Im Debattierclub 8
"Eine Treppe, die aufwärts führt, lässt sich auch abwärts begehen."
Alexander Demand
"Kontrafaktische Analyse" Was wäre passiert, wenn... ?
Robert Fogel
http://einestages.spiegel.de/s/tb/29797/forschung-ueber-alternativgeschichte-als-hitler-den-krieg-gewann.html
A. Demandt. Es hätte auch anders kommen können: Wendepunkte deutscher Geschichte.
ISBN 978-3549073681
Ein algorithmisches Beispiel:
Rekursive Berechnung des arithmetisch-geometrischen Mittels agm(a,b) zweier positiver reeller Zahlen a und b
= „**treppauf**“ →

$$x(0) = a;\ y(0) = b \qquad (1)$$

$$x(t+1) = a(x(t),y(t)) = \frac{1}{2}(x(t)+y(t)) \qquad (2.1)$$

$$y(t+1) = g(x(t),y(t)) = (x(t)*y(t))^{\frac{1}{2}} \qquad (2.2)$$

$$t = 0,1,2,3,4,...$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} x(t) = agm(a,b) \qquad (3)$$

Spezialfall

$$agm(1,\frac{1}{\sqrt{2}}) = 0.847213084793979... \qquad (4)$$

Wie steht es mit „**treppab**“?
Aus Gl. (2) folgt nach Umformung

$$\left.\begin{matrix} x(t-1) \\ y(t-1) \end{matrix}\right\} = x(t) \pm \sqrt{(x(t))^2 - (y(t))^2} \qquad (5)$$

$$t = 0, -1, -2, -3, -4, ...$$

Nachstehende Wertetabellen zeigen das Konvergenzverhalten von x(t) und y(t) für

$$x(0) = 1;\ y(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (6)$$

t	x(t)	y(t)
0	1.0	0.707106781186547

1	0.853553390593273	0.840896415253714
2	0.847224902923494	0.847201266746891
3	0.847213084835192	0.847213084752765
4	0.847213084793979	0.847213084793979
5	0.847213084793979	0.847213084793979

0	1.0	0.707106781186547
-1	1.707106781186547	0.292893218813452
-2	3.388899611693976	0.025313950679118
-3	6.777704678681542	0.000094544706410
-4	13.55540935670366	0.000000000659415
-5	27.11081871340733	0.000000000000000

Aus den Wertetabellen entnimmt man:

** Für $t \to +\infty$ konvergieren x(t) und y(t)
schnell gegen 0,847213084793979…

** Für $t = -i;\ i \in \mathbb{N}$ ist

** $x(-i) = 2^i * x(i)$ (7.1)

$x(-i)$ divergiert langsam gegen $+\infty$
(Verdoppelung pro Rekursionsschritt).

** $y(-i) = 2^i * (x(i-1) - x(i))$ (7.2)

$y(-i)$ konvergiert schnell gegen 0.

Die jeweilige Konvergenzgeschwindigkeit

lässt sich mittels der Differenzenquotienten

$$dx(t) = \frac{x(t) - x(t+1)}{x(t+1) - x(t+2)} \qquad (8.1)$$

$$dy(t) = \frac{y(t) - y(t+1)}{y(t+1) - y(t+2)} \qquad (8.2)$$

quantifizieren:

$$dx(t) \to \begin{cases} (e^{\pi})^{2^t} & \text{für } t \to +\infty \\ 2 & t \to -\infty \end{cases} \qquad (9.1)$$

$$dy(t) \to \begin{cases} (e^{\pi})^{2^t} & \text{für } t \to +\infty \\ 0 & t \to -\infty \end{cases} \qquad (9.2)$$

Rekursion für x(t) allein

** aufwärts

$$x(0) = 1;\ x(1) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$x(t+2) = \frac{1}{2}\left(x(t+1) + \sqrt{(2x(t+1) - x(t))x(t)}\right);$$

$$t = 0,1,2,3,...$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \mathrm{agm}\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.8472130847939...$$

** abwärts

$$x(0) = 1;\ x(-1) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x(t-2) = x(t-1) + 2\sqrt{(x(t-1) - x(t))x(t)};$$

$$t = 0, -1, -2, -3, \ldots$$

$$x(-i) = 2^{i} x(i)$$

Rekursion für dx(t) allein, aufwärts

$$dx(0) = 2\frac{\sqrt[4]{2} + 1}{\sqrt[4]{2} - 1} = 23.14085403\ldots$$

$$dx(t+1) = \frac{1}{2}((dx(t))^2 + \sqrt{(dx(t))^4 - 2^4});$$

$$t = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$\rightarrow \sqrt{dx(1)} = 23.14069263\ldots$$

$$\lim_{t \to \infty} \sqrt[2^t]{dx(t)} = e^{\pi} = 23.14069263\ldots$$

Sehr schnelle Konvergenz:

$$ddx(t) = \frac{dx(t) - dx(t+1)}{dx(t+1) - dx(t+2)} \rightarrow ????$$

$$\text{für } t \rightarrow \infty$$