n(t) = \sqrt{2};\ n=1,2,3,\ldots$ (46)
- Die Konvergenzverbesserung $x_1(t) \to x_n(t)$ ist proportional n:

$$x_n(t) = x_1(n\,t) \tag{47}$$

$$gx_n(t) \approx n\,gx_1(t) \approx \frac{3}{4}\,n\,t \tag{48}$$

$$\lim_{t\to\infty} dx_n(t) = \lim_{t\to\infty} (dx_1(t))^n = (-1)^n(u(2n-1) + v(2n-1)\sqrt{2})\,. \tag{49}$$

Aus Gl. (49) folgt

$$\lim_{t\to\infty} dx_n(t) \approx (-1)^n 2u(2n-1) \quad \text{für} \quad n \gg 1\,, \tag{50}$$

d.h. $\lim\limits_{t\to\infty} dx_n(t)$ ist für große n nahezu ganzzahlig!

t	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$	$x_4(t)$	$x_5(t)$	$x_6(t)$
0	1	1	1	1	1	1
1	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{41}{29}$	$\frac{99}{70}$	$\frac{239}{169}$
2	$\frac{7}{5}$	$\frac{41}{29}$	$\frac{239}{169}$	$\frac{1393}{985}$	$\frac{8119}{5741}$	$\frac{47321}{33461}$
3	$\frac{17}{12}$	$\frac{239}{169}$	$\frac{3363}{2378}$	$\frac{47321}{33461}$	$\frac{665857}{470832}$	
4	$\frac{41}{29}$	$\frac{1393}{985}$	$\frac{47321}{33461}$	$\frac{1607521}{1136689}$		
5	$\frac{99}{70}$	$\frac{8119}{5741}$	$\frac{665857}{470832}$			
6	$\frac{239}{169}$	$\frac{47321}{33461}$				
7	$\frac{577}{408}$	$\frac{275807}{195025}$				
8	$\frac{1393}{985}$	$\frac{1607521}{1136689}$				
9	$\frac{3363}{2378}$					
10	$\frac{8119}{5741}$					
11	$\frac{19601}{13860}$					
12	$\frac{47321}{33461}$					
13	$\frac{114243}{80782}$					
14	$\frac{275807}{195025}$					
15	$\frac{665857}{470832}$					
16	$\frac{1607521}{1136689}$					

Tabelle 2: Werteverläufe von $x_n(t)$ für $n = 1(1)6$

Aus den Gln (1), (5), (12), (31), (32), (42)–(45), (47) und (48) folgt zusammenfassend: Als Kenngröße für die jeweils erreichte Konvergenz kann der zugehörige Potenzverlauf der Generatormatrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ benutzt werden (Tabelle 3).

Die Konvergenz von	ist bestimmt durch den Werteverlauf von
$x(t) = x_1(t)$ gemäß Gl. (42)	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^t$
$x_2(t)$ gemäß Gl. (43)	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{2t}$
$x_3(t)$ gemäß Gl. (44)	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{3t}$
$x_n(t)$ gemäß Gl. (45), $n = 1, 2, 3, \ldots$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{nt}$.

Tabelle 3: Konvergenz von $x_n(t)$ gegen $\sqrt{2}$ und Werteverlauf von $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n\,t}$

Aufgabe 44.8

- Zeigen Sie, daß $x_2(t)$ gemäß Gl. (43) zugleich auch t–ter Partialwert der nachstehenden infinitely nested expression Darstellung von $\sqrt{2}$ [7] ist:

$$\sqrt{2} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{1}_{x_2(0)} + \frac{2}{a_1}}_{x_2(1)} \left(1 + \frac{a_0}{a_2}}_{x_2(2)} \left(1 + \frac{a_1}{a_3}}_{x_2(3)} \left(1 + \frac{a_2}{a_4}}_{x_2(4)} \left(1 + \frac{a_3}{a_5} \left(1 + \ldots}_{x_2(5)} \tag{51}$$

mit

i	0	1	2	3	4	5	...	$i = 2, 3, 4, \ldots$
$a_i = v(2i)$	1	5	29	169	985	5741		$\begin{vmatrix} a_{i-1} & 1 \\ a_{i-2} & 6 \end{vmatrix}$

(52)

- Wie lauten entsprechende ine–Darstellungen von $\sqrt{2}$ mit den Partialwerten $x_1(t), x_3(t), x_4(t), x_n(t)$?
- Aus Gl. (51) und Gl. (52) erhält man nach Umformung

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{2}{u(2)} \left(1 + \frac{u(0)}{u(4)} \left(1 + \frac{u(2)}{u(6)} \left(1 + \frac{u(4)}{u(8)} \left(1 + \frac{u(6)}{u(10)} \left(1 + \ldots\right.\right.\right.\right.\right. . \tag{53}$$

Welchen Wert stellt der ine Gl. (51) für $a_i = u(i), v(i), u(3i), v(3i), \ldots$ dar? $\square$

Aufgabe 44.9

Die mittels Gl. (45) berechneten $x_n(t)$ können auch als t–te Partialbrüche einer Kettenbruchdarstellung von $\sqrt{2}$ interpretiert werden:

$$\lim_{t\to\infty} x_{2k+1}(t) = \frac{1}{v(2k)}\left(u(2k) + \overline{\frac{1\ \ |}{|\,2u(2k)}}\right) \tag{54}$$

$$\lim_{t\to\infty} x_{2k}(t) = \frac{1}{v(2k-1)}\left(u(2k-1) + 2\left(\overline{\frac{1\ \ |}{|\,-4u(2k-1)} + \frac{1\ \ |}{|\,u(2k-1)}}\right)\right). \tag{55}$$

So ist z.B.

