**Unit 307.K.ext,ext.  gültige Endfassung!**

**Für Jonathan und Freunde gesammelt,**
**zur kritischen  Diskussion**

Aphorisms, advices, anecdotes, brain teasers, curious stories, epigrams, epigraphs, epitaphs, crazy-creative ideas, suggestions and set pieces for thriller and mystery writers, koans, memorabilia, mottos, poems, proverbs, riddles, algorithmics ideas catchment areas, quotations, sayings, slogans, scurrilities, besun, etc., collected for encouragement and the advantage of my students and of myself.

An unconventional challenger,
**„Arboretum - Algoretum - Crearetum“.**

**Materialsammlung**, eine kreative Umgebung für mathematische/informatische Untersuchungen, z.B. Darstellung mathematischer Konstanten als nested expressions, Kettenbrüche, … oder Mischformen zur Sichtbarmachung innerer Strukturen

**Dreieck, Dreieckstransversalen**
**https:**//www.spektrum.de/raetsel/gibt-es-diese-art-von-dreiecken/2208377?utm_source=sdwv_daily&utm_medium=nl&utm_content=raetsel
„Bei dem abgebildeten Dreieck ist jede Höhe kürzer als die Seite, auf der sie steht. Gibt es Dreiecke, bei denen

höchstens eine ihrer Höhen kürzer ist als die Seite, auf der sie steht? Wenn ja, wie sehen sie aus?“
# Wie sieht es analog dazu mit anderen Ecktransversalen aus? Problemumfeld ausloten!
# Erweiterung auf Tetraeder!?

**https**://www.spektrum.de/news/mathematische-physik-eine-**neue-art-der-symmetrie**/2205297

**Langlands Programm**
**https**://www.spektrum.de/news/eine-ungeahnte-verbindung-zwischen-physik-zahlentheorie-und-geometrie/2212254

**https**://www.spektrum.de/news/versteckt-sich-die-weltformel-im-klang-der-raumzeit/2214009
**„Lässt sich aus dem Klang eines Objekts auf seine Form schließen?“**

Erweitert: Lässt sich aus dem Klang(-Spektrum) und dem Schatten eines homogenen Objekts allein auf seine Form schließen? ……

**Besitzt ein Polynom n-ten Grades in x nur eine Mehrfachnullstelle, so lässt sich diese auf Basis einer Determinantendarstellung allein unter Benutzung der vier arithmetischen Grundoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division, ohne Wurzeloperationen, berechnen.**

Im folgenden ist das für n=6 gezeigt, die Verallgemeinerung für beliebige n ist unmittelbar zu erkennen.

$$p_6(x) = x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

1. $\underline{\text{If}}\ p_6(x) = (x - x_1)(x - x_2)^5\ \underline{\text{then}}\ -4x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_5 & 3a_3 \\ 6 & 4a_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_5 & 2a_4 \\ 6 & 5a_5 \end{vmatrix}}$ .

2. $\underline{\text{If}}\ p_6(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)^4\ \underline{\text{then}}\ -3x_3 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 5a_1 \\ 6 & 5a_5 & 4a_4 & 2a_2 \\ 0 & a_5 & 2a_4 & 4a_2 \\ 0 & 6 & 5a_5 & 3a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 \\ 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 \\ 0 & a_5 & 2a_4 & 3a_3 \\ 0 & 6 & 5a_5 & 4a_4 \end{vmatrix}}$ .

3. $\underline{\text{If}}\ p_6(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)^3$

$$\underline{\text{then}}\ -2x_4 = \frac{\begin{vmatrix} a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 & 5a_1 & 0 \\ 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & 0 \\ 0 & a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 & 6a_0 \\ 0 & 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & a_1 \\ 0 & 0 & a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 5a_1 \\ 0 & 0 & 6 & 5a_5 & 4a_4 & 2a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 & 5a_1 & 6a_0 \\ 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 \\ 0 & a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 & 5a_1 \\ 0 & 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 \\ 0 & 0 & a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 \\ 0 & 0 & 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 \end{vmatrix}} .$$

4. If $p_6(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)^2$

$$\text{then } -x_5 = \frac{\begin{vmatrix} a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 & 5a_1 & 6a_0 & 0 & 0 \\ 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 & 5a_1 & 6a_0 & 0 \\ 0 & 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 & 5a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 & 6a_0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & a_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 & 5a_1 & 6a_0 & 0 & 0 \\ 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 & 5a_1 & 6a_0 & 0 \\ 0 & 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 & 5a_1 & 6a_0 \\ 0 & 0 & 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & 2a_4 & 3a_3 & 4a_2 & 5a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 \end{vmatrix}} .$$

**Fragen:**

# Was liefern diese Determinantendarstellungen für die Fälle, dass die jeweiligen Voraussetzungen nicht vorliegen, insbesondere für den allgemeinen Fall: das Nichtvorliegen von Mehrfachnullstellen des Polynoms $p_n(x)$ ?

# Welchen „Nutzen“ haben sie in diesem allgemeinen Fall?

# Untersuchen Sie den Fall: zwei/drei/mehr Mehrfachnullstellen mit unterschiedlichen Vielfachheiten

# Untersuchen Sie vorstehende Fragestellungen für die Polynome zweiten, dritten und vierten Grades.

# Weiter, weiter ….., die Angel ist ausgeworfen.



„Polynomberge“ am Li Fluß

**Zur Diskussion und zum Weiterdenken**

**1D** scf$\left(1+\frac{2^{-k}}{\sqrt[2^n]{e}-1}\right)$ ; k=2, n=3 →

[2; 1, 7, 5, 1, 7, 9, 1, 7, 13, 1, 7, 17, 1, 7, 21, 1, 7, 25,
1, 7, 29, 1, 7, 33, 1, 7, 37, 1, 7, 41, 1, 7, 45, 1, 7, 49,
1, 7, 53, 1, 7, 57, 1, 7, 61, 1, 7, 65, 1, 7, 69, 1, 7, 73,
1, 7, 77, 1, 7, 81, 1, 7, 85, 1, 7, 89, 1, 7, 91, 1, 7, 95,
1, 7, 99, 1, 7,…]

**►►► 2D**

**X Ulam-Spirale + ….**

**XX Parkettierung, Kacheln**

**►►► 3D**

**Kristallstrukturen, Viren,**

**Farbcodierungen**

Erzeugen Sie **Pixelgraphiken** und **Polygonmuster** (vgl. [1,2,3]) mit den nachstehenden Zahlenfolgen als Inputfolgen.

scf($1+\frac{2^{-k}}{\sqrt[2^n]{e}-1}$) ; k=2, n=1 → [1;2,1,1,2,7,
2,2,1,1,1,2,1,7,
4,2,1,1,1,4,1,7,
6,2,1,1,1,6,1,7,
8,2,1,1,1,8,1,7,
10,2,1,1,1,10,1,7,
12,2,1,1,1,12,1,7,
14,2,1,1,1,14,1,7,
16,2,1,1,1,16,1,7,
18,2,1,1,1,18,1,7,
20,2,1,1,1,20,1,7,
22,2,1,1,1,22,1,7,
24,2,1,1,1,24,1,7,
26,2,1,1,1,26,1,7,
28,2,1,1,1,28,1,7,
30,2,1,1,1,30,1,7, …]

scf($1+\frac{2^{-k}}{\sqrt[2^n]{e}-1}$) ; k=1, n=2 → [
1;1,3,
**5**,1,3,
9,1,3,
**13**,1,3,

**17**,1,3,
21,1,3,
25,1,3,
**29**,1,3,
33,1,3,
**37**,1,3,
**41**,1,3,
45,1,3,
49,1,3,
**53**,1,3,
57,1,3,
**61**,1,3, …]

# Untersuchen Sie die Werteverläufe von scf(1+ $\frac{2^{-k}}{\sqrt[2^n]{e}-1}$ ) für andere (k,n)-Paare.

# Untersuchen Sie die Werteverläufe der scf von anderen „parametrisierten Generatorfunktionen“ verglichen mit „1+ $\frac{2^{-k}}{\sqrt[2^n]{e}-1}$“, z.B. „1+ $\frac{3^{-k}}{\sqrt[3^n]{e}-1}$“, „1+ $\frac{p^{-k}}{\sqrt[p^n]{e}-1}$, p ist Primzahl“, …

# In nicht wenigen Fällen entstehen aus diesen scf **Pixelgraphiken** bzw. **Polygonmuster“** (vgl. [1,2,3]) von eigener ästhetischer Präsenz, gleichwohl an Naturformen gemahnend.

# Diskutieren Sie die dabei experimentell gewinnbare (wenngleich subjektive und lockere) Zuordnung „parametrisierte Generatorfunktion“ → ästhetisch

anspruchsvolle/s Pixelgraphik bzw. Polygonmuster“
# und eine mögliche konstruktive Umkehrbarkeit.

[1] E.P. Stoschek. Abenteuer Algorithmus.
Dresden University Press 1996, ISBN 3-931828-31-X
[2] E.P. Stoschek, D. Schönfeld. Computergraphik im Spannungsfeld zwischen Algorithmus und Phantasie.
Verlag Harri Deutsch 2000, ISBN 3-8171-1640-3

# **https**://sciencenotes.de/frau-priesemann-was-ist-eigentlich-wachsen/?utm_source=pocket-newtab-de-de

[3] Spektrum Kompakt30/2019 Primzahlen - Die Stars der Mathematik
# Unit 7, part Pythagorean triples

# **https**://www.spektrum.de/news/apollonische-kreise-weit-verbreitete-vermutung-widerlegt/2175000
**********

# Vervollständigen Sie die Folge quasipythagoräischer Tripel aus Primzahlen
$7^2 + 11^2 - 13^2 = \mathbf{1}$
$11^2 + 13^2 - 17^2 = \mathbf{1}$
$13^2 + 19^2 - 23^2 = \mathbf{1}$
$23^2 + 29^2 - 37^2 = \mathbf{1}$
# und finden Sie ein zugehöriges Bildungsgesetz (vgl. [1]).
„Kettenstrukturen“ aus PZ-Quadraten:
$17^2 + 19^2 - 11^2 - 23^2 = \mathbf{0}$
$41^2 + 43^2 - 59^2 - 7^2 = \mathbf{0}$
$71^2 + 73^2 - 59^2 - 83^2 = \mathbf{0}$

$7^2 + 71^2 + 73^2 - 41^2 - 43^2 - 83^2 = \mathbf{0}$
$29^2 + 37^2 - 23^2 - 41^2 = \mathbf{0}$
$53^2 + 59^2 - 79^2 - 7^2 = \mathbf{0}$
# Experimentieren [2] Sie mit den Konstellationen
$(PZ1)^2 + (PZ2)^2 – (PZ3)^2 =? (-1)^k * 2^l$
# und längeren Kettenstrukturen aus PZ-Quadraten.
# Zur Diskussion: höhere Potenzen, mit Blick auf den Großen Fermatschen Satz [2] und Diophantische Gleichungen [3].
# Man finde drei voneinander verschiedene ungerade Primzahlen a, b, c so, dass $(a^p+b^p-c^p)^2$ für gegebenes $p>2$, $p\in\mathbb{N}$ den kleinstmöglichen Wert x(p) annimmt. Welche nächstgrößeren Werte von $(a^p+b^p-c^p)^2$ treten gestaffelt auf? Diskussion.
[1] Unit 7, part Pythagorean triples
[2] **https**://de.wikipedia.org/wiki/Gro%C3%9Fer_Fermatscher_Satz#Vermutungen,_die_die_Fermatvermutung_umfassen
[3] **https**://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Diophantische_Gleichung&action=edit&redlink=1
[4] A. Salle. Mathematik – Haben wir sie **erfunden** oder nur **entdeckt**? 12. Osnabrücker Wissensforum 2019 **https**://fis.uni-osnabrueck.de/vivouos/display/wf12v23
[5] J. Borwein, K. Devlin. Experimentelle Mathematik. Spektrum Akademischer Verlag 2011, ISBN-13 : 978-3827426611
[6] **https**://de.wikipedia.org/wiki/Geschichte_der_Mathematik
[7] Egmont Colerus. Vom Einmaleins zum Integral: Mathematik für jedermann.

