Im Debattierclub 374.1
Aus der Schülerinformatik vor 30 Jahren
„Fibonacci-Zahlendarstellung“

2 Fibonacci-Zahlendarstellung (Fibonacci-Kode)

In [1,2,3] wird gezeigt:

- Jede positive Zahl z kann in einem Positionssystem mit den irrationalen Basen

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1) = \tau + 1 = \frac{1}{\tau} \tag{1.1}$$

$$\tau = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) = \sigma - 1 = \frac{1}{\sigma} \tag{1.2}$$

(Teilungsverhältnis des Goldenen Schnittes bei $\lessdot$ Außenteilung / Innenteilung, vgl. Gl. (1,5.$\lessdot_5^6$) und den Ziffern 0 und 1 dargestellt werden:

$$z = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i \sigma^i \quad ; \quad a_i \in \{0,1\} \tag{2.1}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \sigma^i + \sum_{i=1}^{\infty} a_{-i} \tau^i \tag{2.2}$$

$$= \ldots a_2 a_1 a_0 \cdot a_{-1} a_{-2} \ldots \tag{2.3}$$

Fibonacci-Zahlendarstellung (Fibonacci-Kode).

- Ist z eine natürliche Zahl, so ist die Summe (2.1) bzw. Zeichenkette (2.3) stets endlich

$$z_{nat} = \sum_{i=-n}^{m} a_i \sigma^i = \sum_{i=0}^{m} a_i \sigma^i + \sum_{i=1}^{n} a_{-i} \tau^i \tag{3.1}$$

$$= a_m \ldots a_1 a_0 \cdot a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-n} \quad , \tag{3.2}$$

z.B.

z_{nat}	Binärdarstellung	Fibonacci-Darstellung
0	0	0
1	1	1
2	1 0	1 . 1 1
3	1 1	1 1 . 0 1
4	1 0 0	1 0 1 . 0 1
5	1 0 1	1 1 0 . 1 0 0 1
6	1 1 0	1 1 1 . 1 0 0 1
7	1 1 1	1 0 1 1 . 0 0 0 1
8	1 0 0 0	1 1 0 1 . 0 0 0 1

(3.3)

Aufgaben

1. Geben Sie möglichst einfache Algorithmen für die
   - Dezimal-Fibonacci-Konvertierung
   - Binär-Fibonacci-Konvertierung

   an und schreiben Sie die zugehörigen BASIC-Programme.

   Lösungshinweis:

   Aus dem durch die Gl. (1,6) beschriebenen Zusammenhang zwischen dem Goldenen Schnitt und der Fibonacci-Folge ergeben sich die Beziehungen

$$\sigma^i = f_{i-1} + f_i\sigma \quad ; \; i = 1,2,.. \tag{4.1}$$

$$\tau^i = (-1)^i(f_{i-1} - f_i\tau) \quad ; \; i = 1,2,.. \tag{4.2}$$

Das Einsetzen von Gl. (4) in (2.2) liefert

$$z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\sigma^i + \sum_{i=1}^{\infty} a_{-i}\tau^i \tag{2.2}$$

$$= a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i f_{i+1} + (-1)^i a_{-i} f_{i-1}) \tag{5.1}$$

$$= a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i f_{i-1} + (-1)^i a_{-i} f_{i+1}) \qquad (5.2)$$

$$= a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_i + (-1)^i a_{-i})(f_{i+1} + f_{i-1}) \qquad (5.3)$$

Dabei besteht (als Nebenbedingung) zwischen den a_i und a_{-i} stets die Beziehung

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - (-1)^i a_{-i}) f_i = 0 \; . \qquad (5.4)$$

2. Aus Gl. (3.3) ersieht man bereits qualitativ, daß die Fibonacci-Darstellung einer Zahl z gegenüber der zugehörigen Binärdarstellung eine beträchtliche Redundanz besitzen kann.
   - Bestimmen Sie diese Redundanz quantitativ.
   - Diskutieren Sie auf Grundlage der Veröffentlichungen [1,2,3] von А.П. Стахов , wie diese Redundanz für eine Erhöhung der Zuverlässigkeit moderner Rechner eingesetzt werden könnte ("... фибоначчиевая арифметика .. имеет огромное практическое значение в качестве системы счисления для ЭВМ будущего."

3. Untersuchen Sie die in Tabelle 1,1,3 beschriebenen Näherungsbeziehungen im Lichte der Fibonacci-Zahlendarstellung.

Literatur

[1] Стахов, А.П.: Алгоритмическая теория измерения. Москва 1979

[2] Стахов, А.П.: Золотая пропорция в цифровой технике. Автоматика и вычислительная техника

[3] Стахов, А.П.: Коды золотой пропорции или системы счисления для ЭВМ будущего. Техника – молодежи 53 (1985) 7, S. 40-44

Revised version and extension in Deb 374.2