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &= \frac{1}{1}\left(1 + \overline{\frac{1\ |}{|\,2\cdot 1}}\right) && (56)\\
&= \frac{1}{2}\left(3 + 2\left(\overline{\frac{1\ \ |}{|\,-4\cdot 3} + \frac{1|}{|\,3}}\right)\right) = \frac{3}{2} + \overline{\frac{1\ \ |}{|\,-12} + \frac{1|}{|\,3}} && (57)\\
&= \frac{1}{5}\left(7 + \overline{\frac{1\ |}{|\,2\cdot 7}}\right) && (58)\\
&= \frac{1}{12}\left(17 + 2\left(\overline{\frac{1\ \ |}{|\,-4\cdot 17} + \frac{1|}{|\,17}}\right)\right) && (59)\\
&= \frac{1}{29}\left(41 + \overline{\frac{1\ |}{|\,2\cdot 41}}\right). && (60)
\end{aligned}$$

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten dieser Kettenbrüche. $\square$

Aufgabe 44.10

In [8] wurde gezeigt:
Konvergiert eine Folge $< x(t) >_{t=0}^{\infty}$ mit dem ganzzahligen Differenzenquotient d gegen a, so konvergiert die linear korrigierte Folge

$$< xkorr(t) >_{t=0}^{\infty} \tag{61}$$

mit

$$xkorr(t) = \frac{d}{d-1}\,x(t+1) - \frac{1}{d-1}\,x(t) \tag{62}$$

schneller gegen a.
Untersuchen Sie die so erreichbare Konvergenzverbesserung für $x_4(t)$:

$$x_4korr(t) = \frac{d_4}{d_4 - 1}\, x_4(t+1) - \frac{1}{d_4 - 1}\, x_4(t) \tag{63}$$

mit

$$d_4 \approx (-1)^4 \cdot 2 \cdot u(7) = 1154\,. \tag{64}$$

Beispiel:

$$x_4(1) = \frac{41}{29} = \underline{1.41}3793103448 \tag{65}$$

$$x_4(2) = \frac{1393}{985} = \underline{1.41421}319398 \tag{66}$$

$$x_4korr(1) = \frac{1154}{1153}\, x(2) - \frac{1}{1153}\, x(1) = \underline{1.414213562}319\,. \tag{67}$$

Der Zugewinn an gültigen Stellen ist hier beachtlich, wie ist es für größere t? □

Aufgabe 44.11

Untersuchen Sie die Eigenschaften der Umkehrung von Gl. (45):

$$\begin{aligned} x_n(t-1) &= \frac{-d_n x_n(t) + b_n}{c_n x_n(t) - a_n}\,;\ t \in \mathbb{Z}\,; \\ & \begin{pmatrix} -d_n & b_b \\ c_n & -a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-n} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{n}\,. \end{aligned} \tag{68}$$

□

44.3 Erster Rückblick

Die Ergebnisse von Abschn. 44.2 lassen sich wie folgt zusammenfassen:
Die Rekursionsgleichung

$$x_n(t) = \frac{a_n x_n(t) + b_n}{c_n x_n(t) + d_n}\,;\; n = 1, 2, 3, \ldots\,;\; t = 0, 1, 2, \ldots \tag{69}$$

mit

$$x_n(0) = 1 \tag{70}$$

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \tag{71}$$

$$\lim_{t\to\infty} x_n(t) = \sqrt{2} \tag{72}$$

erlaubt eine gegenüber den Gln (1) bzw. (3) besser konvergierende numerische Berechnung von $\sqrt{2}$:

- $x_n(t) = x_1(n\,t)$ konvergiert werteverlaufsgleich mit $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{nt}$, (73)
- für die Anzahl $gx_n(t)$ der gültigen Stellen von $x_n(t)$ hat man

$$gx_n(t) \approx \frac{3}{4}\,nt\,. \tag{74}$$

44.4 Blick in ein tiefgelegenes Seitental

Natürlich entsteht im Zusammenhang mit Abschn. 44.3 auch die Frage nach gegenüber Gl. (1) schlechter konvergierenden Berechnungsmöglichkeiten für $\sqrt{2}$. Die folgenden Beispiele stehen stellvertretend für die dabei zu betrachtende Bandbreite.

- Beispiel 1

$$r(t) = \sum_{i=0}^{t} \binom{2i}{i} 2^{-3i} \tag{75}$$

$$= 1 + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{3}{8}\left(1 + \frac{5}{12}\left(1 + \frac{7}{16}\left(1 + \ldots + \frac{2t-1}{4t}\left(1\right)\ldots\right)\right)\right)\right) \tag{76}$$

$$\binom{r(t+1)}{p(t+1)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2t+1}{4(t+1)} \\ 0 & \frac{2t+1}{4(t+1)} \end{pmatrix} \binom{r(t)}{p(t)};\; t = 0, 1, 2, \ldots\,;\; \binom{r(0)}{p(0)} = \binom{1}{1} \tag{77}$$

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = \sqrt{2} \tag{78}$$

$$gr(t) \approx \frac{1}{3}\,t \tag{79}$$

$$\lim_{t\to\infty} dr(t) = 2\,. \tag{80}$$

- Beispiel 2

$$s(t) = \sum_{i=0}^{t} \frac{(-1)^{i+1}}{2i-1} \binom{2i}{i} 2^{-2i} \tag{81}$$

$$= 1 - \frac{-1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{3}{6}\left(1 - \frac{5}{8}\left(1 - \ldots - \frac{2t-3}{2t}\left(1\right)\ldots\right)\right)\right)\right) \tag{82}$$

$$\binom{s(t+1)}{q(t+1)} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2t-1}{2(t+1)} \\ 0 & -\frac{2t-1}{2(t+1)} \end{pmatrix} \binom{s(t)}{q(t)};\ t = 0,1,2,\ldots;\ \binom{s(0)}{q(0)} = \binom{1}{1} \tag{83}$$

$$\lim_{t\to\infty} s(t) = \sqrt{2} \tag{84}$$

$$gs(t) \approx \frac{8}{5}\lg t \approx 5\,\mathrm{ld}\,t\,. \tag{85}$$

Während Beispiel 1 etwa halb so schnell konvergiert wie die Berechnung von $\sqrt{2}$ mittels Gl. (1) bzw. Gl. (31), liefert Beispiel 2 für $t = 10^5$ nur 8 gültige Stellen!