Favoritenpresse 2023, ISBN-13 : 978-3968490601
**https**://de.wikipedia.org/wiki/Egmont_Colerus
[8] J.-L. Chabert et al. A History of Algorithms. Springer Verlag Berlin Heidelberg 1999, ISBN 3-540-63369-3

**********

# Lateral (zum Ausloten): $\mathbf{1} = 7^2 * \sum_{i=1}^{\infty}[2^i * 10^{-2^i}]$

# Suchen Sie für andere Primzahlen anstelle **7** die zugehörige Summandenformel anstelle $[\mathbf{2^i * 10^{-2^i}}]$.

# Ist es möglich, aus Ihren Ergebnissen eine „infinite Entwicklungsformel“ für Primzahlquadrate zu destillieren?

# Erforderliche Konvergenzverbesserung?

**********

**https**://de.wikipedia.org/wiki/**Klartraum**
**https**://www.geo.de/wissen/gesundheit/**klartraeume**--klartraeumer-erklaert--wie-das-funktioniert-33804176.html?utm_source=pocket-newtab-de-de
**https**://www.geo.de/wissen/gesundheit/klartraeume--wie-sie-helfen--aengste-zu-ueberwinden-und-**potenziale-zu-wecken**-33804166.html
**https**://www.geo.de/reisen/reise-inspiration/uebernachten-im-kloster--13-tipps-in-deutschland-33836190.html
**https**://www.geo.de/wissen/gesundheit/schneller-einschlafen--15-praktische-tipps-und-hilfsmittel-

33177748.html
**https**://www.geo.de/wissen/**luzides-traeumen**--wenn-sich-**traeume-steuern**-lassen-31895702.html
**https**://www.psychologie-heute.de/abo-shop/detailseite/40729-psychologie-heute-compact-65-besser-schlafen.html
# D. Erlacher. Anleitung zum Klarträumen: Die nächtliche **Traumwelt selbst gestalten.**
BoD – Books on Demand 2010, ISBNN-13 : 978-3842330740
**https**://www.amazon.de/Anleitung-zum-Klartr%C3%A4umen-n%C3%A4chtliche-Traumwelt/dp/384233074X
# A. Schwarz. Luzides Träumen: Wie du deine Träume bewusst gestalten und für den Alltag **effektiv nutzen** kannst | Mit Klartraum-Anleitung.
Knaur MensSana TB 2022, ISBN-13 : 978-3426879306
**# https**://de.wikipedia.org/wiki/Klartraum
**# https**://sciencenotes.de/wachtraum-luzides-traeumen-hypnagogie-forschung-dormio/?utm_source=pocket-newtab-de-de
**??? Klartraum und Intuition in Mathematik und Naturwissenschaften ???**
**********

**https**://de.wikipedia.org/wiki/Gaston_Bachelard
„**Gaston Bachelard** (* 27. Juni 1884 in Bar-sur-Aube; † 16. Oktober 1962 in Paris) war ein französischer

Philosoph, der sich mit Wissenschaftstheorie und Dichtung beschäftigte. In Wissenschaft wie künstlerischer Imagination sah Bachelard zwei unterschiedliche, aber gleichwertige Möglichkeiten, sich der Differenz des Neuen zu öffnen und als Mensch zu wachsen. Im Bereich der Wissenschaftstheorie sind seine Begriffe Erkenntnishindernis und epistemologisches Profil von Bedeutung.“

# W. Isaacson et al. **Leonardo da Vinci**: Die Biographie („Der New-York-Times-Bestseller über das größte Genie der Menschheitsgeschichte.“)
Propyläen Verlag 2018, ISBN-13 : 978-3549076439

# W. Isaacson. **The Innovators**: Die Vordenker der digitalen Revolution von Ada Lovelace bis Steve Jobs. (How a Group of Hackers, Genuises and Geeks Created the Digital Revolution)
C. Bertelsmann Verlag 2018, ISBN-13 : 978-3570102770

# P. Thiel et al. Zero to One: Wie Innovation unsere Gesellschaft rettet. „Die Zukunft ist keine Kopie. Sie ist radikal anders!“
Campus Verlag 2014, ISBN-13 : 978-3593501604

Egmont Colerus. Vom Einmaleins zum Integral: Mathematik für jedermann.
Favoritenpresse 2023, ISBN-13 : 978-3968490601
**https**://de.wikipedia.org/wiki/Egmont_Colerus

**********

**Zur kritischen Diskussion und weiterem Nachgang**

## **https**://www.spektrum.de/news/hirnforschung-forscher-realisieren-erste-hirn-zu-hirn-kommunikation/1307223

**https**://journals.plos.org/plosone/article?id=10.1371/journal.pone.0105225

C. Grau et al. Conscious Brain-to-Brain Communication in Humans Using Non-Invasive Technologies.

**https**://doi.org/10.1371/journal.pone.0105225

## **https**://www.spektrum.de/news/durch-gedankenkraft-gene-aktivieren/1317993

**https**://www.nature.com/articles/ncomms6392#citeas

Folcher, M., Oesterle, S., Zwicky, K. et al. Mind-controlled transgene expression by a wireless-powered optogenetic designer cell implant. Nat Commun **5**, 5392 (2014).

**https**://doi.org/10.1038/ncomms6392

**********

**Find an electrical and an algorithmic analogon to the push-me pull-you wind vehicle/boat**

# B.L. Blackford. The physics of a **push-me pull-you boat.**
Am. J. Phys. 46(10), 1004-1006 (1978)

# B. L. Blackford. A **push-me pull-you wind vehicle**.
Am. J. Phys. 49, 282–283 (1981) **https**://doi.org/10.1119/1.12627

# H. J. Schlichting, Ch. Ucke. Konstruktiver Gegenwind
- oder: Am Widerstand wachsen.
Physik in unserer Zeit 28/6, 270-272 (1997)

# R. A. Morse. Constant Acceleration: Experiments with a Fan-Driven Dynamics Cart, TPT 31, 436-438 (1993).

# H. J. Schlichting, Ch. Ucke. Konstruktiver Gegenwind
- oder: Am Widerstand wachsen.
Physik in unserer Zeit 28/6, 270-272 (1997)

**https**://www.buch-der-synergie.de/c_neu_html/c_08_02_07_gegenwindfahrzeuge.htm
**https**://hamburg-business.com/de/news/schneller-als-der-wind-mit-windturbinenwagen-zur-neuen-rekordzeit (2020)
# D. Hautmann. Windkraft neu gedacht: Erstaunliche Beispiele für die Nutzung einer unerschöpflichen Ressource.
Carl Hanser Verlag 2020, ISBN-13 : 978-3446464605
Lateral:
**https**://www.researchgate.net/figure/Push-Pull-method-of-capacitor-insertion_fig2_283660606
**https**://www.madbeanpedals.com/forum/index.php?topic=32236.0
**********

## John L. Casti

**https**://en.wikipedia.org/wiki/John_Casti
**https**://de.wikipedia.org/wiki/John_L._Casti
# J.L. Casti. Five Golden Rules: Great Theories of 20th Century Mathematics - and Why They Matter.
John Wiley & Sons, Inc; 1996, ISBN-13: 978-0471002611
# J.L. Casti. Die großen Fünf: Mathematische Theorien, die unser Jahrhundert prägten.
Birkhäuser Verlag; 1996, ISBN-13 : 978-3764353384
Zur kritischen Diskusson:
# J.L. Casti. X-Events: The Collapse of Everything.
William Morrow; Reprint edition 2012, ASIN : B006NZDUS0
**********

09.07.2024 EPScol&alg DScalc&crit SKöweb

**********

# Extension 1

# Curious scf-formulae

**→ A1**

$$\frac{[0;1,2,3]-[0;3,2,1]}{[0;1,2]-[0;2,1]} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{[0;1,2,3,4,5,6,7]-[0;7,6,5,4,3,2,1]}{[0;1,2,3,4]-[0;4,3,2,1]} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{[0;1,2,\ldots,126,127]-[0;127,126,\ldots,2,1]}{[0;1,2,\ldots,7,8]-[0;8,7,\ldots,2,1]} = \frac{6}{5}$$

⋮

**?**

**→ A2**

**(2^…(2^(2^(2^(2^2-1)-1)-1)-1)…-1)**

( **3** ) Mersenne prime

( **7** ) Mersenne prime

( **127** ) Mersenne prime

( 170141183460469231731687303715884105727 ) Mersenne prime

⋮

( **?** ) Conjecture: all Mersenne primes? → Counterexample?

References

[1] Weisstein, Eric W. "Mersenne Prime." From MathWorld--A Wolfram Web Resource.
**http**://mathworld.wolfram.com/MersennePrime.html
[2] **https**://en.wikipedia.org/wiki/Mersenne_prime

[3] **http**://oeis.org/A000043 **https**://oeis.org/A000668

→ **A3**

Find more!?

→ **A3.1** „Continued power“,

→ f.e.

