Im Debattierclub n° 203

Hyperbolicus

Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion

$$f(n,x) = \begin{cases} g(n,x) & \text{für } 0 \le x \le 1 \\ g(n,x^{-1}) & \text{für } 1 \le x \end{cases} \qquad (1.1)$$

$$g(n,x) = \tanh(n*\tanh^{-1}x) \qquad (1.2)$$

für verschiedene n anhand zugehöriger Graphen.
Geben Sie Darstellungen von f(n,x) durch eine(n) unendliche(n)
** Potenzreihe
** nested expression
** Determinante
** Kettenbruch
an.
Lösungshinweise

$$g(n,x) = \tanh(n*\operatorname{artanh}(x)) \tag{1.2}$$

$$= \frac{(1+x)^n - (1-x)^n}{(1+x)^n + (1-x)^n} \tag{1.3}$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & \binom{n}{1} & \binom{n}{3} & \binom{n}{5} & \binom{n}{7} & \rightarrow \\ x^1 & \binom{n}{0} & \binom{n}{2} & \binom{n}{4} & \binom{n}{6} & \\ x^3 & 0 & \binom{n}{0} & \binom{n}{2} & \binom{n}{4} & \\ x^5 & 0 & 0 & \binom{n}{0} & \binom{n}{2} & \\ x^7 & 0 & 0 & 0 & \binom{n}{0} & \\ \downarrow & & & & & \searrow \end{vmatrix} \tag{1.4}$$

ist Lösung der Differentialgleichung

$$g'(n.x) = n*\frac{1-(g(n,x))^2}{1-x^2} \quad . \tag{1.5}$$

Funktionalgleichung für f(n,x)

$$f(n,x^{-1}) = f(n,x) \tag{2}$$

Spezialfälle

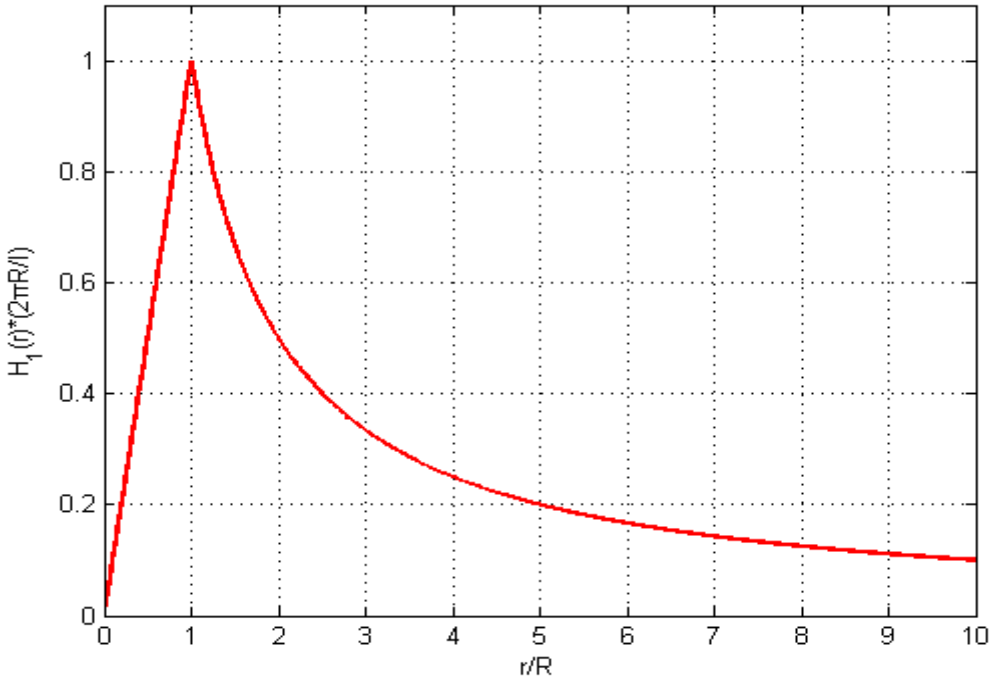
1)

$$f(1,x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \le x \le 1 \\ x^{-1} & \text{für } 1 \le x \end{cases} \qquad (3.1)$$

f(1,x) beschreibt z.B. den Verlauf der magnetischen Feldstärke H(r) in und um einen unendlich ausgedehnten zylindrischen Leiter mit dem Radius R, der von einem Gleichstrom I durchflossen wird, in Abhängigkeit vom Achsenabstand r:

$$H_1(r) = \frac{I}{2\pi R} * f\left(1, \frac{r}{R}\right)$$

$$= \frac{I}{2\pi R} * \begin{cases} \frac{r}{R} & \text{für } 0 \le r \le R \text{ (innen)} \\ \frac{R}{r} & R \le r \text{ (außen)} \end{cases} \qquad (3.2)$$

