Im Debattierclub n° 129

Spezielle Relativitätstheorie (Lorentz-Transformation, Längenkontraktion, Zeitdilatation, Additionstheorem der Geschwindigkeiten) und Vierpoltheorie

Die Lorentz-Transformation beschreibt die gekoppelte lineare Transformation der Ortskoordinaten und der Zeit zweier Inertialsysteme, eingeschränkt auf zwei achsparallele kartesische Koordinatensysteme (x,y,z) und ($x^{/}$,$y^{/}$,$z^{/}$) mit

** x- und $x^{/}$-Achse sind kollinear,
** (x,y,z) bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit V längs der positiv gerichteten $x^{/}$-Achse von ($x^{/}$,$y^{/}$,$z^{/}$),
** die zugehörigen Koordinatenursprünge O und $O^{/}$ fallen bei $t=t^{/}=0$ zusammen,

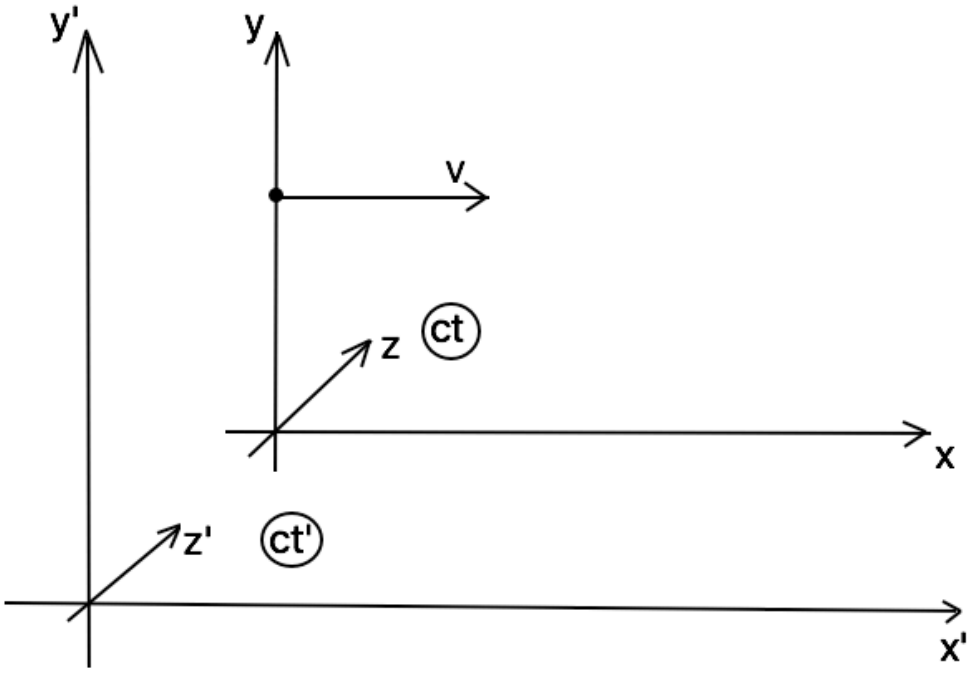


Bild 1 (x, y, z) von (x', y', z') aus gesehen

Dann gilt

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \underline{L(\alpha)} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \qquad (1.1)$$

↓ So sieht ein Beobachter B′ im System (x′,ct′) die Welt des Beobachters B im System (x,ct), das sich mit konstanter Geschwindigkeit V längs der positiv gerichteten x′-Achse von (x′,ct′) bewegt.

$$\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \underline{L(\alpha)}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} \qquad (1.2)$$

$$\underline{L(\alpha)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}} & \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}} & \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}} \end{pmatrix};$$

$$\alpha = \frac{c}{V} \geq 1 \qquad (1.3)$$

$$\underline{L(\alpha)}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}} & -\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}} & \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}} \end{pmatrix} = -\underline{L(-\alpha)}$$

$$(1.4)$$

$$\det \underline{L(\alpha)} = \det \underline{L(\alpha)}^{-1} = 1 \qquad (1.5)$$

Übertragungsgleichungen eines linearen passiven elektrischen Vierpols in T-Schaltung,

