Unit 4 Ein Sandkastenspiel: Nullstellen eines reellen Polynoms

Zu umkreisendes Problem:

Unter welchen Bedingungen

$$\left\{\begin{array}{l}\text{kann eine Nullstelle}\\ \text{können Nullstellen}\\ \text{können alle n Nullstellen}\end{array}\right\} \text{ eines reellen Polynoms in x}$$

$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ durch einen reellen Ausdruck in den a_i,

allein mittels der vier arithmetischen Grundoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division, ohne Wurzeloperationen, dargestellt werden und wie; alles möglichst simple and beautiful?

1. Station

Besitzt ein reelles Polynom n-ten Grades in x nur eine Mehrfachnullstelle, so lässt sich diese in Determinantendarstellung allein unter Benutzung der vier arithmetischen Grundoperationen, ohne Wurzeloperationen, berechnen.

Im folgenden ist das für n=6 gezeigt, die Verallgemeinerung für beliebige n ist unmittelbar zu erkennen.

$$p_6(x) = x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

1. $\underline{\text{If}}\ p_6(x) = (x - x_1)(x - x_2)^5\ \underline{\text{then}}\ -4x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_5 & 3a_3 \\ 6 & 4a_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_5 & 2a_4 \\ 6 & 5a_5 \end{vmatrix}}$.

2. $\underline{\text{If}}\ p_6(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)^4\ \underline{\text{then}}\ -3x_3 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 5a_1 \\ 6 & 5a_5 & 4a_4 & 2a_2 \\ 0 & a_5 & 2a_4 & 4a_2 \\ 0 & 6 & 5a_5 & 3a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 \\ 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 \\ 0 & a_5 & 2a_4 & 3a_3 \\ 0 & 6 & 5a_5 & 4a_4 \end{vmatrix}}$.

3. $\underline{\text{If}}\ p_6(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)^3$

$$\underline{\text{then}}\ -2x_4 = \frac{\begin{vmatrix} a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 & 5a_1 & 0 \\ 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & 0 \\ 0 & a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 & 6a_0 \\ 0 & 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & a_1 \\ 0 & 0 & a_5 & 2_4 & a3a_3 & 5a_1 \\ 0 & 0 & 6 & 5a_5 & 4a_4 & 2a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 & 5a_1 & 6a_0 \\ 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 \\ 0 & a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 & 5a_1 \\ 0 & 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 \\ 0 & 0 & a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 \\ 0 & 0 & 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 \end{vmatrix}} .$$

4. If $p_6(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)^2$

$$\text{then } -x_5 = \frac{\begin{vmatrix} a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 & 5a_1 & 6a_0 & 0 & 0 \\ 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 & 5a_1 & 6a_0 & 0 \\ 0 & 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 & 5a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 & 6a_0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & a_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 & 5a_1 & 6a_0 & 0 & 0 \\ 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 & 5a_1 & 6a_0 & 0 \\ 0 & 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 & 5a_1 & 6a_0 \\ 0 & 0 & 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 & 5a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 \end{vmatrix}} .$$

Offenes Problem:
Welche Informationen liefern diese Gleichungen über $p_n(x)$, wenn die jeweils angenommenen Voraussetzungen über ihre Linearstruktur nicht erfüllt sind?

2. Station
An interesting and extendable special case

It is known that the given integer polynomial of 3rd order in x

$p_3(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ (S.1)

has the product structure

$p_3(x) = (x - x_1)(x - x_2)^2$; $x_1 \neq x_2$ (S.2)

(one simple zero, two double zeros).

Integer polynomial: x, all a_i , and all x_j are integers.

Example for equ. (S1):

$p_3(x) = x^3 + x^2 - 8x - 12 = 0$ (S.3.1)

results in

$x_1 = 3$; $x_2 = -2$ (S.3.2)

and

$p_3(x) = (x - 3)(x + 2)^2$. (S.3.3)

Find a simplest procedure for calculation of the zeros x_1 and x_2 using only the four arithmetic operations addition, subtraction multiplication and division, no root operations!