**A3.2**

$a \underline{\wedge} b = \text{int}(a^b);\ \ a,b \in \mathbb{R}_+$

$\alpha(3,a,b) = (a \underline{\wedge} (a \underline{\wedge} (a \underline{\wedge} b-1)-1)-1)$

$\alpha(4,a,b) = (a \underline{\wedge} (a \underline{\wedge} (a \underline{\wedge} (a \underline{\wedge} b-1)-1)-1)-1)$ ↓

**A3.3**

$\beta(n;a_0,a_1,a_2,\ldots a_{n-1},a_n) =$

$(a_n \underline{\wedge} (a_{n-1} \underline{\wedge} \ldots (a_2 \underline{\wedge} (a_1 \underline{\wedge} a_0 -1)-1)\ldots -1)-1);$

$a_i \in \mathbb{N}$ <u>or</u> $a_i \in \mathbb{R}$

Example 1

$\beta(3;2,2,2,2) = 127$

Example 2

$\beta(3;1,1,1,1) = 0$

Example 3

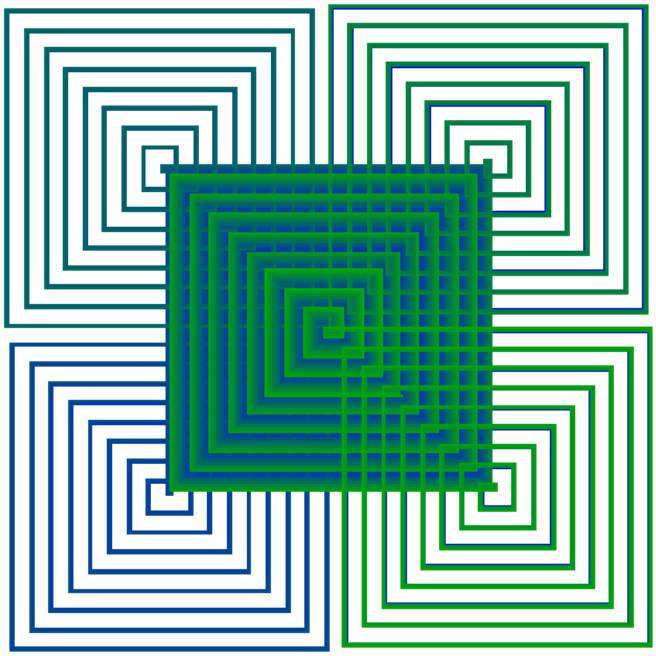
$\beta(3;2,2,2,3) = 2186$

Find an algorithm for representation of a real number by a continued power A3.3.

**A4**

Applications?

**A5**
Links to
**



14.09.2019 EPSalg DScalc

# Extension 2

A determinant-based Maclaurin series and infinite continued fraction representation of real functions f(x), esp. $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ .

==========

## 1. The problem

f(x) is a real analytic function.

$$F^{(i)} = \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \; ; \; i=0,1,2,3,... \; ; \; F^{(0)} = F = f(0) \qquad (1)$$

denotes the normalized i-th derivative of f(x) evaluated at x=0.

The present talk shows the possibility of a consistent determinant-based Maclaurin series and infinite continued fraction representation of f(x), esp. $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$.

## 2. A determinant-based Maclaurin series representation of f(x)

The Maclaurin series of f(x)

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} F^{(i)} x^i$$

$$= F^{(0)} + F^{(1)}x + F^{(2)}x^2 + F^{(3)}x^3 + F^{(4)}x^4 + \ldots \qquad (2)$$

can be represented by the infinite determinant

$$f(x) = -\begin{vmatrix} 0 & F & F^{(1)} & F^{(2)} & F^{(3)} & F^{(4)} & \rightarrow \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ x & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ x^2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ x^3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ x^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \downarrow & & & & & & \square \end{vmatrix} . \qquad (3)$$

## 3. Extension of the determinant representation equ. (3) for f(x) = u(x)/v(x)

Equ. (3) is the suitable launch pad (see [1])
for the following extension:
The Maclaurin series of

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \; ; v(0) = 1 \; ;$$

u(x) and v(x) are real analytic functions (4)
can be represented by the infinite determinant

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & U & U^{(1)} & U^{(2)} & U^{(3)} & U^{(4)} & \rightarrow \\ 1 & 1 & V^{(1)} & V^{(2)} & V^{(3)} & V^{(4)} & \\ x & 0 & 1 & V^{(1)} & V^{(2)} & V^{(3)} & \\ x^2 & 0 & 0 & 1 & V^{(1)} & V^{(2)} & \\ x^3 & 0 & 0 & 0 & 1 & V^{(1)} & \\ x^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \downarrow & & & & & & \square \end{vmatrix} . \quad (5)$$

## 4. Special cases of equs (4) and (5)

### 4.1

In the special case
u(x) =1

we obtain from the Maclaurin series of

$$v(x) = \sum_{i=0}^{\infty} V^{(i)} x^i \; ; v(0) = V = 1 \qquad (6.1)$$

via equ. (5) the infinite power series of $\frac{1}{v(x)}$

in determinant representation

$$\frac{1}{v(x)} =$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & V^{(1)} & V^{(2)} & V^{(3)} & V^{(4)} & V^{(5)} & \rightarrow \\ x & 1 & V^{(1)} & V^{(2)} & V^{(3)} & V^{(4)} & \\ x^2 & 0 & 1 & V^{(1)} & V^{(2)} & V^{(3)} & \\ x^3 & 0 & 0 & 1 & V^{(1)} & V^{(2)} & \\ x^4 & 0 & 0 & 0 & 1 & V^{(1)} & \\ x^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \downarrow & & & & & & \square \end{vmatrix} . \qquad (6.2)$$

**4.2**

For the special case

$$u(0) = u^{(2)}(0) = u^{(4)}(0) = u^{(6)}(0) = \ldots = 0 \ ;$$

$$v^{(1)}(0) = v^{(3)}(0) = u^{(5)}(0) = u^{(7)}(0) = \ldots = 0 \qquad (7.1)$$

equ. (5) can be reduced to

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} =$$

$$-\begin{vmatrix} 0 & U^{(1)} & U^{(3)} & U^{(5)} & U^{(7)} & U^{(9)} & \rightarrow \\ x & 1 & V^{(2)} & V^{(4)} & V^{(6)} & V^{(8)} & \\ x^3 & 0 & 1 & V^{(2)} & V^{(4)} & V^{(6)} & \\ x^5 & 0 & 0 & 1 & V^{(2)} & V^{(4)} & \\ x^7 & 0 & 0 & 0 & 1 & V^{(2)} & \\ x^9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \downarrow & & & & & & \square \end{vmatrix} . \qquad (7.2)$$

Example 1

$u(x) = \sin x$ ; $v(x) = \cos x$ ; $f(x) = \tan x$ (8)

With equ. (8) we obtain a 2D infinite determinant representation for tanx

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{5!} & \frac{1}{7!} & \frac{1}{9!} & \rightarrow \\ -x & \frac{1}{0!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{6!} & \frac{1}{8!} & \\ x^3 & 0 & \frac{1}{0!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{6!} & \\ -x^5 & 0 & 0 & \frac{1}{0!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{4!} & \\ x^7 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0!} & \frac{1}{2!} & \\ -x^9 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0!} & \\ \downarrow & & & & & & \square \end{vmatrix} \quad (9.1)$$

$$= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \ldots . \quad (9.2)$$

Comparing equ. (9.1) with the 1D Maclaurin series of tanx

$$\tan x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{2i}(2^{2i}-1)}{(2i)!}(-1)^{i-1} B_{2i} x^{2i-1} \qquad (10)$$

we get a 2D determinant representation of the Bernoulli numbers [2]

$$B_{2i} = (-1)^{i-1} \frac{(2i)!}{2^{2i}(2^{2i}-1)} \begin{vmatrix} \frac{1}{1!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{5!} & \frac{1}{7!} & \frac{1}{9!} & \to \\ \frac{1}{0!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{6!} & \frac{1}{8!} & \\ 0 & \frac{1}{0!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{6!} & \\ 0 & 0 & \frac{1}{0!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{4!} & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0!} & \frac{1}{2!} & \\ \downarrow & & & & & \square \end{vmatrix}.$$

determinant of i-th order

(11)

Similar 2D determinant representations of $B_{2i}$ are

$$B_{2i} = (-1)^{i-1} \frac{(2i)!}{(2^{2i}-2)} \begin{vmatrix} \frac{1}{3!} & \frac{1}{5!} & \frac{1}{7!} & \frac{1}{9!} & \frac{1}{11!} & \rightarrow \\ \frac{1}{1!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{5!} & \frac{1}{7!} & \frac{1}{9!} & \\ 0 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{5!} & \frac{1}{7!} & \\ 0 & 0 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{5!} & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{3!} & \\ \downarrow & & & & & \square \end{vmatrix} \quad (12)$$

determinant of i-th order

$$B_{2i} = \frac{(-1)^{i-1}}{2(2^{2i}-1)} *$$

$$\begin{vmatrix}
1 & \binom{1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rightarrow \\
0 & \binom{2}{0} & \binom{2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & \binom{3}{1} & \binom{3}{3} & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & \binom{4}{0} & \binom{4}{2} & \binom{4}{4} & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & \binom{5}{1} & \binom{5}{3} & \binom{5}{5} & 0 & \\
0 & 0 & 0 & \binom{6}{0} & \binom{6}{2} & \binom{6}{4} & \binom{6}{6} & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \binom{7}{1} & \binom{7}{3} & \binom{7}{5} & \\
\downarrow & & & & & & & \square
\end{vmatrix} \quad (14)$$

determinant of i-th order

Example 2

$$u(x) = x \; ; \; v(x) = \cos x \; ; \; f(x) = \frac{x}{\cos x} \qquad (15)$$

With equ. (15) we obtain a 2D infinite determinant representation for tanx

$$\frac{x}{\cos x} = \begin{vmatrix} x & \frac{1}{2!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{6!} & \frac{1}{8!} & \frac{1}{10!} & \rightarrow \\ -x^3 & \frac{1}{0!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{6!} & \frac{1}{8!} & \\ x^5 & 0 & \frac{1}{0!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{6!} & \\ -x^7 & 0 & 0 & \frac{1}{0!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{4!} & \\ x^9 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0!} & \frac{1}{2!} & \\ -x^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0!} & \\ \downarrow & & & & & & \square \end{vmatrix} \qquad (16.1)$$

$$= x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{24}x^5 + \frac{61}{720}x^7 + \frac{1385}{40320}x^9 + \ldots . \qquad (16.2)$$

Comparing equ. (16.1) with the 1D Maclaurin series of

$$\frac{x}{\cos x} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i)!}(-1)^i E_{2i} x^{2i+1} \qquad (17)$$

we obtain a 2D determinant representation of the Euler numbers [3]

$$E_{2i} = (-1)^i (2i)! \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{6!} & \frac{1}{8!} & \frac{1}{10!} & \rightarrow \\ \frac{1}{0!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{6!} & \frac{1}{8!} & \\ 0 & \frac{1}{0!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{6!} & \\ 0 & 0 & \frac{1}{0!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{4!} & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0!} & \frac{1}{2!} & \\ \downarrow & & & & & \square \end{vmatrix}. \qquad (18)$$

The comparison of the equs (12) and (18) shows the close structural connection between Bernoulli and Euler numbers.