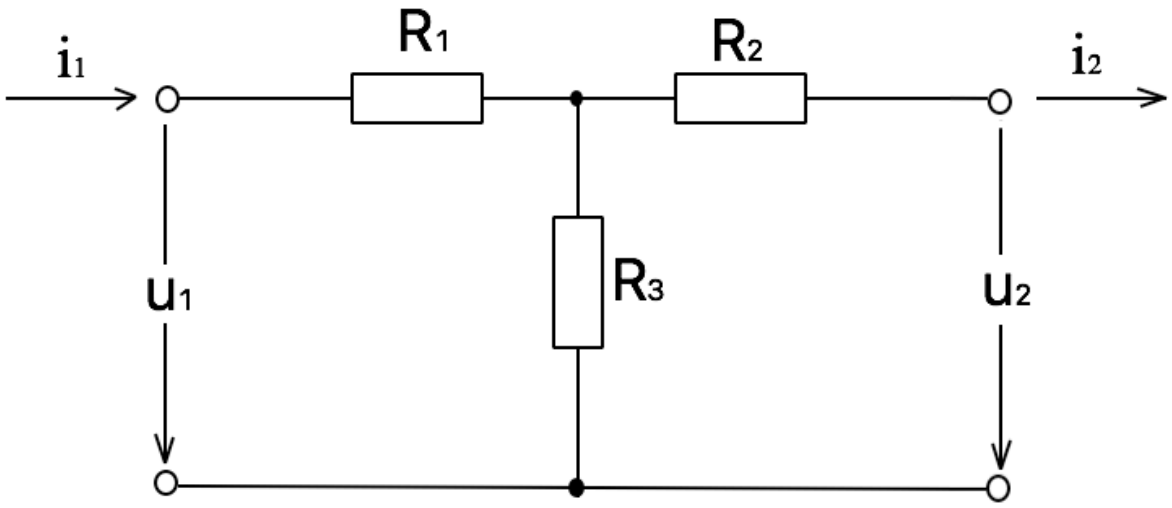


Bild 2 Vierpol in T - Schaltung

Kettenform

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \underline{A} \begin{pmatrix} u_2 \\ i_2 \end{pmatrix} \qquad (2.1)$$

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ i_2 \end{pmatrix} = \underline{A}^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \qquad (2.2)$$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \frac{R_1}{R_3} & R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3} \\ \frac{1}{R_3} & 1 + \frac{R_2}{R_3} \end{pmatrix} \qquad (2.3)$$

$$\underline{A}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \frac{R_2}{R_3} & -\left(R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3} \right) \\ -\frac{1}{R_3} & 1 + \frac{R_1}{R_3} \end{pmatrix} \qquad (2.4)$$

$$\det \underline{A} = \det \underline{A^{-1}} = 1 \qquad (2.5)$$

Aus dem Vergleich der Gln (1.) und (2.) folgt unmittelbar das „elektrische Ersatzschaltbild“ der Lorentz-Transformation, der Lorentz-Vierpol Bild 3.