Aufgabe 44.12

Ordnen Sie $r(t)$ und $s(t)$ in Tabelle 3 ein. □

Aufgabe 44.13

Untersuchen Sie die Konvergenzverbesserung von $r(t)$ bei linearer Korrektur gemäß Gl. (62)

$$rkorr(t) = 2\,r(t+1) - r(t)\,. \tag{86}$$

□

Aufgabe 44.14

Geben Sie für $r(t)$ und $s(t)$ Kettenbruchdarstellungen an. □

44.5 Exponentieller Aufstieg

Eine gegenüber Gl. (42) wesentlich besser konvergierende Berechnung von $\sqrt{2}$ basiert auf dem Additionstheorem Gl. (23). Für $t_1 = t_2 = t$ hat man

$$\frac{u(2t+1)}{v(2t+1)} = \frac{(u(t))^2 + 2(v(t))^2}{2u(t)v(t)} = \frac{u(t)}{v(t)}\,\frac{\left(\frac{u(t)}{v(t)}\right)^2 + 2}{2\left(\frac{u(t)}{v(t)}\right)^2}\,. \tag{87}$$

Mit $\frac{u}{v} = y_2$ und Gl. (4) folgt daraus die gebrochen rationale Rekursionsgleichung

$$y_2(t+1) = y_2(t)\,\frac{(y_2(t))^2+2}{2(y_2(t))^2}\,;\; t = 0,1,2,\ldots \tag{88}$$

$$y_2(0) = 1\,. \tag{89}$$

In analoger Weise erhält man

$$y_3(t+1) = y_3(t)\,\frac{(y_3(t))^2+6}{3(y_3(t))^2+2} \tag{90}$$

$$y_3(0) = 1\,. \tag{91}$$

$y_2(t)$ und $y_3(t)$ zeigen die in Tabelle 4 dargestellten Werteverläufe.
Die hier gegenüber $x_1(t)$ erreichte Konvergenzverbesserung ist nicht linear, sondern exponentiell:

$$y_2(t) = x_1(2^t-1) \tag{92}$$

$$y_3(t) = x_1(3^t-1)\,, \tag{93}$$

d.h.	konvergiert werteverlaufsgleich mit
$y_2(t)$ gemäß Gl. (88)	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{2^t-1}$
$y_3(t)$ gemäß Gl. (90)	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{3^t-1}$

.

Die entsprechende systematische Erweiterung

$$y_n(t+1) = y_n(t)\,\frac{\binom{n}{0}2^0(y_n(t))^n + \binom{n}{2}2^1(y_n(t))^{n-2} + \binom{n}{4}2^2(y_n(t))^{n-4} + \ldots}{\binom{n}{1}2^0(y_n(t))^n + \binom{n}{3}2^1(y_n(t))^{n-2} + \binom{n}{5}2^2(y_n(t))^{n-4} + \ldots}$$

$$n = 2,3,4,\ldots\,;\; \binom{n}{i} = 0 \text{ für } i > n \tag{94}$$

$$y_n(0) = 1 \tag{95}$$

$$\lim_{t\to\infty} y_n(t) = \sqrt{2} \tag{96}$$

konvergiert werteverlaufsgleich mit $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n^t-1}$. (97)

t	$y_2(t)$	$y_3(t)$
0	$1=\underline{1}.0$	$1=\underline{1}.0$
1	$\frac{3}{2} = \underline{1}.5$	$\frac{7}{5} = \underline{1.4}$
2	$\frac{17}{12} = \underline{1.41}\overline{6}$	$\frac{1393}{985} = \underline{1.414213}1$
3	$\frac{577}{408} = \underline{1.414215}$	$\frac{10812186007}{7645370045} = \underline{1.4142135623730950487}$
4	$\frac{665857}{470832} = \underline{1.414213562374}$	$\underline{1.41421356237309504880168872420969807856967187537}$ $\underline{694807317667971}$
5	$\underline{1.41421356237309504880168}9$	$\underline{1.41421356237309504880168872420969807856967187537}$ $\underline{694807317667973799073247846210703885038753432764}$ $\underline{157273501384623091229702492483605585073721264412}1$ $\underline{4970999358\ 3141322266592750559275579995}04$
6	$\underline{1.414213562373095048801688724209698078569718753}77$	

Tabelle 4: Werteverläufe von $y_2(t)$ und $y_3(t)$

Aufgabe 44.16

Untersuchen Sie experimentell die Verläufe von $gy_2(t)$ und $gy_3(t)$ (Anzahl der mit $y_n(t)$ erhaltenen gültigen Stellen von $\sqrt{2}$) und geben Sie dafür Näherungsausdrücke an. □

Aufgabe 44.17

- Zeigen Sie, daß für den Differenzenquotienten von $y_n(t)$ gilt

  $$dy_n(t+1) \approx (dy_n(t))^n \text{ für } t \gg 1 \text{ (vgl. [9])}. \tag{98}$$

- Wie kann Gl. (98) zu einer (nichtlinearen) Konvergenzverbesserung benutzt werden (vgl. Aufgabe 44.10)? □

Aufgabe 44.18

- Geben Sie für $y_2(t)$ und $y_3(t)$ Potenzreihendarstellungen analog zu den Gln (75) bzw. (81) sowie zugehörige ine und Kettenbruchdarstellungen an.
- Verallgemeinern Sie die erhaltenen Ergebnisse für $y_n(t);\ n = 2, 3, 4, \ldots$.
- Vergleichen Sie mit entsprechenden Potenzreihen, ine und Kettenbruchdarstellungen für $x_n(t)$ gemäß Gl. (45). □

44.6 Der Gipfel liegt in den Wolken

Aufgabe 44.19

Suchen Sie nach Rekursionsgleichungen zur numerischen Berechnung von $\sqrt{2}$, die einen Konvergenzverlauf mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{t^2}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{t^t}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{t!}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{2^{2^t}}, \ldots \tag{99}$$

besitzen. □

44.7 Blick auf den Nachbarberg $\sqrt[3]{2}$

Die numerische Berechnung von $\sqrt[3]{2}$ kann in ähnlicher Weise wie die von $\sqrt{2}$ auf Basis einer Matrizengleichung erfolgen:

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};\ t = 0, 1, 2, \ldots , \tag{100}$$

in rekursiver Form

$$\begin{pmatrix} u(t+1) \\ v(t+1) \\ w(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}; \; t = 0, 1, 2, \ldots \tag{101}$$

$$\begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \\ w(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{102}$$

In Tabelle 5 sind die Werteverläufe von $u(t), v(t)$ und $w(t)$ sowie der daraus abgeleiteten Größen

$$x_1(t) = \frac{u(t)}{v(t)} \tag{103}$$

$$x_2(t) = \frac{v(t)}{w(t)} \tag{104}$$

$$x_3(t) = \frac{2w(t)}{u(t)} \tag{105}$$

$$z_1(t) = \frac{1}{3}\left(x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)\right) \tag{106}$$

$$z_2(t) = \frac{1}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x_1(t)} + \frac{1}{x_2(t)} + \frac{1}{x_3(t)}\right)} \tag{107}$$

$$z(t) = \frac{1}{2}(z_1(t) + z_2(t)) \tag{108}$$

$$y_1(t) = \frac{u(t+1)}{u(t)} \tag{109}$$

$$y_2(t) = \frac{v(t+1)}{v(t)} \tag{110}$$

$$y_3(t) = \frac{w(t+1)}{w(t)} \tag{111}$$

zusammengestellt.

t	$u(t)$	$v(t)$	$w(t)$	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$
0	1	1	1	$\frac{1}{1} = \underline{1}.0$	$\frac{1}{1} = \underline{1}.0$	$\frac{2}{1} = 2.0$
1	5	4	3	$\frac{5}{4} = \underline{1.25}$	$\frac{4}{3} = \underline{1}.3$	$\frac{6}{5} = \underline{1.2}$
2	19	15	12	$\frac{19}{15} = \underline{1.2\overline{6}}$	$\frac{15}{12} = \underline{1.25}$	$\frac{24}{19} = \underline{1.2}6$
3	73	58	46	$\frac{73}{58} = \underline{1.25}8$	$\frac{58}{46} = \underline{1.2}6$	$\frac{92}{73} = \underline{1.2}6$
4	281	223	177	$\frac{281}{223} = \underline{1.2}6$	$\frac{223}{177} = \underline{1.259}8$	$\frac{354}{281} = \underline{1.259}7$
5	1081	858	681	$\frac{1081}{858} = \underline{1.259}06$	$\frac{858}{681} = \underline{1.2599}1$	$\frac{1362}{1081} = \underline{1.2599}4$
6	4159	3301	2620	$\frac{4159}{3301} = \underline{1.25992}123$	$\frac{3301}{2620} = \underline{1.25992}3$	$\frac{5240}{4159} = \underline{1.2599}1$
7	16001	12700	10080	$\frac{16001}{12700} = \underline{1.25992}125$	$\frac{12700}{10080} = \underline{1.2599}206$	$\frac{20160}{16001} = \underline{1.2599}212$
8	61561	48861	38781	$\frac{61561}{48861} = \underline{1.25992}100$	$\frac{48861}{38781} = \underline{1.25992}109$	$\frac{77562}{61561} = \underline{1.25992}105$
9	236845	187984	149203	$\frac{236845}{187984} = \underline{1.25992}105$	$\frac{187984}{149203} = \underline{1.259921}047$	$\frac{298406}{236845} = \underline{1.259921}045$
10	911219	723235	574032	$\frac{911219}{723235} = \underline{1.2599210}491$	$\frac{723235}{574032} = \underline{1.2599210}496$	$\frac{1148064}{911219} = \underline{1.25992}105$

t	$z_1(t)$	$z_2(t)$	$z(t)$
0	$\underline{1}.\overline{3}$	$\underline{1.2}$	$\underline{1.2\overline{6}}$
1	$\underline{1.26}\overline{1}$	$\underline{1.25}8$	$\underline{1.2599}26$
2	$\underline{1.2599}4$	$\underline{1.2599}0$	$\underline{1.25992}102$
3	$\underline{1.25992}14$	$\underline{1.25992}0$	$\underline{1.25992104}984$
4	$\underline{1.259921}056$	$\underline{1.259921}043$	$\underline{1.2599210498}949$
5	$\underline{1.259921}050$	$\underline{1.2599210}497$	$\underline{1.2599210498948}734$
6	$\underline{1.59921049}896$	$\underline{1.259921049}892$	$\underline{1.2599210498948}31646$
7	$\underline{1.2599210498}949$	$\underline{1.25992104}989483$	$\underline{1.259921049}8948731647}65$
8	$\underline{1.2599210498948}737$	$\underline{1.259921049}89487}2$	$\underline{1.259921049}89487316476}720$
9	$\underline{1.25992104989487}317$	$\underline{1.25992104989487}315$	$\underline{1.259921049894873}16476721061$
10	$\underline{1.2599210498948731}649$	$\underline{1.2599210498948731}645$	$\underline{1.259921049894873}16476721060729$

t	$y_1(t)$	$y_2(t)$	$y_3(t)$
0	$\frac{5}{1} = 5.0$	$\frac{4}{1} = 4.0$	$\frac{1}{1} = \underline{3}.0$
1	$\frac{19}{5} = \underline{3.8}$	$\frac{15}{4} = \underline{3}.7$	$\frac{12}{3} = 4.0$
2	$\frac{73}{19} = \underline{3.84}2$	$\frac{58}{15} = \underline{3.8}\overline{6}$	$\frac{46}{12} = \underline{3.8}\overline{3}$
3	$\frac{281}{73} = \underline{3.84}9$	$\frac{223}{58} = \underline{3.84}4$	$\frac{177}{46} = \underline{3.847}8$
4	$\frac{1081}{281} = \underline{3.84}6$	$\frac{858}{223} = \underline{3.847}5$	$\frac{681}{177} = \underline{3.847}4$
5	$\frac{4159}{1081} = \underline{3.8473}6$	$\frac{3301}{858} = \underline{3.8473}1$	$\frac{2620}{681} = \underline{3.847}2$
6	$\frac{16001}{4159} = \underline{3.8473}1$	$\frac{12700}{3301} = \underline{3.8473}1$	$\frac{10080}{2620} = \underline{3.84732}8$
7	$\frac{61561}{16001} = \underline{3.84732}204$	$\frac{48861}{12700} = \underline{3.847322}8$	$\frac{38781}{10080} = \underline{3.847321}4$
8	$\frac{236845}{61561} = \underline{3.84732216}$	$\frac{187984}{48861} = \underline{3.84732}1$	$\frac{149203}{38781} = \underline{3.847322}14$
9	$\frac{911219}{236845} = \underline{3.847322}0$	$\frac{911219}{236845} = \underline{3.847322}11$	$\frac{574032}{149203} = \underline{3.8473221}04$
10	$\frac{3505753}{911219} = \underline{3.8473221}03$	$\frac{3505753}{911219} = \underline{3.84732210}13$	$\frac{2208486}{574032} = \underline{3.8473221}00$