Solution

Set $v = - \text{sgn}(a_2 * a_3) = - \text{sgn}(p_3'(0) * p_3(0))$ (S.4)

Set $g = \gcd(\text{abs}(a_2), \text{abs}(a_3)) = \gcd(\text{abs}(p_3'(0)), \text{abs}(p_3(0)))$ (S.5)

If g odd then set r = 1, else set r = 2 (S.6)

Set $x_2 = v * g / r$ (S.7)

Set $x_1 = v * (\text{abs}(a_1) - 2 * \text{abs}(x_2))$ (S.8)

Explain this solution step by step.

Extension 1

Extend the solution equs (S.4) – (S.8) of the equs (S.1), (S.2) on the

Problem 1

It is known that the given integer polynomial of 6^{th} order in x

$p_6(x) = x^6 + a_1x^5 + a_2x^4 + a_3x^3 + a_4x^2 + a_5x + a_6$ (S.9)

has the product representation

$p_6(x) = (x - x_1)(x - x_2)^2(x - x_3)^3$; x_i in pairs distinct (S.10)

(one simple zero, 2 double zeros and 3 threefold zeros).

Find a simplest procedure for the calculation of the zeros

x_1, x_2 and x_3 using only the four arithmetic operations addition, subtraction multiplication and division, no root operations!

Extension 2

From integer polynomial (S.1) + (S.2) and (S.9) + (S.10), resp. to real polynomials with the same structure.

Problem 2

Find a determinant representation for the zeros

** x_1 and x_2 of the real polynomial (S.1) + (S.2)

** x_1, x_2 and x_3 of the real polynomial (S.9) + (S.10)

using only the four arithmetic operations addition, subtraction multiplication and division, no root operations!

Solution

$p_3(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ (S.1)

$p_3(x) = (x - x_1)(x - x_2)^2$; $x_1 \neq x_2$ (S.2)

$\rightarrow$

$$-x_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_2 & a_1 & 3a_0 \\ 3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & a_1 & 3a_0 \\ 3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} \; ; \; 2x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_2 & a_1 & 3a_0 \\ 3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & a_1 & 3a_0 \\ 3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} \qquad \text{(S.2.1;2)}$$

3. Station

Gegeben

$p_5(x) = x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

mit der Linearstruktur

$p_5(x) = (x - x_1)^{k}{}_1(x - x_2)^{k}{}_2 \; ; \; x_1 \neq x_2 \; ; \; k_1+k_2 = 5$

Gesucht

* $q_2(p_5(x),x) = (x - x_1)(x - x_2)$

** x_1 und x_2

Lösungen

*)

$$q_2(p_5(x),x) = (x - x_1)(x - x_2)$$

$$= x^2 + \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & a_4 \\ a_4 & 2a_3 & 3a_2 \\ 5 & 4a_4 & 3a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_4 & 2a_3 & 3a_2 \\ 5 & 4a_4 & 3a_3 \end{vmatrix}} x^1 + \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_4 & a_3 \\ a_4 & 2a_3 & 3a_2 \\ 5 & 4a_4 & 3a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_4 & 2a_3 & 3a_2 \\ 5 & 4a_4 & 3a_3 \end{vmatrix}} x^0$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} x^0 & x^1+a_4x^0 & x^2+a_4x^1+a_3x^0 \\ a_4 & 2a_3 & 3a_2 \\ 5 & 4a_4 & 3a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_4 & 2a_3 & 3a_2 \\ 5 & 4a_4 & 3a_3 \end{vmatrix}}$$

**)

$$x_{1;2} = \frac{(k_{2;1}-1)a_4 - k_{2;1}\dfrac{\begin{vmatrix} a_4 & 3a_2 \\ 5 & 3a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_4 & 2a_3 \\ 5 & 4a_4 \end{vmatrix}}}{k_{1;2} - k_{2;1}}$$

$$x_{1;2} = \frac{1}{k_{1;2} - k_{2;1}} \frac{\begin{vmatrix} 0 & k_{2;1} & (k_{2;1}\text{-}1)a_4 \\ a_4 & 2a_3 & 3a_2 \\ 5 & 4a_4 & 3a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_4 & 2a_3 & 3a_2 \\ 5 & 4a_4 & 3a_3 \end{vmatrix}}$$

Offenes Problem:
Welche Informationen liefern diese Gleichungen über $p_5(x)$, wenn die angenommenen Voraussetzungen über ihre Linearstruktur nicht erfüllt sind?