Find a Pascal's triangle representation for $E_{2i}$ corresponding to $B_{2i}$ equ. (14).

Another interesting comparison!
Pascal's triangle and the sum of powers of integers

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} i^{6}}{\sum_{i=1}^{n} i^{0}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (-n)^{1} & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (-n)^{2} & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ (-n)^{3} & 1 & 4 & 6 & 4 & 0 & 0 \\ (-n)^{4} & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 0 \\ (-n)^{5} & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 \\ (-n)^{6} & 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (-1)^{1} & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (-1)^{2} & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ (-1)^{3} & 1 & 4 & 6 & 4 & 0 & 0 \\ (-1)^{4} & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 0 \\ (-1)^{5} & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 \\ (-1)^{6} & 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 \end{vmatrix}}$$

(6+1) by (6+1) determinants

$$\Delta(k=7,n)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p^1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p^2 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ p^3 & 0 & 1 & 10 & 5 & 0 & 0 \\ p^4 & 0 & 0 & 6 & 20 & 6 & 0 \\ p^5 & 0 & 0 & 1 & 21 & 35 & 7 \\ p^6 & 0 & 0 & 0 & 8 & 56 & 56 \end{vmatrix}$$

7 by 7 determinant

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} i^{2k+1}}{\sum_{i=1}^{n} i^3} = \frac{\Delta(k,n)}{\Delta(k,1)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left( \sum_{i=1}^{n} i^1 \right)^2 = \frac{p^2}{4} \; ; \; p=n(n+1)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}i^{6}}{1}=\frac{\begin{vmatrix} n \bmod 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n^{1} & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n^{2} & 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ n^{3} & -1 & 3 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ n^{4} & 1 & -4 & 6 & -4 & 2 & 0 \\ n^{5} & -1 & 5 & -10 & 10 & -5 & 2 \\ n^{6} & 1 & -6 & 15 & -20 & 15 & -6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 \bmod 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1^{1} & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1^{2} & 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1^{3} & -1 & 3 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 1^{4} & 1 & -4 & 6 & -4 & 2 & 0 \\ 1^{5} & -1 & 5 & -10 & 10 & -5 & 2 \\ 1^{6} & 1 & -6 & 15 & -20 & 15 & -6 \end{vmatrix}}$$

(6+1) by (6+1) determinants

$$D(k=7,n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p^1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p^2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ p^3 & 0 & 1 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ p^4 & 0 & 0 & 5 & 10 & 1 & 0 \\ p^5 & 0 & 0 & 1 & 15 & 15 & 1 \\ p^6 & 0 & 0 & 0 & 7 & 35 & 21 \end{vmatrix}$$

7 by 7 determinant

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}i^{2k}}{\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}i^{2}}=\frac{D(k,n)}{D(k,1)}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}i^{2}=\sum_{i=1}^{n}i^{1}=\frac{1}{2}p\ ;\ p=n(n+1)$$

## Extension 3

**5. A determinant-based infinite continued fraction representation of f(x) for the special case $f^{(2k)}(0) = 0$ ; k=0,1,2,3,…**

**$f^{(1)}(0) =1$**

**corresponding with section 4.2**

## 5.1 Transformation of the Maclaurin series of f(x) into an infinite continued fraction

The Maclaurin series of

f(x) with $f^{(2k)}(0) = 0 \;\text{®}\; F^{(2k)} = 0\,;\; k = 0,1,2,3,\ldots$

and $f^{(1)} = 1 \;\text{®}\; F^{(1)} = 1$

$$= F^{(1)}x + F^{(3)}x^3 + F^{(5)}x^5 + F^{(7)}x^7 + F^{(9)}x^9 + \ldots$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & F^{(1)} & F^{(3)} & F^{(5)} & F^{(7)} & F^{(9)} & \rightarrow \\ x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ x^3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ x^5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ x^7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ x^9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \downarrow & & & & & & \square \end{vmatrix} \qquad (19)$$

can be reversibly transformed into an infinite continued fraction

$$f(x) = [0; \frac{\alpha_1}{x}, \frac{\alpha_2}{x}, \frac{\alpha_3}{x}, \frac{\alpha_4}{x}, \frac{\alpha_5}{x}, ...]$$

$$= \cfrac{1}{\cfrac{\alpha_1}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{\alpha_2}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{\alpha_3}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{\alpha_4}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{\alpha_5}{x} + ...}}}}} \qquad (20.1)$$

$$= \cfrac{x}{\alpha_1 + \cfrac{x^2}{\alpha_2 + \cfrac{x^2}{\alpha_3 + \cfrac{x^2}{\alpha_4 + \cfrac{x^2}{\alpha_5 + ...}}}}} \qquad (20.2)$$

Die Kettenbruchkoeffizienten $\alpha_i$ sind mit den normierten Ableitungswerten $F^{(2k+1)}$ von f(x) durch nachstehendes eindeutig umkehrbares infinites Rekursionsgleichungssystem verbunden.

Die Determinantenausdrücke $\beta_i(F)$ zeigen sowohl bezüglich Vorzeichen als auch Aufbau der Determinanten einen Quantisierungseffekt.

$$\alpha_1 = \beta_1(\mathrm{F}) = \frac{(-1)^{\mathrm{int}(\frac{1+1}{4})} = 1}{\mathrm{F}^{(1)}}$$

$$= \frac{(-1)^{\mathrm{int}(\frac{1+1}{4})+\mathrm{int}(\frac{1+2}{4})} = 1}{\mathrm{F}^{(1)}} = 1 \qquad (22.1)$$

$$\alpha_2 = \beta_2(\mathrm{F}) = \frac{(-1)^{\mathrm{int}(\frac{2+1}{4})} = 1}{\Delta_2}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \mathrm{F}^{(1)} & \mathrm{F}^{(3)} \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(-1)^{\mathrm{int}(\frac{2+1}{4})+\mathrm{int}(\frac{2+2}{4})} = -1}{\mathrm{F}^{(3)}} \qquad (22.2)$$

$$\alpha_2^2\alpha_3 = \beta_3(\mathrm{F}) = \frac{(-1)^{\mathrm{int}(\frac{3+1}{4})} = -1}{\Delta_3}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \mathrm{F}^{(1)} & \mathrm{F}^{(3)} & \mathrm{F}^{(5)} \\ 0 & \mathrm{F}^{(1)} & \mathrm{F}^{(3)} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(-1)^{\text{int}(\frac{3+1}{4})+\text{int}(\frac{3+2}{4})} = 1}{\begin{vmatrix} F^{(1)} & F^{(3)} \\ F^{(3)} & F^{(5)} \end{vmatrix}} \tag{22.3}$$

$$\alpha_2^3\alpha_3^2\alpha_4 = \beta_4(F) = \frac{(-1)^{\text{int}(\frac{4+1}{4})} = -1}{\Delta_4 = \begin{vmatrix} F^{(1)} & F^{(3)} & F^{(5)} & F^{(7)} \\ 0 & F^{(1)} & F^{(3)} & F^{(5)} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{(-1)^{\text{int}(\frac{4+1}{4})+\text{int}(\frac{4+2}{4})} = 1}{\begin{vmatrix} F^{(3)} & F^{(5)} \\ F^{(5)} & F^{(7)} \end{vmatrix}} \tag{22.4}$$

$$\alpha_2^4\alpha_3^3\alpha_4^2\alpha_5 = \beta_5(\mathrm{F}) = \frac{(-1)^{\mathrm{int}(\frac{5+1}{4})} = -1}{\Delta_5 = \begin{vmatrix} \mathrm{F}^{(1)} & \mathrm{F}^{(3)} & \mathrm{F}^{(5)} & \mathrm{F}^{(7)} & \mathrm{F}^{(9)} \\ 0 & \mathrm{F}^{(1)} & \mathrm{F}^{(3)} & \mathrm{F}^{(5)} & \mathrm{F}^{(7)} \\ 0 & 0 & \mathrm{F}^{(1)} & \mathrm{F}^{(3)} & \mathrm{F}^{(5)} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{(-1)^{\mathrm{int}(\frac{5+1}{4})+\mathrm{int}(\frac{5+2}{4})} = 1}{\begin{vmatrix} \mathrm{F}^{(1)} & \mathrm{F}^{(3)} & \mathrm{F}^{(5)} \\ \mathrm{F}^{(3)} & \mathrm{F}^{(5)} & \mathrm{F}^{(7)} \\ \mathrm{F}^{(5)} & \mathrm{F}^{(7)} & \mathrm{F}^{(9)} \end{vmatrix}} \qquad (22.5)$$

$$\alpha_2^5\alpha_3^4\alpha_4^3\alpha_5^2\alpha_6 = \beta_6(\mathrm{F})$$

$$= \frac{(-1)^{\mathrm{int}(\frac{6+1}{4})} = -1}{\Delta_6 = \begin{vmatrix} \mathrm{F}^{(1)} & \mathrm{F}^{(3)} & \mathrm{F}^{(5)} & \mathrm{F}^{(7)} & \mathrm{F}^{(9)} & \mathrm{F}^{(11)} \\ 0 & \mathrm{F}^{(1)} & \mathrm{F}^{(3)} & \mathrm{F}^{(5)} & \mathrm{F}^{(7)} & \mathrm{F}^{(9)} \\ 0 & 0 & \mathrm{F}^{(1)} & \mathrm{F}^{(3)} & \mathrm{F}^{(5)} & \mathrm{F}^{(7)} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{(-1)^{\mathrm{int}(\frac{6+1}{4})+\mathrm{int}(\frac{6+2}{4})} = -1}{\begin{vmatrix} \mathrm{F}^{(3)} & \mathrm{F}^{(5)} & \mathrm{F}^{(7)} \\ \mathrm{F}^{(5)} & \mathrm{F}^{(7)} & \mathrm{F}^{(9)} \\ \mathrm{F}^{(7)} & \mathrm{F}^{(9)} & \mathrm{F}^{(11)} \end{vmatrix}} \qquad (22.6)$$

$$\alpha_2^6\alpha_3^5\alpha_4^4\alpha_5^3\alpha_6^2\alpha_7=\beta_7(\mathrm{F})$$

$$=\frac{(-1)^{\mathrm{int}(\frac{7+1}{4})}=1}{\Delta_7=\begin{vmatrix} F^{(1)} & F^{(3)} & F^{(5)} & F^{(7)} & F^{(9)} & F^{(11)} & F^{(13)} \\ 0 & F^{(1)} & F^{(3)} & F^{(5)} & F^{(7)} & F^{(9)} & F^{(11)} \\ 0 & 0 & F^{(1)} & F^{(3)} & F^{(5)} & F^{(7)} & F^{(9)} \\ 0 & 0 & 0 & F^{(1)} & F^{(3)} & F^{(5)} & F^{(7)} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{(-1)^{\mathrm{int}(\frac{7+1}{4})+\mathrm{int}(\frac{7+2}{4})}=1}{\begin{vmatrix} F^{(1)} & F^{(3)} & F^{(5)} & F^{(7)} \\ F^{(3)} & F^{(5)} & F^{(7)} & F^{(9)} \\ F^{(5)} & F^{(7)} & F^{(9)} & F^{(11)} \\ F^{(7)} & F^{(9)} & F^{(11)} & F^{(13)} \end{vmatrix}} \qquad (22.7)$$