Tabelle 5: Werteverläufe von $u(t)$, $v(t)$ und $w(t)$ sowie daraus abgeleiteter Größen

Tabelle 5 zeigt:

- $x_1(t), x_2(t)$ und $x_3(t)$ konvergieren oszillierend gegen $\sqrt[3]{2}$:

  $$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = \sqrt[3]{2}\,;\ i = 1,2,3\,; \tag{112}$$

  für die Anzahl $gx_i(t)$ der dabei erhaltenen gültigen Stellen gilt in Näherung

  $$gx_i(t) \approx \frac{7}{8}\,t\,;\ i = 1,2,3\,. \tag{113}$$

- Arithmetische Mittelwertbildungen aus $x_1(t), x_2(t)$ und $x_3(t)$ führen zu wesentlich besser konvergierenden Größen, so hat man

  $$\lim_{t\to\infty} z_1(t) = \lim_{t\to\infty} z_2(t) = \lim_{t\to\infty} z(t) = \sqrt[3]{2} \tag{114}$$

  mit

  $$gz_i(t) \approx \frac{7}{4}\,t\,;\ i = 1,2 \tag{115}$$

  $$gz(t) \approx \frac{7}{3}\,t\,. \tag{116}$$

- $y_1(t), y_2(t)$ und $y_3(t)$ konvergieren oszillierend

  $$\lim_{t\to\infty} y_i(t) = 2^{\frac{0}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}};\ i = 1,2,3 \tag{117}$$

  $$gy_i(t) \approx \frac{7}{8}\,t\,;\ i = 1,2,3\,; \tag{118}$$

  durch arithmetische Mittelwertbildung ist völlig analog zu den $x_i(t)$ eine wesentliche Konvergenzverbesserung zu erreichen.

Aufgabe 44.20

- Untersuchen Sie Werteverläufe der Differenzenquotienten von $x_1(t), x_2(t)x_3(t), z_1(t)$, $z_2(t), z(t), y_1(t), y_2(t)$ und $y_3(t)$:
  - $dx_i(t), dz(t)$ und $dy_i(t)$ zeigen einen auf den ersten Blick stochastischen Werteverlauf. Eine 2D–Darstellung von $dx_i(t)\,;\ i = 1,2,3$ mittels (A1)

pset$(0) :=$ pset $(dx_i(0), dx_i(1))$
$j = 1(1)m$
pset$(j) :=$ pset $(dx_i(2j), dx_i(2j+1))$
Connect $p(j-1)$ with $p(j)$ by a straight line
pattern$(dx_i(t), m) :=$ resulting polygon with m sides in 2D

(A1)

liefert jedoch überraschend systematisch aufgebaute Muster: Bilder 1–3. Hier eröffnet sich eine produktive Quelle für interessante Computergraphiken: Bilder 4–.

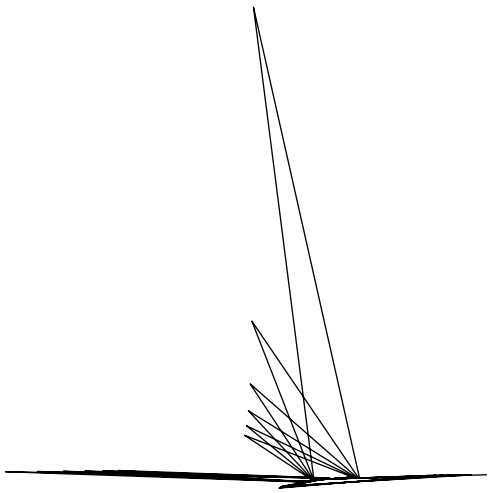


Bild 1: 2D(A1)$x_1(t)$; $m = 50$

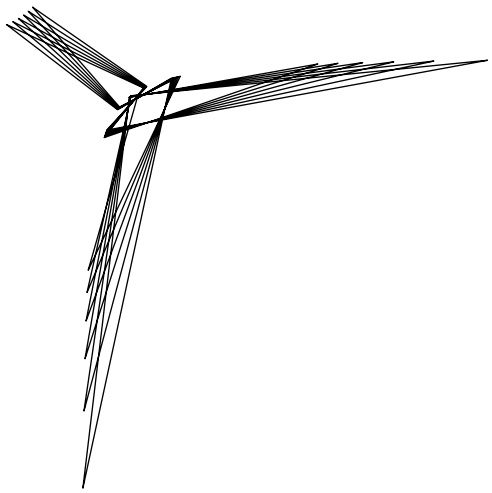


Bild 2: 2D(A1)$x_2(t)$; $m = 50$

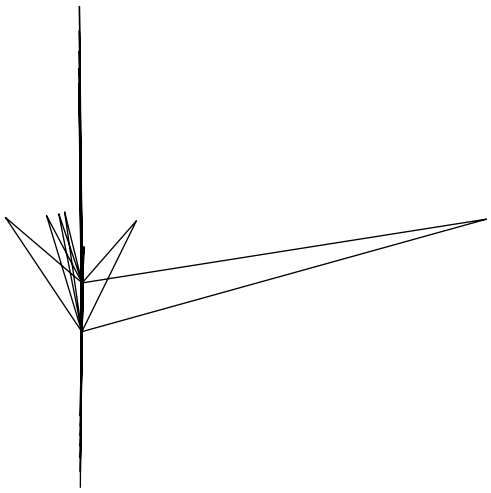


Bild 3: 2D(A1)$x_3(t)$; $m = 50$

– $dz_i(t)\,;\ i = 1, 2$ konvergiert oszillierend:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} dz_i(t) &= u(2)\cdot 2^{\frac{0}{3}} + v(2)\cdot 2^{\frac{1}{3}} + w(2)\cdot 2^{\frac{2}{3}} \\ &= 19\cdot 2^{\frac{0}{3}} + 15\cdot 2^{\frac{1}{3}} + 12\cdot 2^{\frac{2}{3}}\,. \end{aligned} \tag{119}$$