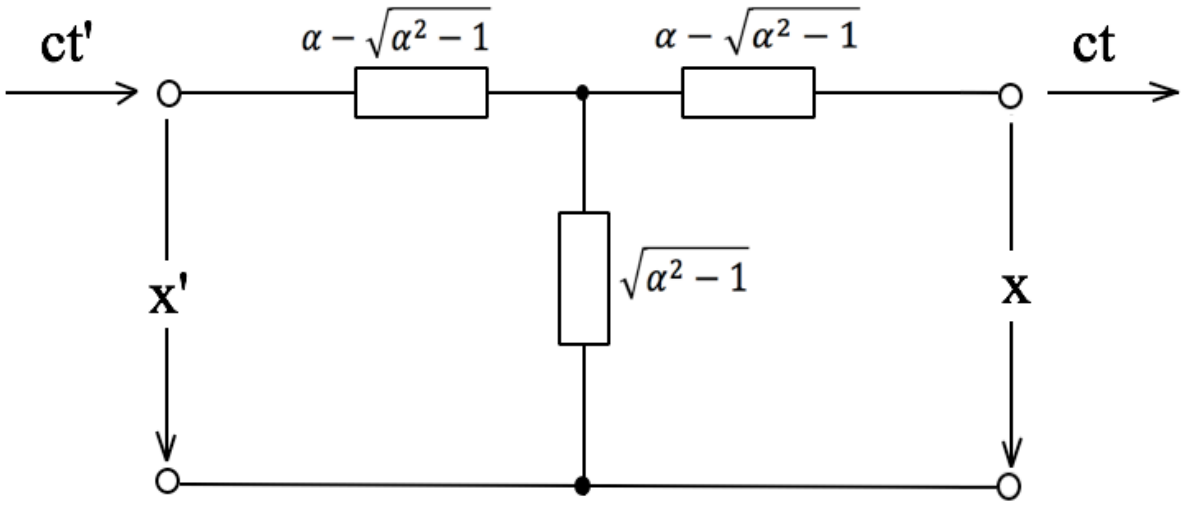


Bild 3 Elektrisches Ersatzschaltbild der Lorentz-Transformation , Lorentz-Vierpol

Damit ist die Lorentz-Transformation aus ihrem physikalischen Umfeld herausgelöst, „entkernt“, und formal in die „Denkwelt“ und das Methodeninventar der Elektrotechnik transponiert, die ihr nun mit dem Ziel übergestülpt werden, neue Interpretationsmöglichkeiten, Herangehensweisen und Fragestellungen zu induzieren:

** Längenkontraktion,
** Zeitdilatation,
** Relativistisches Additionstheorem für Geschwindigkeiten.

Sandkasten

** Kettenschaltung identischer oder unterschiedlicher Lorentz-Vierpole, „Lorentz-Kette=Leitung“,
** zahlentheoretische Lorentz-Leitung (α_i-Sequenz = Folge der natürlichen Zahlen, ungeraden Zahlen, Primzahlen, …),
** Entwicklung einer reellen Zahl in eine zth. Lorentz-Leitung,
** andere Zusammenschaltungen von Lorentz-Vierpolen,
** Lorentz-Transistor,
** „Formales Überzeitverhalten“ eines RLC-Lorentz-Vierpols, Resonanz, Lorentz-Filter
** „Formale“ Überlichtgeschwindigkeit
** und mehr.
****

** Längenkontraktion

Der „Lorentz-Vierpol Bild 3 und die Gln (1.) beschreiben sowohl die Übertragung der Klemmengrößen an Eingang und Ausgang, als auch (wegen der Linearität der Gln (1.)) die Übertragung ihrer Differenzen gemäß Bild 4.

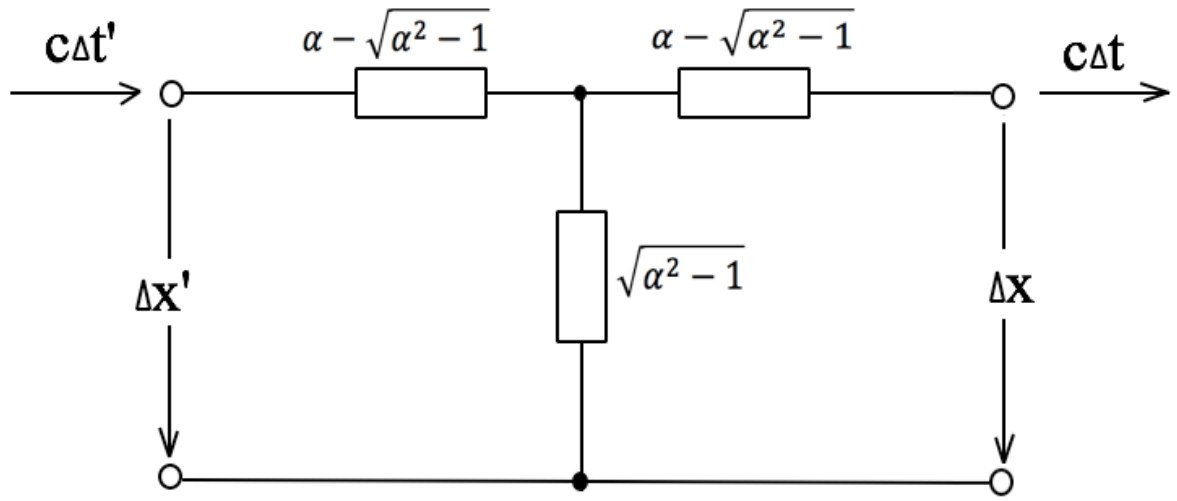


Bild 4 Übertragung der Differenzen

Daraus folgt in Bild 4 für den ausgangsseitigen Leerlauf

$$c\Delta t = 0 \qquad (3.1)$$

$$\Delta x = \Delta x' \frac{\sqrt{\alpha^2-1}}{(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1})+\sqrt{\alpha^2-1}}$$