Beispiel
$p_5(x) = x^5 - x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x + 4$
$= (x - x_1)^2(x - x_2)^3$; $k_1 = 2$, $k_2 = 3$ $\rightarrow$
*) $q_2(p_5(x),x) = x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$
**) $x_1 = 2$; $x_2 = -1$

3. Station

Gegeben
$p_6(x) = x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$
Fall 1
Linearstruktur
$p_6(x) = (x - x_1)^{k1}$; $k_1 = 6$ $\rightarrow$

*) $q_1(p_6(x),x) = (x - x_1) = x + \frac{a_5}{6}$

**) $x_1 = -\frac{a_5}{6}$

Fall 2

Linearstruktur

$p_6(x) = (x - x_1)^{k}{}_1 \ (x - x_2)^{k}{}_2 \ ; \ x_1 \neq x_2 \ ; \ k_1 + k_2 = 6 \ ; \ k_1 \neq k_2$

*)

$$q_2(p_6(x),x) = (x - x_1)(x - x_2)$$

$$= x^2 + \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & a_5 \\ a_5 & 2a_4 & 3a_3 \\ 6 & 5a_5 & 4a_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_5 & 2a_4 & 3a_3 \\ 6 & 5a_5 & 4a_4 \end{vmatrix}} x^1 + \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_5 & a_4 \\ a_5 & 2a_4 & 3a_3 \\ 6 & 5a_5 & 4a_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_5 & 2a_4 & 3a_3 \\ 6 & 5a_5 & 4a_4 \end{vmatrix}} x^0$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} x^0 & x^1 + a_5 x^0 & x^2 + a_5 x^1 + a_4 x^0 \\ a_5 & 2a_4 & 3a_3 \\ 6 & 5a_5 & 4a_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_5 & 2a_4 & 3a_3 \\ 6 & 5a_5 & 4a_4 \end{vmatrix}}$$

**)

$$x_{1;2} = \frac{(k_{2;1} - 1)a_5 - k_{2;1} \dfrac{\begin{vmatrix} a_5 & 3a_3 \\ 6 & 4a_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_5 & 2a_4 \\ 6 & 5a_5 \end{vmatrix}}}{k_{1;2} - k_{2;1}}$$

$$x_{1;2} = \frac{1}{k_{1;2} - k_{2;1}} \frac{\begin{vmatrix} 0 & k_{2;1} & (k_{2;1}\text{-}1)a_5 \\ a_5 & 2a_4 & 3a_3 \\ 6 & 5a_5 & 4a_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_5 & 2a_4 & 3a_3 \\ 6 & 5a_5 & 4a_4 \end{vmatrix}}$$

Beispiel 1

$p_6(x) = x^6 - 8x^5 + 26x^4 - 44x^3 + 41x^2 - 20x + 4$

$= (x - x_1)^2(x - x_2)^4 \quad \rightarrow$

*) $q_2(p_6(x),x) = (x - x_1)(x - x_2)$

$$= x^2 + \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -8 \\ -8 & 52 & -132 \\ 6 & -40 & 104 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -8 & 52 & -132 \\ 6 & -40 & 104 \end{vmatrix}} x + \frac{\begin{vmatrix} 1 & -8 & 26 \\ -8 & 52 & -132 \\ 6 & -40 & 104 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -8 & 52 & -132 \\ 6 & -40 & 104 \end{vmatrix}}$$

$$= x^2 + \frac{-24}{8}x + \frac{16}{8} = x^2 - 3x + 2$$

**)

$$x_1 = \frac{1}{-2} \frac{\begin{vmatrix} 0 & 4 & -24 \\ -8 & 52 & -132 \\ 6 & -40 & 104 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -8 & 52 & -132 \\ 6 & -40 & 104 \end{vmatrix}} = \frac{1}{-2} * \frac{-32}{8} = 2$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & -8 \\ -8 & 52 & -132 \\ 6 & -40 & 104 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -8 & 52 & -132 \\ 6 & -40 & 104 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2} * \frac{16}{8} = 1$$