- Interpretieren Sie die erhaltenen Ergebnisse. □

44.8 Plötzlich öffnet sich die Sicht auf $\sqrt[4]{2}, \sqrt[5]{2}, \ldots$

Die Matrizengleichung

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \\ \vdots \\ u_{n-1}(t) \\ u_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & \ldots & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};\ t = 0, 1, 2, \ldots \tag{120}$$

in rekursiver Darstellung

$$\begin{pmatrix} u_1(t+1) \\ u_2(t+1) \\ u_3(t+1) \\ u_4(t+1) \\ \vdots \\ u_{m-1}(t+1) \\ u_m(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & \ldots & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \\ \vdots \\ u_{m-1}(t) \\ u_m(t) \end{pmatrix};\ t = 0, 1, 2, \ldots \tag{121}$$

$$\begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \\ u_3(0) \\ u_4(0) \\ \vdots \\ u_{m-1}(0) \\ u_m(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{122}$$

ist Basis für die numerische Berechnung von $\sqrt[m]{2}$.

Mit

$$x_1(t) = \frac{u_1(t)}{u_2(t)} \tag{123}$$

$$x_2(t) = \frac{u_2(t)}{u_3(t)} \tag{124}$$

$$\vdots$$

$$x_{m-1}(t) = \frac{u_{m-1}(t)}{u_m(t)} \tag{125}$$

$$x_m(t) = 2\,\frac{u_m(t)}{u_1(t)} \tag{126}$$

$$z_1(t) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{m} x_i(t) \tag{127}$$

$$(z_2(t))^{-1} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{m} (x_i(t))^{-1} \tag{128}$$

$$z(t) = \frac{1}{2}(z_1(t) + z_2(t)) \tag{129}$$

$$y_i(t) = \frac{u_i(t+1)}{u_i(t)}\,;\ i = 1, 2, \ldots, m \tag{130}$$

erhält man:

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = \lim_{t\to\infty} z_1(t) = \lim_{t\to\infty} z_2(t) = \lim_{t\to\infty} z(t) = \sqrt[m]{2}\,;\ i = 1, 2, \ldots, m \tag{131}$$

$$gx_i(t) \approx t \tag{132}$$

$$gz_1(t) \approx gz_2(t) \approx 2t \tag{133}$$

$$gz(t) \approx 3t \tag{134}$$

und

$$\lim_{t\to\infty} y_i(t) = \sum_{j=0}^{m-1} 2^{\frac{j}{m}}\,;\ i = 1, 2, \ldots, m\,. \tag{135}$$

Aufgabe 44.21

Untersuchen Sie wie in Aufgabe 44.20 die Werteverläufe der zugehörigen Differenzenquotienten. □

Aufgabe 44.22

Ersetzt man in Gl. (120) bzw. (121) die $m \times m$–Generatormatrix

$$\underline{g}(2,m) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{136}$$

durch

$$\underline{g}(a,m) = \begin{pmatrix} 1 & a & a & a & \dots & a & a \\ 1 & 1 & a & a & \dots & a & a \\ 1 & 1 & 1 & a & \dots & a & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix};\ a > 1 \tag{137}$$

so ist

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = \lim_{t\to\infty} z_j(t) = \lim_{t\to\infty} z(t) = \sqrt[m]{a};\ i = 1,2,\dots,m;\ j = 1,2 \tag{138}$$

$$\lim_{t\to\infty} y_i(t) = \sum_{j=0}^{m-1} a^{\frac{j}{m}};\ j = 1,2,3,\dots,m\,. \tag{139}$$

Untersuchen Sie das zugehörige Konvergenzverhalten. □

Aufgabe 44.23

Was geschieht, wenn im oberen Dreiecksteil der Generatormatrix beliebige voneinander verschiedene Zahlen stehen?

Beispiel:

$$\underline{g}(a,b,c,3) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1 & 1 & c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{140}$$

mit

$$a = 1, b = 2, c = 3 \tag{141}$$

Tabelle 6 zeigt die zugehörigen Werteverläufe von $u(t), v(t), w(t), x_1(t), x_2(t), y_1(t)$, $y_2(t)$ und $y_3(t)$.
Aus Tabelle 6 entnimmt man:
$\lim\limits_{t\to\infty} x_1(t)$ ist die größte reelle Lösung der kubischen Gleichung

$$\begin{aligned} 7x^3 - 6x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad & x_1 = 0.827326835 \\ & x_2 = 0.172673165 \\ & x_3 = -1\,. \end{aligned} \tag{142}$$

- Wie sind in diesem Zusammenhang $\lim\limits_{t\to\infty} x_2(t)$ und $\lim\limits_{t\to\infty} y_1(t) = \lim\limits_{t\to\infty} y_2(t) = \lim\limits_{t\to\infty} y_3(t)$ zu interpretieren?
- Für den allgemeinen Fall Gl. (140) lautet die zugehörige kubische Gleichung

$$(c^2 - b)x^3 + (a + c - 2b)cx^2 + (a + b - 2c)bx + (b^2 - a^2c) = 0\,. \tag{143}$$