$$\alpha_2^7\alpha_3^6\alpha_4^5\alpha_5^4\alpha_6^3\alpha_7^2\alpha_8 = \beta_8(F) =$$

$$(-1)^{\text{int}(\frac{8+1}{4})} = 1$$

$$\Delta_8 = \begin{vmatrix} F^{(1)} & F^{(3)} & F^{(5)} & F^{(7)} & F^{(9)} & F^{(11)} & F^{(13)} & F^{(15)} \\ 0 & F^{(1)} & F^{(3)} & F^{(5)} & F^{(7)} & F^{(9)} & F^{(11)} & F^{(13)} \\ 0 & 0 & F^{(1)} & F^{(3)} & F^{(5)} & F^{(7)} & F^{(9)} & F^{(11)} \\ 0 & 0 & 0 & F^{(1)} & F^{(3)} & F^{(5)} & F^{(7)} & F^{(9)} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(-1)^{\text{int}(\frac{8+1}{4})+\text{int}(\frac{8+2}{4})} = 1}{\begin{vmatrix} F^{(3)} & F^{(5)} & F^{(7)} & F^{(9)} \\ F^{(5)} & F^{(7)} & F^{(9)} & F^{(11)} \\ F^{(7)} & F^{(9)} & F^{(11)} & F^{(13)} \\ F^{(9)} & F^{(11)} & F^{(13)} & F^{(15)} \end{vmatrix}} \qquad (22.8)$$

Die Determinantenausdrücke $\beta_i(F)$ zeigen sowohl bezüglich Vorzeichen als auch Aufbau der Determinanten $\Delta_k(F)$ einen Quantisierungseffekt. Die Berechnung der $\alpha_i$

aus den $F^{(2k-1)}$ via Gl. (22) kann
** sowohl rekursiv aus den Gln (22.1,2,3,4,…)
** als auch durch „Mittelwertbildung“

$$\alpha_1 = \beta_1(F)\ ;\ \alpha_2 = \beta_2(F)$$

$$\alpha_i = \frac{\beta_{i-2}(F) * \beta_i(F)}{(\beta_{i-1}(F))^2} = (-1)^{\mathrm{int}(\frac{i-1}{2})}\ \frac{\Delta_{i-1}^2}{\Delta_{i-2}\Delta_i}\ ;\ i=3,4,5,... \qquad (23)$$

- a beautiful solution -,

erfolgen.

**5.2 Rücktransformation $\alpha_i \rightarrow F^{(2k-1)}$**

Die zugehörige Umkehrung: Berechnung der $F^{(2k-1)}$ aus den $\alpha_i$ via Gl. (22) erfolgt rekursiv.

$$+F^{(1)} = \frac{1}{\alpha_1} = 1 \tag{24.1}$$

$$-F^{(3)} = \frac{1}{\alpha_2} - \Delta_2^*(F)\ ;\ \Delta_2^*(F) = \begin{vmatrix} F^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$= \frac{1}{\alpha_2} \tag{24.2}$$

$$+F^{(5)} = \frac{1}{\alpha_2^2 \alpha_3} + \Delta_3^*(F)\ ;$$

$$\Delta_3^*(F) = \begin{vmatrix} F^{(1)} & F^{(3)} & 0 \\ 0 & F^{(1)} & F^{(3)} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\alpha_2^2 \alpha_3} + \frac{1}{\alpha_2^2} \tag{24.3}$$

$$-F^{(7)} = \frac{1}{\alpha_2^2 \alpha_3^2 \alpha_4} + \alpha_2 \Delta_4^*(F) ;$$

$$\Delta_4^*(F) = \begin{vmatrix} F^{(1)} & F^{(3)} & F^{(5)} & 0 \\ 0 & F^{(1)} & F^{(3)} & F^{(5)} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\alpha_2^2 \alpha_3^2 \alpha_4} + \frac{1}{\alpha_2^3}\left(1 + \frac{1}{\alpha_3}\right)^2 \qquad (24.4)$$

$$+F^{(9)} = \frac{1}{\alpha_2^2 \alpha_3^2 \alpha_4^2 \alpha_5} + \alpha_2^2 \alpha_3 \Delta_5^*(F) ;$$

$$\Delta_5^*(F) = \begin{vmatrix} F^{(1)} & F^{(3)} & F^{(5)} & F^{(7)} & 0 \\ 0 & F^{(1)} & F^{(3)} & F^{(5)} & F^{(7)} \\ 0 & 0 & F^{(1)} & F^{(3)} & F^{(5)} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad (24.5)$$

**Inversion!!!**

$$A_1 = \alpha_1 = 1$$

$$-A_3 = \frac{1}{\alpha_2}$$

$$A_5 = \frac{1}{\alpha_2^2} + \frac{1}{\alpha_2^2 \alpha_3}$$

$$-A_7 = \frac{1}{\alpha_2^3} + \frac{2}{\alpha_2^3 \alpha_3} + \frac{1}{\alpha_2^3 \alpha_3^2} + \frac{1}{\alpha_2^2 \alpha_3^2 \alpha_4}$$

$$= \frac{(1+\alpha_3)^2}{\alpha_2^3 \alpha_3^2} + \frac{1}{\alpha_2^2 \alpha_3^2 \alpha_4}$$

$$A_9 = \frac{(1+\alpha_3)^3}{\alpha_2^4 \alpha_3^3} + 2\frac{1+\alpha_3}{\alpha_2^3 \alpha_3^3 \alpha_4} + \frac{1}{\alpha_2^2 \alpha_3^3 \alpha_4^2}$$

$$+ \frac{1}{\alpha_2^2 \alpha_3^2 \alpha_4^2 \alpha_5}$$

.....

$$(-1)^{k-1} F^{(2k-1)} = \frac{1}{(\alpha_2 \alpha_3 ... \alpha_{k-1})^2 \alpha_k}$$

$$+ (-1)^{\mathrm{int}(\frac{k+1}{4})+1} \alpha_2^{k-3} \alpha_3^{k-4} ... \alpha_{k-3}^2 \alpha_{k-2} \Delta_k^*(F) \quad (24.6)$$

Example 3

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1\pm x^2}}=\sum_{i=0}^{\infty}(\pm 1)^i\frac{\binom{2i}{i}}{2^{2i}}x^{2i+1}$$

$$F^{(1)}=1,\ F^{(3)}=\mp\frac{1}{2},\ F^{(5)}=\frac{3}{8},\ F^{(7)}=\mp\frac{5}{16},$$

$$F^{(9)}=\frac{35}{128},\ F^{(11)}=\mp\frac{63}{256},\ F^{(13)}=\frac{231}{1024},$$

$$F^{(15)}=\mp\frac{429}{2048},\ F^{(17)}=\frac{6435}{32768},$$

$$F^{(19)}=\mp\frac{12155}{2^{16}}=\mp\frac{5*11*13*17}{2^{16}},$$

$$F^{(21)}=\frac{46189}{2^{18}}=\frac{11*13*17*19}{2^{18}},$$

$$F^{(23)}=\mp\frac{88179}{2^{19}}=\mp\frac{3*7*13*17*19}{2^{19}},$$

$$F^{(25)}=\frac{676039}{2^{22}}=\frac{7*13*17*19*23}{2^{22}},$$

$$F^{(27)}=\mp\frac{1300075}{2^{23}}=\mp\frac{5^2*7*17*19*23}{2^{23}},\ \ldots$$

$$\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_6 = \alpha_8 = ... = \pm 2,$$
$$\alpha_3 = \alpha_5 = \alpha_7 = \alpha_9 = ... = 2$$

Die Berechnung bestätigt die Gln (22), (23) und (24).

Example 4
****

## 6. A determinant-based infinite continued fraction representation of f(x) = u(x)/v(x) for the special case $u^{(2k)}(0) = v^{(2k+1)}(0) = 0$ ; k=0,1,2,3,… $u^{(1)}(0) = v(0) = 1$

"In unserm Weinberg liegt ein Schatz, grabt nur danach!"
Gottfried August Bürger
The treasure is here the complete structural consistency of all determinants. Let's excavate more!
The Maclaurin series of

$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ with $u^{(1)}(0) = v(0) = 1$ and

$$u^{(2k)}(0) = v^{(2k+1)}(0) = 0 \ ; \ k=0,1,2,3,\ldots$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & U^{(1)} & U^{(3)} & U^{(5)} & U^{(7)} & U^{(9)} & \rightarrow \\ x & 1 & V^{(2)} & V^{(4)} & V^{(6)} & V^{(8)} & \\ x^3 & 0 & 1 & V^{(2)} & V^{(4)} & V^{(6)} & \\ x^5 & 0 & 0 & 1 & V^{(2)} & V^{(4)} & \\ x^7 & 0 & 0 & 0 & 1 & V^{(2)} & \\ x^9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \downarrow & & & & & & \square \end{vmatrix}$$

can be reversibly transformed into an infinite continued fraction

$$f(x) = [0; \frac{\alpha_1}{x}, \frac{\alpha_2}{x}, \frac{\alpha_3}{x}, \frac{\alpha_4}{x}, \frac{\alpha_5}{x}, ...]$$

$$= \cfrac{1}{\cfrac{\alpha_1}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{\alpha_2}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{\alpha_3}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{\alpha_4}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{\alpha_5}{x} + ...}}}}} \qquad (20.1)$$

$$= \cfrac{x}{\alpha_1 + \cfrac{x^2}{\alpha_2 + \cfrac{x^2}{\alpha_3 + \cfrac{x^2}{\alpha_4 + \cfrac{x^2}{\alpha_5 + ...}}}}} \qquad (20.2)$$

Die Kettenbruchkoeffizienten $\alpha_i$ sind mit den normierten Ableitungswerten $U^{(2k)}$ und $V^{(2k+1)}$ von u(x) bzw. v(x) durch nachstehendes eindeutig umkehrbares infinites Rekursionsgleichungssystem verbunden.