$$= \Delta x' \frac{\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha};\ \alpha = \frac{c}{V}$$

$$= \Delta x' \sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2} \qquad (3.2)$$

d.h., ein Beobachter im System (x,ct), das sich in x-Richtung mit der Geschwindigkeit V vom ruhenden System (x',ct') entfernt, sieht eine in (x',ct') ruhende Länge $\Delta x'$ um den

Faktor $\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}$ verkürzt, kontrahiert (relativistische Längenkontraktion).

** Zeitdilatation

Im Falle des ausgangsseitigen Kurzschlusses in Bild 4

$$\Delta x = 0 \qquad (4.1)$$

hat man

$$\frac{c\Delta t'}{c\Delta t} = \frac{\frac{1}{\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}}{\frac{1}{\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}}} \rightarrow$$

$$\Delta t' = \Delta t\left(1+\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}}{\sqrt{\alpha^2-1}}\right) = \Delta t\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}};\ \alpha=\frac{c}{V}$$

$$= \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}} \qquad (4.2)$$

d.h., für einen in (x',ct') ruhenden Beobachter, von dem sich (x,ct) in x-Richtung mit V entfernt, erscheint ein Zeitintervall Δt in (x,ct)

um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}$ vergrößert, eben

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}},$$

(relativistische Zeitdilatation).
Lateral:
Wie ist der ausgangsseitige Abschluss des Vierpols Bild 4 mit dem Wellenwiderstand Z = 1 in diesem Licht zu interpretieren?

** Relativistisches Additionstheorem für Geschwindigkeiten

Sei $\begin{cases} \frac{\Delta x}{\Delta t} = v \\ \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = v' \end{cases}$ die beobachtete (5.1)

Geschwindigkeit eines Punktes in $\begin{cases} (x,ct) \\ (x',ct') \end{cases}$.

Dann folgt aus den Gln (1) und Bild 4 das

relativistische Additionstheorem für Geschwindigkeiten

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = v' = c\,\frac{\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}}\Delta x + \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}c\Delta t}{\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}\Delta x + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}}c\Delta t};\quad \alpha = \frac{c}{V}$$

$$= c\,\frac{\alpha\Delta x + c\Delta t}{\Delta x + \alpha c\Delta t} = c\,\frac{\frac{c}{V}\frac{\Delta x}{\Delta t} + c}{\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{c}{V}c}$$

$$= c^2\,\frac{\frac{v}{V}+1}{v + \frac{c^2}{V}c} \Rightarrow\ v' = \frac{v+V}{\frac{vV}{c^2}+1} \qquad (5.2)$$

Interpretation?

Lateral:

Gibt es ein relativistisches Additionstheorem für Beschleunigungen?

****

Sandkasten

** Kettenschaltung identischer oder unterschiedlicher „Lorentz-Vierpole“, „Lorentz-Kette=Leitung“, Bild 5.

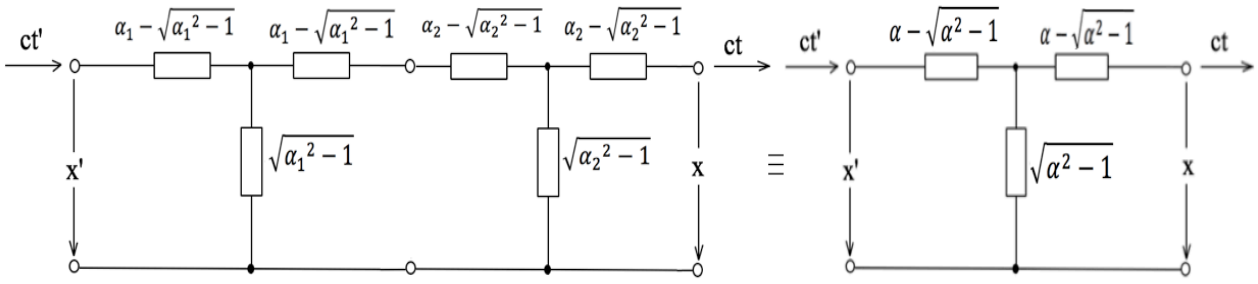


Bild 5.1 Hintereinanderschaltung zweier Lorentz-Vierpole

$$\alpha = \frac{\alpha_1 \alpha_2 + 1}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \underline{L(\alpha_1)}\,\underline{L(\alpha_2)} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \underline{L\left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 + 1}{\alpha_1 + \alpha_2}\right)} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