- Notieren Sie diese Gleichung in Matrizenschreibweise.
- Untersuchen Sie den Zusammenhang von $u(t)$, $v(t)$ und $w(t)$ mit den Lösungen x_1, x_2 und x_3 von Gl. (143). □

t	$u(t)$	$v(t)$	$w(t)$	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$y_1(t)$	$y_2(t)$	$y_3(t)$
0	1	1	1	1.0	1.0	4.0	5.0	3.0
1	4	5	3	0.8	$1.\overline{6}$	3.75	3.6	4.0
2	15	18	12	$0.8\overline{3}$	1.5	3.8	3.8	3.75
3	57	69	45	0.826	$1.5\overline{3}$	3.78	3.78	3.8
4	216	261	171	0.8275	1.526	3.791	3.793	3.78
5	819	990	648	0.8278	$1.527\overline{7}$	3.79120	3.790	3.7916
6	3105	3753	2457	0.82733	1.5274	3.7913	3.7913	3.79120
7	11772	14229	9315	0.827323	1.52753	3.791284	3.79127	3.7913
8	44631	53946	35316	0.827327	1.527522	3.791288	3.79129	3.791284
9	169209	204525	133893	0.8273267	1.5275257	3.7912876	3.7912871	3.791288
10	641520	775413	507627	0.82732685	1.5275251	3.79128787	3.7912879	3.7912879

Tabelle 6: Werteverläufe von $u(t), v(t), w(t), x_1(t), x_2(t), y_1(t), y_2(t)$ und $y_3(t)$

Aufgabe 44.24

- Geben Sie in Analogie zu Gl. (27) Darstellungen der Generatormatrix $\underline{g}(2,m)$ (Gl. (136)) als Produkt zweier Boolescher Matrizen an.
- Interpretieren Sie diese Produktdarstellungen in Bezug auf die Berechnung von $\sqrt[m]{2}$.

Lösungsskizze:

- Faktorisierungsvariante 1

$$\begin{array}{c} \\ \underline{g}(2,2)\;\underline{g}(2,3)\;\underline{g}(2,4)\;\underline{g}(2,5)\;\underline{g}(2,6) \end{array}\!\!\left|\begin{array}{cccccc} 1&2&2&2&2&2\\ 1&1&2&2&2&2\\ 1&1&1&2&2&2\\ 1&1&1&1&2&2\\ 1&1&1&1&1&2\\ 1&1&1&1&1&1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccccc} 1&1&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0 \end{array}\right| \left|\begin{array}{cccccc} 1&1&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&1 \end{array}\right| \tag{144}$$

- Faktorisierungsvariante 2

$$\left|\begin{array}{cccccc} 1&2&2&2&2&2\\ 1&1&2&2&2&2\\ 1&1&1&2&2&2\\ 1&1&1&1&2&2\\ 1&1&1&1&1&2\\ 1&1&1&1&1&1 \end{array}\right|\!\!\begin{array}{c} \\ \underline{g}(2,6)\;\underline{g}(2,5)\;\underline{g}(2,4)\;\underline{g}(2,3)\;\underline{g}(2,2) \end{array} = \left|\begin{array}{cccccc} 1&1&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&1 \end{array}\right| \left|\begin{array}{cccccc} 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 1&1&1&1&1&1 \end{array}\right| \tag{145}$$

- Faktorisierungsvariante 3 □

Aufgabe 44.25

Die Rekursionsgleichung (121)

$$\vec{u}(t+1) = \underline{g}(2,m)\vec{u}(t)\,;\; t \in \mathbb{N}_0 \tag{146}$$

läßt sich umkehren:

$$\vec{u}(t-1) = \underline{g}(2,m)^{-1}\vec{u}(t)\,;\; t \in \mathbb{Z}\,. \tag{147}$$

Dabei hat die inverse Generatormatrix nachstehenden bandförmigen Aufbau

$$\underline{g}(2,m)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ +1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{148}$$

Untersuchen Sie experimentell (analog zu Abschn. 44.7 und 44.8) die bei dieser „Rückwärtsrechnung“ auftretenden Effekte (vgl. [10]). □

Aufgabe 44.26

Übertragen Sie die in den Abschnitten	für die Berechnung von $\sqrt{2}$ vorgestellte Grundidee des
44.2 und 44.3	linearen Aufstiegs Gln (31) und (42) → Gln (45) und (69)
44.5	exponentiellen Aufstiegs Gl. (69) → Gl. (94)

auf die Berechnung von $\sqrt[m]{2}$ bzw. $\sqrt[m]{a}$.

Lösungsskizze für $m = 5$

- Basis
  - Rekursionsgleichung

$$\begin{pmatrix} u_1(t+1) \\ u_2(t+1) \\ u_3(t+1) \\ u_4(t+1) \\ u_5(t+1) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\underline{g}} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \\ u_5(t) \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \\ u_3(0) \\ u_4(0) \\ u_5(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{149}$$

  - Kompaktdarstellung

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \\ u_5(t) \end{pmatrix} = \underline{g}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{150}$$

$$x_i(t) = \frac{u_i(t)}{u_{i+1}(t)} \text{ für } i = 1,2,3,4\,;\; x_5(t) = \frac{2u_5(t)}{u_1(t)} \tag{151}$$

$$\overline{x}(t) = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i(t) \tag{152}$$

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = \lim_{t\to\infty} \overline{x}(t) = \sqrt[5]{2}\,;\; i = 1,2,\ldots,5 \tag{153}$$

- Linearer Aufstieg
  - Rekursionsgleichung

$$\begin{pmatrix} v_1(t+1) \\ v_2(t+1) \\ v_3(t+1) \\ v_4(t+1) \\ v_5(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(n) & 2v_5(n) & 2v_4(n) & 2v_3(n) & 2v_1(n) \\ v_2(n) & v_1(n) & 2v_5(n) & 2v_4(n) & 2v_3(n) \\ v_3(n) & v_2(n) & v_1(n) & 2v_5(n) & 2v_4(n) \\ v_4(n) & v_3(n) & v_2(n) & v_1(n) & 2v_5(n) \\ v_5(n) & v_4(n) & v_3(n) & v_2(n) & v_1(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \\ v_4(t) \\ v_5(t) \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \\ v_3(0) \\ v_4(0) \\ v_5(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{154}$$

$$= \underline{g}^n \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \\ v_4(t) \\ v_5(t) \end{pmatrix};\; \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \\ v_3(0) \\ v_4(0) \\ v_5(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{155}$$