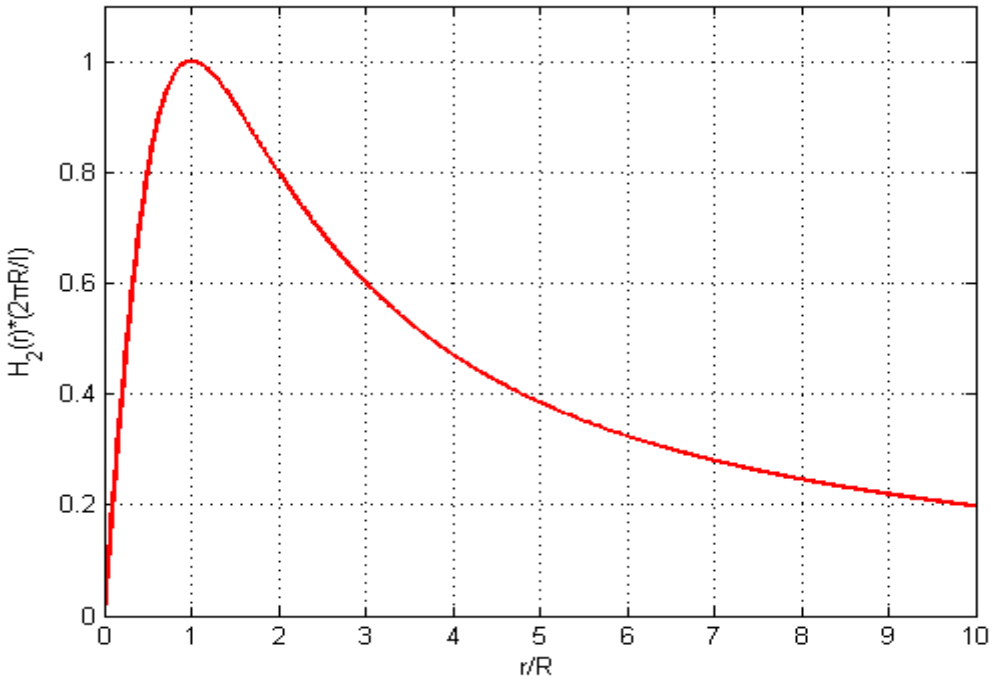


1.1)
Berechnen Sie den H(r)-Verlauf für dieselbe Anordnung bei Wechselstrom unter Berücksichtigung des Skin-Effektes bei hohen Frequenzen.

1.2)
Wie würde man die Maxwell-Gleichungen verändern müssen, wenn man bei gleicher Anordnung anstelle des H(r)-Verlaufs Gl. (3.2) einen H(r)-Verlauf

$$H_2(r) = \frac{I}{2\pi R} * f\left(2, \frac{r}{R}\right) = \frac{I}{2\pi R} * \frac{2rR}{r^2+R^2}$$

$$= \frac{I}{2\pi R} * \frac{2}{\frac{r}{R}+\frac{R}{r}} \qquad (3.3)$$



$$\frac{2}{H_2(r)} = \frac{1}{H_{1innen}(r)} + \frac{1}{H_{1außen}(r)} \qquad (3.4)$$

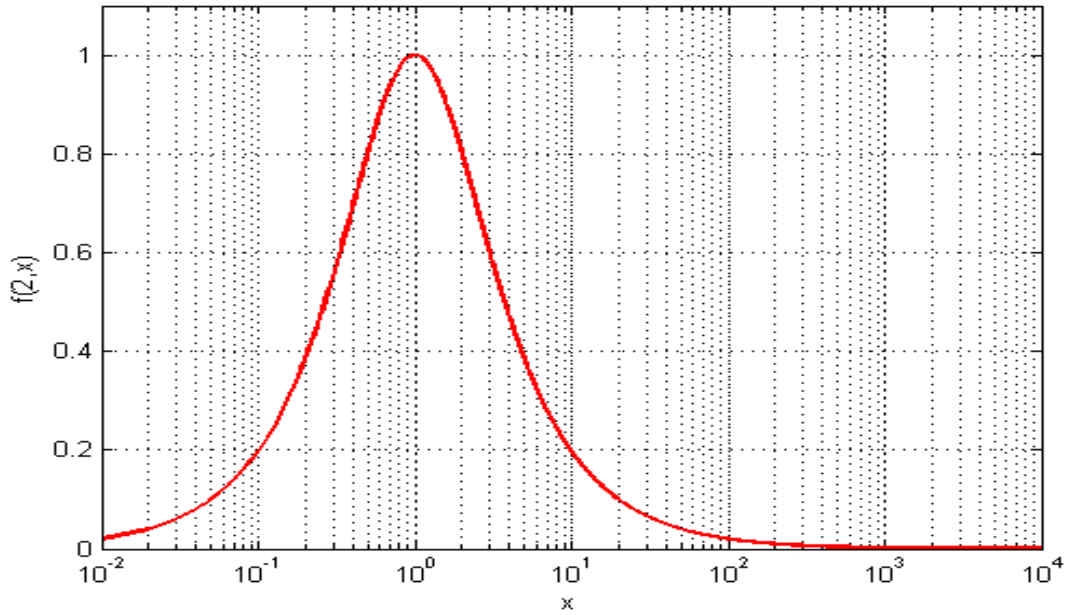
$$\frac{H_2(r)}{2} = H_{1innen}(r) \,||\, H_{1außen}(r) \qquad (3.5)$$

beobachten würde?