Beispiel 2

$p_6(x) = x^6 - 9x^5 + 33x^4 - 63x^3 + 66x^2 - 36x + 8$

$= (x - x_1)^3(x - 1)^3 \quad \rightarrow$

*) $q_2(p_6(x),x) = x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$

**) x_1 und x_2 sind mit der vorliegenden Determinantenformel nicht berechenbar!

4. Station

Eine wichtige Verallgemeinerung auf dem Wege zur allgemeinen Lösung des Problems:

Unter welchen Bedingungen

$$\left\{\begin{array}{l} \text{kann eine Nullstelle} \\ \text{können Nullstellen} \\ \text{können alle n Nullstellen} \end{array}\right. \quad \text{eines reellen Polynoms in x}$$

$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ durch einen reellen Ausdruck in den a_i,

allein mittels der vier arithmetischen Grundoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division, ohne Wurzeloperationen, dargestellt werden und wie, alles möglichst simple and beautiful?

Gegeben

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \; ; \; a_n = 1$$

mit der Linearstruktur

$$p_n(x) = (x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \; ; \; x_1 \neq x_2 \; ; \; k_1 + k_2 = n \; ; \; k_1 \neq k_2$$

Gesucht

*) $q_2(p_n(x), x) = (x - x_1)(x - x_2)$

**) x_1 und x_2

S&b Lösung

*)

$$q_2(p_n(x), x) = (x - x_1)(x - x_2)$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 1 & x+a_{n-1} & x^2+a_{n-1}x+a_{n-2} \\ a_{n-1} & 2a_{n-2} & 3a_{n-3} \\ n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)a_{n-2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_{n-1} & 2a_{n-2} & 3a_{n-3} \\ n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)a_{n-2} \end{vmatrix}}$$

**)

$$x_{1;2} = \frac{1}{k_{1;2} - k_{2;1}} \frac{\begin{vmatrix} 0 & k_{2;1} & (k_{2;1}-1)a_{n-1} \\ a_{n-1} & 2a_{n-2} & 3a_{n-3} \\ n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)a_{n-2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_{n-1} & 2a_{n-2} & 3a_{n-3} \\ n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)a_{n-2} \end{vmatrix}}$$

Offene Probleme:
Welche Informationen liefern diese Gleichungen über $p_n(x)$, wenn die angenommenen Voraussetzungen über ihre Linearstruktur nicht erfüllt sind?
Anwendungen in Wissenschaft und Engineering?

5. Station

Das „Gegenstück“ zu $q_2(p_6(x),x)$

$$r_4(p_6(x),x) = ggT(p_6(x),p_6'(x)) = \frac{p_6(x)}{q_2(p_6(x),x)} = (x-x_1)^{k_1 \neg 1}(x-x_2)^{k_2 \neg 1}$$

$$= x^4 + \frac{\begin{vmatrix} a_5 & 3a_3 \\ 6 & 4a_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_5 & 2a_4 \\ 6 & 5a_5 \end{vmatrix}} x^3 + \frac{\begin{vmatrix} a_5 & 4a_2 \\ 6 & 3a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_5 & 2a_4 \\ 6 & 5a_5 \end{vmatrix}} x^2 + \frac{\begin{vmatrix} a_5 & 5a_1 \\ 6 & 2a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_5 & 2a_4 \\ 6 & 5a_5 \end{vmatrix}} x + \frac{\begin{vmatrix} a_5 & 6a_0 \\ 6 & a_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_5 & 2a_4 \\ 6 & 5a_5 \end{vmatrix}}$$

$$a \neg b = \begin{cases} a-b & \text{for } \begin{cases} a > b \\ a \leq b \end{cases} \\ 0 \end{cases}$$

Beispiel

$p_6(x) = x^6 - 8x^5 + 26x^4 - 44x^3 + 41x^2 - 20x + 4$

$= (x - x_1)^2(x - x_2)^4 \quad \rightarrow$

$q_2(p_6(x),x) = x^2 - 3x + 2$

$r_4(p_6(x),x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$

Offenes Problem:

Kompaktdarstellung von $r_4(p_6(x),x)$ wie $q_2(p_6(x),x)$ in einer Determinante.