  - Kompaktnotation

$$\begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \\ v_4(t) \\ v_5(t) \end{pmatrix} = \underline{g}^{nt} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{156}$$

$$y_i(t) = \frac{v_i(t)}{v_{i+1}(t)} \text{ für } i = 1,2,3,4\,;\; y_5(t) = \frac{2v_5(t)}{v_1(t)} \tag{157}$$

$$\overline{y}(t) = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} y_i(t) \tag{158}$$

$$\lim_{t\to\infty} y_i(t) = \lim_{t\to\infty} \overline{y}(t) = \sqrt[5]{2}\,;\; i = 1,2,\ldots,5 \tag{159}$$

- Exponentieller Aufstieg
  - Rekursionsgleichung

$$\begin{pmatrix} w_1(t+1) \\ w_2(t+1) \\ w_3(t+1) \\ w_4(t+1) \\ w_5(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1(t) & 2w_5(t) & 2w_4(t) & 2w_3(t) & 2w_1(t) \\ w_2(t) & w_1(t) & 2w_5(t) & 2w_4(t) & 2w_3(t) \\ w_3(t) & w_2(t) & w_1(t) & 2w_5(t) & 2w_4(t) \\ w_4(t) & w_3(t) & w_2(t) & w_1(t) & 2w_5(t) \\ w_5(t) & w_4(t) & w_3(t) & w_2(t) & w_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ w_3(t) \\ w_4(t) \\ w_5(t) \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} w_1(0) \\ w_2(0) \\ w_3(0) \\ w_4(0) \\ w_5(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{160}$$

$$= \underline{g}^{2^t} \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ w_3(t) \\ w_4(t) \\ w_5(t) \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} w_1(0) \\ w_2(0) \\ w_3(0) \\ w_4(0) \\ w_5(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{161}$$

  - Kompaktnotation

$$\begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ w_3(t) \\ w_4(t) \\ w_5(t) \end{pmatrix} = \underline{g}^{2^t-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{162}$$

$$z_i(t) = \frac{w_i(t)}{w_{i+1}(t)} \text{ für } i = 1,2,3,4\,;\; z_5(t) = \frac{2w_5(t)}{w_1(t)} \tag{163}$$

$$\overline{z}(t) = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{5} z_i(t) \tag{164}$$

$$\lim_{t\to\infty} z_i(t) = \lim_{t\to\infty} \overline{z}(t) = \sqrt[5]{2}\,;\; i = 1,2,\ldots,5 \tag{165}$$

□

Aufgabe 44.27

Die Berechnung von $\sqrt[m]{2}$ bzw. $\sqrt[m]{a}$ auf Grundlage der Rekursionsgleichungen (149), (154) und (160) besitzt einen großen Nachteil:

Zunächst sind sehr große Zahlen $u_i(t)$, $v_i(t)$ bzw. $w_i(t)$ zu berechnen, aus denen dann durch Division $x_i(t)$, $y_i(t)$ bzw. $z_i(t)$ erhalten wird.

- Beseitigen Sie diesen Nachteil durch Einführung einer geeigneten Normierung in den Rekursionsgleichungen.

  Lösungsidee für $m = 5$ und $\sqrt[m]{a}$:

  Aus Gl. (160) folgt mit Gl. (163) in Analogie zu Aufgabe 44.22 die normierte Rekursionsgleichung

$$\begin{pmatrix} s_1(t+1) \\ s_2(t+1) \\ s_3(t+1) \\ s_4(t+1) \\ s_5(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) & a & a\,x_4(t) & a\,x_3(t) & a\,x_1(t) \\ x_2(t) & x_1(t) & a & a\,x_4(t) & a\,x_3(t) \\ x_3(t) & x_2(t) & x_1(t) & a & a\,x_4(t) \\ x_4(t) & x_3(t) & x_2(t) & x_1(t) & a \\ 1 & x_4(t) & x_3(t) & x_2(t) & x_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{166}$$

$$x_i(t+1) = \frac{s_i(t+1)}{s_5(t+1)};\ i = 1,2,3,4 \tag{167}$$

- Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten dieser Lösung.

  Lösungsskizze:

  - $\lim\limits_{t\to\infty} s_i(t) = m \cdot a^{\frac{2m-1-i}{m}};\ i = 1(1)m$ (168)
  - $\lim\limits_{t\to\infty} x_i(t) = a^{\frac{m-i}{m}};\ i = 1(1)m-1$ (169)
  - $gx_i(t) \sim 2^t;\ i = 1(1)m-1$ (170)
  - $gx_i(t) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ für $a \in \mathbb{N};\ i = 1(1)m-1$ (171)
  - Werteverläufe von $s_4(t)$, $s_5(t)$, $x_4(t)$ und $dx_4(t)$ für $m = 5;\ a = 37$

t	$s_4(t)$	$s_5(t)$	$x_4(t)$	$dx_4(t)$
0			1	
1				

Literatur

[1] J. Aczél. *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendung.* Berlin 1961, Abschn. 3.2.3

[2] G. Bosse. *Grundlagen der Elektrotechnik. Band3: Wechselstromlehre, Vierpoltheorie und Leitungstheorie.* Berlin, Heidelberg, New York 1996

[3] W. Weißgerber. *Elektrotechnik für Ingenieure. Band 3: Ausgleichsvorgänge, Fourieranalyse, Vierpoltheorie.* Wiesbaden 1999

[4] E.P. Stoschek. *Abenteuer Algorithmus. Teil 2.* Dresden 1997, Abschn. 4

[5] Ebenda, Abschn. 2

[6] E.W. Weisstein. *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics.* Boca Raton, London, New York, Washington 1999, p. 315–319. Dort umfangreiches Literaturverzeichnis.

[7] [4], Abschn. 3.5.2

[8] E.P. Stoschek. *Abenteuer Algorithmus. Teil 3.* Dresden 1998, Abschn. 2

[9] E.P. Stoschek. *Abenteuer Algorithmus.* Dresden 1996, Abschn. 3

[10] M. Fink. *Zeitumkehr – Akustik.* Spektrum der Wissenschaft 21(2000)3, S. 68–74