2)

Welche anderen „semantischen Belegungen“ existieren für

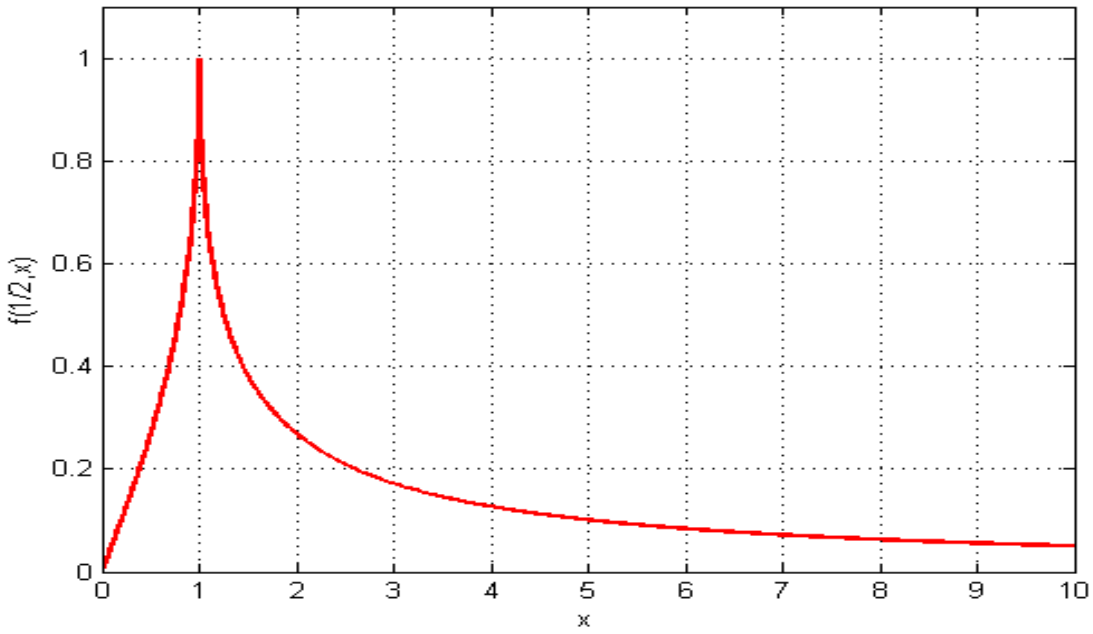
$$f(2,x) = \frac{2x}{1+x^2} \quad ? \qquad (4)$$



3)

Welche „semantischen Belegungen“ existieren für

$$f\left(\frac{1}{2},x\right)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} & 0\le x\le 1\\ \text{für} & ?\\ \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} & 1\le x\end{cases} \qquad (5)$$



Lateral

Untersuchen Sie experimentell die Dynamik der Rekursionsgleichung

$x(t+1) = g(n,x(t))$; $t=0,1,2,3,\ldots$ (6.1)

für repräsentative Parameter n und Startwerte

$0 < x(0) < 1$. (6.2)

Beispiel

$n=1/2$; $x(0)=1/2$ (6.3)

t	$x(t)$	$y(t) = 2^t * x(t)$	$dy(t) = \frac{y(t) - y(t+1)}{y(t+1) - y(t+2)}$	$y1(t) = -\frac{1}{3}y(t) + \frac{4}{3}y(t+1)$
0	0.5	0.5	3.5968286406	0.547864513115
1	0.267949192	0.5358983849	3.8902132021	0.549205805909
2	0.136469738	0.5458789506	39719272114	0.549299694023
3	0.068555564	0.5484445082	3.9929415527	0.549305738306
4	0.034318152	0.5490904308	3.9982328545	0.549306118912
5	0.017164131	0.5492521969	3.9995580550	0.549306142744
6	0.008582698	0.5492926563	3.9998895038	0.549306144235
7	0.004291428	0.5493027722	3.9999723753	0.549306144328
8	0.002145724	0.5493053013	3.9999930938	0.549306144334

Interpretieren Sie y(∞).
Lässt sich für $y(\infty)_{n=1/2}$ in Funktion von x(0) ein allgemeiner Formelausdruck angeben?
Ist dieser erweiterbar für beliebige n?
Ist die Rekursionsgleichung (6.1), insbesondere für n = ½, bei geeigneter Normierung als „Engine“ im algorithmischen Modell „Engine – Load“ (Unit 1, S. 12 ff) einsetzbar?

Reference

[1] http://mathworld.wolfram.com/HyperbolicTangent.html

[2] http://mathworld.wolfram.com/InverseHyperbolicTangent.html

[3] http://mathworld.wolfram.com/GearCurve.html

[4] http://www.stefan-schenke.de/joomla/index.php%3Foption%3Dcom_content%26view%3Darticle%26id%3D175:magneti

sches-feld-in-einem-leiter%26catid%3D42:grundlagen-der-elektrotechnik%26Itemid%3D66

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Skin_effect

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell%27s_equations

12.07.2017 EPSnoct.