Gruppenoperation! (6)

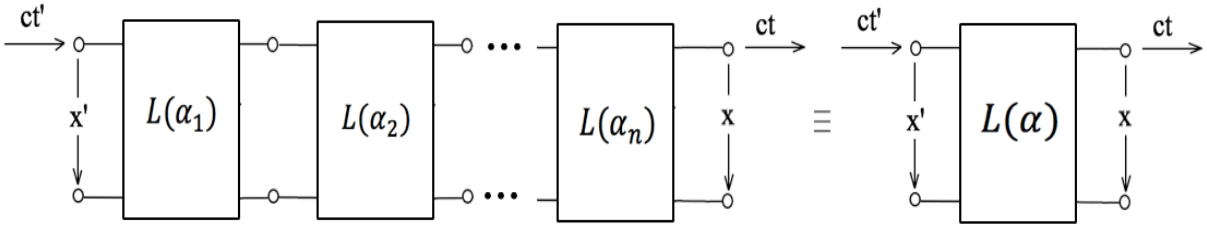


Bild 5.2 Lorentz - Kettenschaltung

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \underline{L(\alpha_i)} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{L}\left(\frac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & & \alpha_n \\ -\alpha_1 & 1 & \alpha_3 & \alpha_4 & & \alpha_n \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & 1 & \alpha_4 & & \alpha_n \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & 1 & & \alpha_n \\ & & & & & \alpha_n \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & & -\alpha_{n-1} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & 1 & 1 & & 1 \\ -1 & \alpha_2 & 1 & 1 & & 1 \\ -1 & -1 & \alpha_3 & 1 & & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \alpha_4 & & 1 \\ & & & & & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \alpha_n \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{ct} \end{pmatrix} \right);$$

$$\mathrm{n} \geq 3 \qquad (7)$$

Spezialfälle

** $\alpha_i = \alpha$

** $\alpha_i = i+1$ (2,3,4,5,6,7,...)

** $\alpha_i = 2i+1$ (3,5,7,9,11,13,...)

** $\alpha_i = p_{i+1}$ prime sequence (3,5,7,11,13,17,...)

** $\alpha_i = \mathrm{fib}(i+1)$ Fibonacci sequence

fib(0)=fib(1)=1, fib(2)=2,

fib(3)=3, fib(4)=5, fib(5)=8,...

fib(i+1)=fib(i)+fib(i-1)

** $\alpha_i = ?(i)$ (8.)

Lateral

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \underline{L(\alpha_1)}\underline{L(\alpha_2)}^{-1}\underline{L(\alpha_3)}\underline{L(\alpha_4)}^{-1} \ldots \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \quad (9)$$

Interpretationen von Gl. (8.) und Gl. (9)?

** Gl.(8.2)

$$\prod_{i=1}^{n} \underline{L(\alpha_i = i+1)} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{n(n+3)+4}{2\sqrt{2(n+1)(n+2)}} & \frac{n(n+3)}{2\sqrt{2(n+1)(n+2)}} \\ \frac{n(n+3)}{2\sqrt{2(n+1)(n+2)}} & \frac{n(n+3)+4}{2\sqrt{2(n+1)(n+2)}} \end{pmatrix} \qquad (8.2)$$

** Gl. (8.3)

$$\prod_{i=1}^{n} \underline{L(\alpha_i = 2i+1)} = \begin{pmatrix} \frac{n+2}{2\sqrt{n+1}} & \frac{n}{2\sqrt{n+1}} \\ \frac{n}{2\sqrt{n+1}} & \frac{n+2}{2\sqrt{n+1}} \end{pmatrix} \qquad (8.3)$$