$$\alpha_1 = \beta_1(\mathrm{U},\mathrm{V}) = \frac{(-1)^{\mathrm{int}(\frac{1+1}{4})} = 1}{\mathrm{U}^{(1)}} = 1$$

$$\alpha_2 = \beta_2(\mathrm{U},\mathrm{V}) = \frac{(-1)^{\mathrm{int}(\frac{2+1}{4})} = 1}{\Delta_2(\mathrm{U},\mathrm{V})}$$

$$\Delta_2(\mathrm{U},\mathrm{V}) = \begin{vmatrix} \mathrm{U}^{(1)} & \mathrm{U}^{(3)} \\ \mathrm{V} & \mathrm{V}^{(2)} \end{vmatrix}$$

$$\alpha_2^2\alpha_3 = \beta_3(\mathrm{U},\mathrm{V}) = \frac{(-1)^{\mathrm{int}(\frac{3+1}{4})} = -1}{\Delta_3(\mathrm{U},\mathrm{V})}$$

$$\Delta_3(\mathrm{U},\mathrm{V}) = \begin{vmatrix} \mathrm{U}^{(1)} & \mathrm{U}^{(3)} & \mathrm{U}^{(5)} \\ 0 & \mathrm{U}^{(1)} & \mathrm{U}^{(3)} \\ \mathrm{V} & \mathrm{V}^{(2)} & \mathrm{V}^{(4)} \end{vmatrix}$$

$$\alpha_1 = \beta_1(\mathrm{U},\mathrm{V}) = \frac{(-1)^{\mathrm{int}(\frac{1+1}{4})} = 1}{\mathrm{U}^{(1)}} = 1$$

$$\alpha_2 = \beta_2(\mathrm{U},\mathrm{V}) = \frac{(-1)^{\mathrm{int}(\frac{2+1}{4})} = 1}{\Delta_2(\mathrm{U},\mathrm{V})}$$

$$\Delta_2(\mathrm{U},\mathrm{V}) = \begin{vmatrix} \mathrm{U}^{(1)} & \mathrm{U}^{(3)} \\ \mathrm{V} & \mathrm{V}^{(2)} \end{vmatrix}$$

$$\alpha_2^2\alpha_3 = \beta_3(\mathrm{U},\mathrm{V}) = \frac{(-1)^{\mathrm{int}(\frac{3+1}{4})} = -1}{\Delta_3(\mathrm{U},\mathrm{V})}$$

$$\Delta_3(\mathrm{U},\mathrm{V}) = \begin{vmatrix} \mathrm{U}^{(1)} & \mathrm{U}^{(3)} & \mathrm{U}^{(5)} \\ 0 & \mathrm{U}^{(1)} & \mathrm{U}^{(3)} \\ \mathrm{V} & \mathrm{V}^{(2)} & \mathrm{V}^{(4)} \end{vmatrix}$$

$$\alpha_2^3\alpha_3^2\alpha_4 = \beta_4(\mathrm{U},\mathrm{V}) = \frac{(-1)^{\mathrm{int}(\frac{4+1}{4})} = -1}{\Delta_4(\mathrm{U},\mathrm{V})}$$

$$\Delta_4(\mathrm{U},\mathrm{V}) = \begin{vmatrix} \mathrm{U}^{(1)} & \mathrm{U}^{(3)} & \mathrm{U}^{(5)} & \mathrm{U}^{(7)} \\ 0 & \mathrm{U}^{(1)} & \mathrm{U}^{(3)} & \mathrm{U}^{(5)} \\ \mathrm{V} & \mathrm{V}^{(2)} & \mathrm{V}^{(4)} & \mathrm{V}^{(6)} \\ 0 & \mathrm{V} & \mathrm{V}^{(2)} & \mathrm{V}^{(4)} \end{vmatrix}$$

$$\alpha_2^4\alpha_3^3\alpha_4^2\alpha_5 = \beta_5(\mathrm{U},\mathrm{V}) = \frac{(-1)^{\mathrm{int}(\frac{5+1}{4})} = -1}{\Delta_5(\mathrm{U},\mathrm{V})}$$

$$\Delta_5(\mathrm{U},\mathrm{V}) = \begin{vmatrix} \mathrm{U}^{(1)} & \mathrm{U}^{(3)} & \mathrm{U}^{(5)} & \mathrm{U}^{(7)} & \mathrm{U}^{(9)} \\ 0 & \mathrm{U}^{(1)} & \mathrm{U}^{(3)} & \mathrm{U}^{(5)} & \mathrm{U}^{(7)} \\ 0 & 0 & \mathrm{U}^{(1)} & \mathrm{U}^{(3)} & \mathrm{U}^{(5)} \\ \mathrm{V} & \mathrm{V}^{(2)} & \mathrm{V}^{(4)} & \mathrm{V}^{(6)} & \mathrm{V}^{(8)} \\ 0 & \mathrm{V} & \mathrm{V}^{(2)} & \mathrm{V}^{(4)} & \mathrm{V}^{(6)} \end{vmatrix}$$

$$\alpha_2^4\alpha_3^3\alpha_4^2\alpha_5 = \beta_5(\mathrm{U},\mathrm{V}) = \frac{(-1)^{\mathrm{int}(\frac{5+1}{4})} = -1}{\Delta_5(\mathrm{U},\mathrm{V})}$$

$$\Delta_5(\mathrm{U},\mathrm{V}) = \begin{vmatrix} \mathrm{U}^{(1)} & \mathrm{U}^{(3)} & \mathrm{U}^{(5)} & \mathrm{U}^{(7)} & \mathrm{U}^{(9)} \\ 0 & \mathrm{U}^{(1)} & \mathrm{U}^{(3)} & \mathrm{U}^{(5)} & \mathrm{U}^{(7)} \\ 0 & 0 & \mathrm{U}^{(1)} & \mathrm{U}^{(3)} & \mathrm{U}^{(5)} \\ \mathrm{V} & \mathrm{V}^{(2)} & \mathrm{V}^{(4)} & \mathrm{V}^{(6)} & \mathrm{V}^{(8)} \\ 0 & \mathrm{V} & \mathrm{V}^{(2)} & \mathrm{V}^{(4)} & \mathrm{V}^{(6)} \end{vmatrix}$$

$$\alpha_2^5\alpha_3^4\alpha_4^3\alpha_5^2\alpha_6 = \beta_6(\mathrm{U},\mathrm{V}) = \frac{(-1)^{\mathrm{int}(\frac{6+1}{4})} = -1}{\Delta_6(\mathrm{U},\mathrm{V})}$$

$$\Delta_6(\mathrm{U},\mathrm{V}) = \begin{vmatrix} \mathrm{U}^{(1)} & \mathrm{U}^{(3)} & \mathrm{U}^{(5)} & \mathrm{U}^{(7)} & \mathrm{U}^{(9)} & \mathrm{U}^{(11)} \\ 0 & \mathrm{U}^{(1)} & \mathrm{U}^{(3)} & \mathrm{U}^{(5)} & \mathrm{U}^{(7)} & \mathrm{U}^{(9)} \\ 0 & 0 & \mathrm{U}^{(1)} & \mathrm{U}^{(3)} & \mathrm{U}^{(5)} & \mathrm{U}^{(7)} \\ \mathrm{V} & \mathrm{V}^{(2)} & \mathrm{V}^{(4)} & \mathrm{V}^{(6)} & \mathrm{V}^{(8)} & \mathrm{V}^{(10)} \\ 0 & \mathrm{V} & \mathrm{V}^{(2)} & \mathrm{V}^{(4)} & \mathrm{V}^{(6)} & \mathrm{V}^{(8)} \\ 0 & 0 & \mathrm{V} & \mathrm{V}^{(2)} & \mathrm{V}^{(4)} & \mathrm{V}^{(6)} \end{vmatrix}$$

$$\alpha_2^6\alpha_3^5\alpha_4^4\alpha_5^3\alpha_6^2\alpha_7 = \beta_7(\mathrm{U},\mathrm{V}) = \frac{(-1)^{\mathrm{int}(\frac{7+1}{4})} = 1}{\Delta_7(\mathrm{U},\mathrm{V})}$$

$$\Delta_7(\mathrm{U},\mathrm{V}) = \begin{vmatrix} \mathrm{U}^{(1)} & \mathrm{U}^{(3)} & \mathrm{U}^{(5)} & \mathrm{U}^{(7)} & \mathrm{U}^{(9)} & \mathrm{U}^{(11)} & \mathrm{U}^{(13)} \\ 0 & \mathrm{U}^{(1)} & \mathrm{U}^{(3)} & \mathrm{U}^{(5)} & \mathrm{U}^{(7)} & \mathrm{U}^{(9)} & \mathrm{U}^{(11)} \\ 0 & 0 & \mathrm{U}^{(1)} & \mathrm{U}^{(3)} & \mathrm{U}^{(5)} & \mathrm{U}^{(7)} & \mathrm{U}^{(9)} \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{U}^{(1)} & \mathrm{U}^{(3)} & \mathrm{U}^{(5)} & \mathrm{U}^{(7)} \\ \mathrm{V} & \mathrm{V}^{(2)} & \mathrm{V}^{(4)} & \mathrm{V}^{(6)} & \mathrm{V}^{(8)} & \mathrm{V}^{(10)} & \mathrm{V}^{(12)} \\ 0 & \mathrm{V} & \mathrm{V}^{(2)} & \mathrm{V}^{(4)} & \mathrm{V}^{(6)} & \mathrm{V}^{(8)} & \mathrm{V}^{(10)} \\ 0 & 0 & \mathrm{V} & \mathrm{V}^{(2)} & \mathrm{V}^{(4)} & \mathrm{V}^{(6)} & \mathrm{V}^{(8)} \end{vmatrix}$$

Die Determinantenausdrücke $\beta_i(U,V)$ zeigen sowohl bezüglich Vorzeichen als auch Aufbau der Determinanten $\Delta_k(U,V)$ einen Quantisierungseffekt. Die Berechnung der $\alpha_i$ aus den $U^{(2k)}$ und $V^{(2k-1)}$ via Gl. (22) kann
** sowohl rekursiv aus den Gln (22.1,2,3,4,…)
** als auch durch „Mittelwertbildung“

$$\alpha_1 = \beta_1(U,V)\ ;\ \alpha_2 = \beta_2(U,V)$$

$$\alpha_i = \frac{\beta_{i-2}(U,V) * \beta_i(U,V)}{(\beta_{i-1}(U,V))^2}$$

$$= (-1)^{\mathrm{int}(\frac{i-1}{2})} \frac{(\Delta_{i-1}(U,V))^2}{\Delta_{i-2}(U,V) * \Delta_i(U,V)}\ ;\ i=3,4,5,...$$

- a beautiful solution -,
erfolgen.