Lösungshinweis:

$p_3(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$

$= (x - x_1)(x - x_2)^2$; $x_1 \neq x_2 \quad \rightarrow$

$$q_2(p_3(x),x) = (x - x_1)(x - x_2)$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} x^0 & x^1+a_2x^0 & x^2+a_2x^1+a_1x^0 \\ a_2 & 2a_1 & 3a_0 \\ 6 & 5a_5 & 4a_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_2 & 2a_1 & 3a_0 \\ 3 & 2a_2 & 1a_1 \end{vmatrix}}$$

$$r_1(p_3(x),x) = ggT(p_3(x),p_3'(x)) = \frac{p_3(x)}{q_2(p_3(x),x)} = (x - x_2)$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & x \\ a_2 & 2a_1 & 3a_0 \\ 3 & 2a_2 & 1a_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_2 & 2a_1 & 3a_0 \\ 3 & 2a_2 & 1a_1 \end{vmatrix}}$$

6. Station

Gegeben

$p_6(x) = x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

mit der Linearstruktur

$p_6(x) = (x - x_1)^{k1}(x - x_2)^{k2}(x - x_3)^{k3}$; $k_1+k_2+k_3 = 6$;

alle x_i und alle k_i sind paarweise voneinander verschieden

Gesucht

$q_3(p_6(x),x)$ und $r_3(p_6(x),x)$

Lösung

$$q_3(p_6(x),x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$= x^3 + \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & a_5 \\ a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 & 5a_1 \\ 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 \\ 0 & a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 \\ 0 & 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 & 5a_1 \\ 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 \\ 0 & a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 \\ 0 & 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_5 \end{vmatrix}} x^2$$

$$+ \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & a_5 & a_4 \\ a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 & 5a_1 \\ 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 \\ 0 & a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 \\ 0 & 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 & 5a_1 \\ 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 \\ 0 & a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 \\ 0 & 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_5 \end{vmatrix}} x + \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 & 5a_1 \\ 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 \\ 0 & a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 \\ 0 & 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 & 5a_1 \\ 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 \\ 0 & a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 \\ 0 & 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_5 \end{vmatrix}}$$

$$r_3(p_6(x),x) = ggT(p_6(x),p_6'(x)) = \frac{p_6(x)}{q_3(p_6(x),x)}$$

$$= (x-x_1)^{k_1\neg 1}(x-x_2)^{k_2\neg 1}(x-x_3)^{k_3\neg 1}$$

$$= x^3 + \frac{\begin{vmatrix} a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 5a_1 \\ 6 & 5a_5 & 4a_4 & 2a_2 \\ 0 & a_5 & 2a_4 & 4a_2 \\ 0 & 6 & 5a_5 & 3a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 \\ 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 \\ 0 & a_5 & 2a_4 & 3a_3 \\ 0 & 6 & 5a_5 & 4a_4 \end{vmatrix}} x^2$$

$$+ \frac{\begin{vmatrix} a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 6a_0 \\ 6 & 5a_5 & 4a_4 & a_1 \\ 0 & a_5 & 2a_4 & 5a_1 \\ 0 & 6 & 5a_5 & 2a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 \\ 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 \\ 0 & a_5 & 2a_4 & 3a_3 \\ 0 & 6 & 5a_5 & 4a_4 \end{vmatrix}} x$$

$$+ \frac{\begin{vmatrix} a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 0 \\ 6 & 5a_5 & 4a_4 & 0 \\ 0 & a_5 & 2a_4 & 6a_0 \\ 0 & 6 & 5a_5 & a_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 \\ 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 \\ 0 & a_5 & 2a_4 & 3a_3 \\ 0 & 6 & 5a_5 & 4a_4 \end{vmatrix}}$$

Your turn:
Kompaktdarstellung in jeweils einer Determinante!

Fortsetzung in Unit 10.