** Gl. (8.4)

$$\prod_{i=1}^{n} \underline{L(\alpha_i = p_{i+1})} = \frac{\prod_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} p_{i+1} & 1 \\ 1 & p_{i+1} \end{pmatrix}}{\sqrt{\prod_{i=1}^{n} (p_{i+1})^2 - 1)}}$$

$$= ? \qquad (8.4)$$

** Gl. (8.5)

$$\prod_{i=1}^{n} \underline{L(\alpha_i = \mathrm{fib}(i+1))} = \frac{\prod_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} \mathrm{fib}(i+1) & 1 \\ 1 & \mathrm{fib}(i+1) \end{pmatrix}}{\sqrt{\prod_{i=1}^{n} ((\mathrm{fib}(i+1))^2 - 1)}}$$

$$= ? \qquad (8.5.1)$$

$$= \begin{pmatrix} A(n) & B(n) \\ B(n) & A(n) \end{pmatrix} \qquad (8.5.2)$$

Die Berechnung der A(n) und B(n) mittels Gl. (8.5.1) liefert die Wertefolge

n	A(n)	B(n)
1	1.154700538..	
2	1.428869017..	1.020620726..
3	1.6per.	1.3per.
4	1.847826312..	1.553853945..
5	1.973200071..	1.701034544..
6	2.056534711..	1.797035063..
7	2.110301641..	1.858325326..
8	2.144443857..	1.897008027..
9	2.165895277..	1.921224180..
10	2.179289660..	1.936311810..
11	2.187620160..	1.945682904..
12	2.192788836..	1.951492475.
13	2.195990955..	1.955089838..

14 2.197972924.. 1.957315758..
15 2.199198976.. 1.958692455..
16 2.200425889.. 1.960069921..
17 2.200425889.. 1.960069921..
18 2.200715650.. 1.960395208..
19 2.200894756.. 1.960596269.. .

Für die Differenzenquotienten ergibt sich daraus

$$dA(n) = \frac{A(n+2) - A(n+1)}{A(n+1) - A(n)} \rightarrow \frac{1}{\Phi} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \quad (8.5.3)$$

und

$$dB(n) = \frac{B(n+2) - A(n+1)}{A(n+1) - A(n)} \rightarrow \frac{1}{\Phi} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \quad (8.5.4)$$

und für A(n) und B(n) die Approximationen

$$A(n) \approx A(\infty)\left(1-\frac{1}{\Phi^n}\right)$$

$$A(\infty) = 2.201184595113747000046465821695 7..$$

(8.5.5)

$$B(n) \approx B(\infty)\left(1-\frac{1}{\Phi^n}\right)$$

$$B(\infty) = 1.960921625605182190314766557374 9..$$

(8.5.6),

umso genauer, je größer n.
** „Decodieren“ Sie A(∞) und B(∞)
(Darstellung als unendliche Reihe,
Kettenbruch, geschachtelten Ausdruck, …,
durch eine Rekursionsformel, …).
** Interpretieren Sie die Gln (8.5.5,6).
** fib(8.5) → prime(8.4) ?
****

Kreativität heißt, dem menschlichen Wissensgraphen produktive Knoten und/oder Kanten hinzuzufügen (nahe-, aber insbesondere auch fernliegende; heuristische Vernetzung).



Photo Arne Stoschek



Photo Shen Li, Chongquing University

E. Stavrinidou et al. Electronic plants.
Science Advances 20 Nov 2015:
Vol. 1, no. 10, e1501136
DOI: 10.1126/sciadv.1501136

"The roots, stems, leaves, and vascular circuitry of higher plants are responsible for conveying the chemical signals that regulate growth and functions. From a certain perspective, these features are analogous to the contacts, interconnections, devices, and wires of discrete and integrated electronic circuits. Although many attempts have been made to augment plant function with electroactive materials, plants' "circuitry" has never been directly merged with electronics. We report analog and digital organic electronic circuits and devices manufactured in living plants. The four key components of a circuit have been achieved using the xylem, leaves, veins, and signals of the plant as the template and integral part of the circuit elements and functions. With integrated and distributed electronics in plants, one can envisage a range of applications including precision recording and regulation of physiology, energy harvesting from photosynthesis, and alternatives to genetic modification for plant optimization."

References

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Special_relativity
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Lorentz_transformation
[3] W. Weißgerber. Elektrotechnik für Ingenieure 3.
Springer Vieweg 2015, ISBN 978-3658091033
[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Transmission_line

20.04.2017 EPSnurt. DScalc.