Example 5

$$u(x) = \sin x\ ;\ v(x) = \cos x\ ;\ f(x) = \tan x \qquad (8)$$

With equ. (8) we obtain a 2D infinite continued fraction representation for tanx
continued fraction

$$\tan x = [0; \frac{\alpha_1}{x}, \frac{\alpha_2}{x}, \frac{\alpha_3}{x}, \frac{\alpha_4}{x}, \frac{\alpha_5}{x}, \ldots]$$

$$= \cfrac{1}{\cfrac{\alpha_1}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{\alpha_2}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{\alpha_3}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{\alpha_4}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{\alpha_5}{x} + \ldots}}}}} \qquad (20.1)$$

$$= \cfrac{x}{\alpha_1 + \cfrac{x^2}{\alpha_2 + \cfrac{x^2}{\alpha_3 + \cfrac{x^2}{\alpha_4 + \cfrac{x^2}{\alpha_5 + \ldots}}}}} \qquad (20.2)$$

with

$$\alpha_1 = \frac{1}{\Delta_1(U,V)} = \frac{1}{U^{(1)}} = \frac{1}{\frac{1}{1!}} = 1 ;$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\Delta_2(U,V)} = \frac{1}{\begin{vmatrix} U^{(1)} & U^{(3)} \\ V & V^{(2)} \end{vmatrix}} = \frac{-1}{U^{(3)} - V^{(2)}}$$

$$= \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{1}{1!} & \frac{-1}{3!} \\ \frac{1}{0!} & \frac{-1}{2!} \end{vmatrix}} = \frac{-1}{\frac{-1}{3!} - \frac{-1}{2!}} = -3$$

$$\alpha_i = (-1)^{\text{int}(\frac{i-1}{2})} \frac{(\Delta_{i-1}(U,V))^2}{\Delta_{i-2}(U,V) * \Delta_i(U,V)} \quad ; i=3,4,5,...$$

$$\alpha_3 = (-1)^{\text{int}(\frac{2}{2})} \frac{(\Delta_2(U,V))^2}{\Delta_1(U,V) * \Delta_3(U,V)}$$

$$= -\frac{\begin{vmatrix} U^{(1)} & U^{(3)} \\ V & V^{(2)} \end{vmatrix}^2}{U^{(1)} * \begin{vmatrix} U^{(1)} & U^{(3)} & U^{(5)} \\ 0 & U^{(1)} & U^{(3)} \\ V & V^{(2)} & V^{(4)} \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{(U^{(3)} - V^{(2)})^2}{U^{(3)} * [(U^{(5)} - V^{(4)}) - U^{(3)}(U^{(3)} - V^{(2)})]}$$

$$= -\frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{1!} & \frac{-1}{3!} \\ \frac{1}{0!} & \frac{-1}{2!} \end{vmatrix}^2}{\frac{1}{1!} * \begin{vmatrix} \frac{1}{1!} & \frac{-1}{3!} & \frac{1}{5!} \\ 0 & \frac{1}{1!} & \frac{-1}{3!} \\ \frac{1}{0!} & \frac{-1}{2!} & \frac{1}{4!} \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{1}{9}}{-\frac{1}{45}} = 5$$

$$\alpha_4 = (-1)^{\mathrm{int}(\frac{3}{2})} \frac{(\Delta_3(U,V))^2}{\Delta_2(U,V)*\Delta_4(U,V)}$$

$$= -\frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{1!} & \frac{-1}{3!} & \frac{1}{5!} \\ 0 & \frac{1}{1!} & \frac{-1}{3!} \\ \frac{1}{0!} & \frac{-1}{2!} & \frac{1}{4!} \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} \frac{1}{1!} & \frac{-1}{3!} \\ \frac{1}{0!} & \frac{-1}{2!} \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} \frac{1}{1!} & \frac{-1}{3!} & \frac{1}{5!} & \frac{-1}{7!} \\ 0 & \frac{1}{1!} & \frac{-1}{3!} & \frac{1}{5!} \\ \frac{1}{0!} & \frac{-1}{2!} & \frac{1}{4!} & \frac{-1}{6!} \\ 0 & \frac{1}{0!} & \frac{-1}{2!} & \frac{1}{4!} \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{-(\frac{-1}{45})^2}{(-\frac{1}{3})*(-\frac{1}{4725})} = -7$$

DDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDd
DDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDD

$$B_{2i} = \frac{(-1)^{i-1}}{2(2^{2i}-1)} *$$

$$\begin{vmatrix}
1 & \binom{1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rightarrow \\
0 & \binom{2}{0} & \binom{2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & \binom{3}{1} & \binom{3}{3} & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & \binom{4}{0} & \binom{4}{2} & \binom{4}{4} & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & \binom{5}{1} & \binom{5}{3} & \binom{5}{5} & 0 & \\
0 & 0 & 0 & \binom{6}{0} & \binom{6}{2} & \binom{6}{4} & \binom{6}{6} & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \binom{7}{1} & \binom{7}{3} & \binom{7}{5} & \\
\downarrow & & & & & & & \square
\end{vmatrix} \quad (14)$$

determinant of i-th order

Example 2

$$u(x) = x \; ; \; v(x) = \cos x \; ; \; f(x) = \frac{x}{\cos x} \qquad (15)$$

With equ. (15) we obtain a 2D infinite determinant representation for tanx

$$\frac{x}{\cos x} = \begin{vmatrix} x & \frac{1}{2!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{6!} & \frac{1}{8!} & \frac{1}{10!} & \rightarrow \\ -x^3 & \frac{1}{0!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{6!} & \frac{1}{8!} & \\ x^5 & 0 & \frac{1}{0!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{6!} & \\ -x^7 & 0 & 0 & \frac{1}{0!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{4!} & \\ x^9 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0!} & \frac{1}{2!} & \\ -x^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0!} & \\ \downarrow & & & & & & \square \end{vmatrix} \qquad (16.1)$$

$$= x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{24}x^5 + \frac{61}{720}x^7 + \frac{1385}{40320}x^9 + \ldots . \qquad (16.2)$$

Comparing equ. (16.1) with the 1D Maclaurin series of tanx

$$\tanx = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i)!}(-1)^i E_{2i} x^{2i+1} \qquad (17)$$

we obtain a 2D determinant representation of the Euler numbers [3]

$$E_{2i} = (-1)^i (2i)! \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{6!} & \frac{1}{8!} & \frac{1}{10!} & \rightarrow \\ \frac{1}{0!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{6!} & \frac{1}{8!} & \\ 0 & \frac{1}{0!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{6!} & \\ 0 & 0 & \frac{1}{0!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{4!} & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0!} & \frac{1}{2!} & \\ \downarrow & & & & & \square \end{vmatrix}. \qquad (18)$$

determinant of i-th order

The comparison of the equs (12) and (18) shows the close structural connection between Bernoulli and Euler numbers.

Find a Pascal's triangle representation for $E_{2i}$

corresponding to $B_{2i}$ equ. (14).

An interesting comparision!
Pascal's triangle and the sum of powers of integers

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} i^{6}}{\sum_{i=1}^{n} i^{0}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (-n)^{1} & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (-n)^{2} & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ (-n)^{3} & 1 & 4 & 6 & 4 & 0 & 0 \\ (-n)^{4} & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 0 \\ (-n)^{5} & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 \\ (-n)^{6} & 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (-1)^{1} & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (-1)^{2} & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ (-1)^{3} & 1 & 4 & 6 & 4 & 0 & 0 \\ (-1)^{4} & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 0 \\ (-1)^{5} & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 \\ (-1)^{6} & 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 \end{vmatrix}}$$

(6+1) by (6+1) determinant

$$D(k=7,n)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p^1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p^2 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ p^3 & 0 & 1 & 10 & 5 & 0 & 0 \\ p^4 & 0 & 0 & 6 & 20 & 6 & 0 \\ p^5 & 0 & 0 & 1 & 21 & 35 & 7 \\ p^6 & 0 & 0 & 0 & 8 & 56 & 56 \end{vmatrix}$$

7 by 7 determinant

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} i^{2k+1}}{\sum_{i=1}^{n} i^3} = \frac{D(k,n)}{D(k,1)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i^1\right)^2 = \frac{p^2}{4} \; ; \; p = n(n+1)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}i^{6}}{1}=\frac{\begin{vmatrix} n \bmod 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n^{1} & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n^{2} & 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ n^{3} & -1 & 3 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ n^{4} & 1 & -4 & 6 & -4 & 2 & 0 \\ n^{5} & -1 & 5 & -10 & 10 & -5 & 2 \\ n^{6} & 1 & -6 & 15 & -20 & 15 & -6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 \bmod 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1^{1} & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1^{2} & 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1^{3} & -1 & 3 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 1^{4} & 1 & -4 & 6 & -4 & 2 & 0 \\ 1^{5} & -1 & 5 & -10 & 10 & -5 & 2 \\ 1^{6} & 1 & -6 & 15 & -20 & 15 & -6 \end{vmatrix}}$$

(6 + 1) by (6 + 1) determinant

7 by 7 determinant

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}i^{2k}}{\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}i^{2}} = \frac{D(k,n)}{D(k,1)}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}i^{2} = \sum_{i=1}^{n} i^{1} = \frac{1}{2}p \; ; \; p=n(n+1)$$

# Spektrum edition 5/2024: Grenzgänge der Mathematik

„Doch ein entscheidender Teil des Fachs hat mit der Suche nach Brücken zu tun: Mathematikerinnen und Mathematiker suchen nach Verbindungen und Gemeinsamkeiten zwischen den einzelnen Teilgebieten, um die Forschung voranzutreiben. Die gewonnenen Erkenntnisse sind nicht nur der Mathematik selbst zuträglich, sondern finden auch Anwendung in anderen Fächern, wie der Physik oder sogar der Biologie.

**Inhaltsverzeichnis**

**Am Anfang war die Zahl**

Zahlen bilden die Grundlage der Mathematik: Selbst Kleinkinder und viele Tiere besitzen die Fähigkeit, Dinge zu zählen. Trotzdem birgt auch das Reich der Zahlen noch immer Rätsel, die sich womöglich niemals lösen lassen.

**Geometrische Ideen**

Die Geometrie ist einer der anschaulichsten Bereiche der Mathematik. Und doch lauern auch in diesem Feld allerlei Überraschungen: von seltsamen Schnitten und stabilen Knoten bis hin zu ausgehungerten Amöben und überraschenden Verbindungen zur Stringtheorie.

**Alles hängt zusammen**

Um hartnäckige Probleme anzugehen, hilft es manchmal, seinen Horizont zu erweitern. In den letzten Jahren haben Fachleute dabei ungeahnte Verbindungen zwischen völlig unterschiedlichen Gebieten aufgedeckt.

**Abstrakte Konzepte in der realen Welt**

Wie sich die seltsamen Ergebnisse der Mathematik auf die wirkliche Welt auswirken, hat in der Vergangenheit viele Fachleute verwundert. So lässt sich beweisen, dass es auf manche physikalische Fragestellungen niemals eine Antwort geben wird.“

# Extension 4 Zu Unit 307.C/D/EE/G/H)

## Experiment ins Unbekannte

## Numerisches Ausloten eines Formelsystems

# Rekursiver Generator der **Input**folge
$g(n) = (5^3) *g(n-1)+(5^2)*g(n-2)+ (5^1)*g(n-3)+n*g(1)$; n=3,4,5,6,…,30
g(0)=0, g(1)=1, g(2)=2
# für die „Prismafunktion“ $\Phi(x)=x^{(1/3)}$
# **Output**folge des Prisma
$F(n)=\Phi(g(n))$; n=1,3,5,7,9,… mit 90 Stellen
► g(0)=0, g(1)=1, g(2)=2, g(3)=278, g(4)=34809, g(5)=4358090
$g(6)=545632871$, g(7)=6831323518, $g(8)=8.67578052*10^{11}$,…
► F(1)=1, F(3)=6.526518879…, F(5)=163.3423245…,
F(7)=1897.441017…,…

Diskussion der Prisma-Outputfolge! ???

**********
**********

**http**://de.wikipedia.org/wiki/**Ideenfindung**

# W. Isaacson. **The Innovators**: Die Vordenker der digitalen Revolution von Ada Lovelace bis Steve Jobs.
(How a Group of Hackers, Genuises and Geeks Created the Digital Revolution)
C. Bertelsmann Verlag 2018, ISBN-13 : 978-3570102770

# L. Jaeger. Die zweite Quantenrevolution
Vom Spuk im Mikrokosmos zu neuen Supertechnologien
Verlag: Springer, Berlin und Heidelberg 2018

ISBN: 9783662575185 |

# P. Thiel et al.  Zero to One: Wie Innovation unsere Gesellschaft rettet. „Die Zukunft ist keine Kopie. Sie ist radikal anders!“
Campus Verlag 2014,  ISBN-13 : 978-3593501604

**https**://www.ndr.de/geschichte/koepfe/**Erfinder**-aus-Norddeutschland-und-ihre-**Innovationen**,erfinder101.html

**Nota bene**: Die “besonderen Informationen“ werden in statu nascendi nicht in schwarzen Limousinen transportiert, sie gehen zu Fuß, manchmal sogar auf Bauernfüssen, sie stehen auf Visitenkarten, hingekritzelt, oder werden in Plastebeuteln getragen. Später freilich ...

# It's the possibility of having a dream come true that makes life interesting.
Paulo Coelho, The Alchimist

# Windgetrieben gegen den Wind
Unit 15, parts 73, 75.1, 76.1, 76.2, 76.9, 76.9extended1
**********
**********

# A collection of ideas and materials for a system theory of self-running phenomena

**A possible starting position for an integrative system theory of self-running phenomena**
A possible start position for an integrative system theory of self-

running phenomena:
** Positive and negative feedback, recursion, chain reaction
** Self-running phenomena live cycle, mathematical models
** How we can trigger, start, accelerate, influence, control, truncate, dampen, stop a self-running phenomenon?
Self-running phenomena:
Selbstläufer (Duden [6]): "Etwas, was wie von selbst, ohne dass viel dafür getan werden müsste, den „„gewünschten"" Erfolg hat."

**Examples of self-running phenomena:**
life
Cambrian explosion
cancerogenese
epidemic, pandemic
triumph of the world religions
self-fulfilling prophecy
war
stampede, mass panic
rumor
corruption
neighbor's dispute
marital dispute
hurricane, tornado
avalanche
dust explosion (coal, flour)
computer and ±application
multimedia
internet
google, ebay, facebook, twitter, wiki,
fast-selling item, bestseller, cashcow flow, …

**Ideeneinzugsgebiete:**
** Epidemie: Ausbruch, Wüten, Erlöschen, Wiederaufflammen
** Energiebefeuerter, massebefeuerter, informationsbefeuerter, zulaufbefeuerter, ideologiebefeuerter Selbstläufer
** Kamineffekt, stack effect
**http**://en.wikipedia.org/wiki/Stack_effect
** The engineering and thinking models:
** regenerative receiver, rückgekoppeltes Audion

** super-regenerative receiver, Pendelaudion
**http**://en.wikipedia.org/wiki/Regenerative_circuit
?? Audion → Sension (Sensor im Impulsbetrieb wie Pendelaudion), …
** Deeskalation eines Selbstläufers:
** interne Ursachen
** extern: der richtige Eingriffszeitpunkt und die richtige Strategie + Management mit minimalem Aufwand
** Deeskalations- und Begrenzungsmechanismen in der Natur
** Selbstläuferprinzip in ein elektronisches Bauelement, in einen Algorithmus incorporieren
** An electromagnetic minitornado???
** Impulsreaktor
** „Die Theorie wird zur materiellen Gewalt, sobald sie die Massen ergreift.“ (Karl Marx)
** Aufstieg, Prosperität, Fall und Wiederkehr des Tamagotchi
**http**://de.wikipedia.org/wiki/Tamagotchi
** Blockbuster, blockbuster prediction!
** Selbstläufer, Intuition und Kreativität
** Go to Unit 1, p. 7, 8
** Go to Unit 30.1
** Go to Unit 31
** Den optimalen Beeinflusser-Knoten in einem komplexen Netzwerk finden
**http**s://www.buzzfeed.com/de/marcusengert/onecoin-banken-fincenfiles?utm_source=pocket-newtab-global-de-DE

**********

**********

# Zahlenspiele

| | | | |
|---|---|---|---|
| 18 = | 18 | | |
| 108 = | 6 * 18 | | |
| 1008 = | 56 * 18 | = | 14 * 72 |
| 10008 = | 556 * 18 | = | 139 * 72 |
| 100008 = | 5556 * 18 | = | 1389 * 72 |

1000008 = 55556 * 18 = 13889 * 72

……

15 = 15

105 = 7 * 15

1005 = 67 * 15

10005 = 667 * 15

100005 = 6667 * 15

……

# Finden Sie mehr Beziehungen dieser Art unter Benutzung eines geeigneten Suchalgorithmus.

# Denkbare Anwendungsfelder ??

**********

19.07.2024 EPScol&alg DScalc&crit SKöweb

**********

**https**://www.spektrum.de/kolumne/wie-wurde-die-eulersche-zahl-entdeckt/2221156?utm_source=sdwv_daily&utm_medium=nl&utm_content=kolumne

**https**://www.spektrum.de/video/partner/max-planck-institut-fuer-festkoerperforschung/naturkonstanten-als-basis-neuer-masseinheiten/1472879?utm_medium=nl&utm_content=video

**********

# Ein Quersummenproblem

# # Start mit

**https**://www.spektrum.de/raetsel/was-ist-die-**summe-**

**der-quersummen**-aller-zahlen-von-1-bis-1-000-000/1917565 → **SQS**(n)

| n | SQS(n) | SQS(n)/(n+1) |
|---|---|---|
| 9 | 5* 1* 9 | 4.5 |
| 19 | 5* 2*10 | 5 |
| 29 | 5* 3*11 | 5.5 |
| 39 | 5* 4*12 | 6 |
| 49 | 5* 5*13 | 6.5 |
| 59 | 5* 6*14 | 7 |
| 69 | 5* 7*15 | 7.5 |
| 79 | 5* 8*16 | 8 |
| 89 | 5* 9*17 | 8.5 |
| 99 | 5*10*18 | 9 |

# Was ist die Summe der „ausschöpfenden Quersummen **QQS**“ der natürlichen Zahlen im Intervall 1 bis n? → Näherungsformel?

| n | **SQQS**(n) |
|---|---|
| 10 | 46 |
| 20 | 93 |
| 50 | 240 |
| 100 | 496 |
| …. | |
| n | ≈ 5n? → Test für grosse n. |
| 1000 | 4996 |
| 2000 | 9993 |
| 3000 | 14991 |
| 4000 | 19990 |
| 5000 | 24990 |
| 6000 | 29991 |
| 7000 | 34993 |

| | |
|---|---|
| 8000 | 39996 |
| 9000 | 45000 |
| 10000 | 49996 |

$$\rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{SQQS(n)}{n} = 5$$

# Dasselbe für die Primzahlen

| im Intervall 1 bis n | SPQQS(n) |
|---|---|
| 100000 | 449950 |
| 200000 | 900081 |
| 300000 | 1350254 |
| 400000 | 1800321 |
| 500000 | 2250096 |
| 600000 | 2700219 |
| 700000 | 3149928 |
| 800000 | 3599625 |
| 900000 | 4049662 |
| 1000000 | 4500220 |
| 2000000 | 9000507 |
| 3000000 | 13500899 |
| 4000000 | 18000994 |
| 5000000 | 22500834 |
| 6000000 | 27000969 |
| 7000000 | 31499206 |
| 8000000 | 35999206 |
| 9000000 | 40498789 |
| 10000000 | 44999039 |
| ..... | |
| n | $\approx 4.5n$ |

$$\rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{SPQQS(n)}{n} = \frac{9}{2}$$

# Dasselbe für die ungeraden natürlichen Zahlen
im Intervall 1 bis n SUQQS(n)
100000

……

Diskussion der Ergebnisse

---

# Ein „n-te Wurzel aus e“-Sandkasten

## Teil 1

**Start**

0.5*(8-te Wurzel aus e) = 0.56657426...
scf(0.5*(8-te Wurzel aus e)) =
[0;1,1,3,3,1,11,3,1,19,3,1,...?]
Hat dieser Kettenbruch einen systematischen Aufbau?
→ 1,3,3, 1,3+8=11,3, 1,11+8=19,3, 1,19+8=27,3, ....
Wie ist es mit anderen Wurzelexponenten, insbesondere 1,2,4.8,16,...
scf(0.5*(2-te Wurzel aus e)) = [0;1,4, 1,2,3, 1,4,3, 1,6.3, 1,8,3, ...?, ...]
scf(0.25*(8-te Wurzel aus e))=?
scf(0.25*(2-te Wurzel aus e))=??

⟶

**Vermutung 1**:

$\mathrm{scf}(\frac{\sqrt[n]{e}}{n}) = [0;n-1,2n,1,\ 2,2n-1,$
$1,\ 4,2n-1$
$1,\ 6,2n-1,$
$1,\ 8,2n-1,$
$1,10,2n-1,$

1,12,2n-1,…] ; n∈ℕ

Zugehöriger numerischer Test

n=1:

[2;1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1,10,1,1,12,1,1,14,1,1,16,1,1,
8,1,1,20,1,1,22,1,1,24,1,1,26,1,…]

n=2:

[0;1,4,1,2,3,1,4,3,1,6,3,1,8,3,1,10,3,1,12,3,1,14,3,1,16,3,
1,18,3,1,20,3,1,22,3,1,24,3,1,…]

n=3:

[0;2,6,1,2,5,1,4,5,1,6,5,1,8,5,1,10,5,1,12,5,1,14,5,1,16,5,
1,18,5,1,20,5,1,22,5,1,24,5,1,…]

n=4:

[0;3,8,1,2,7,1,4,7,1,6,7,1,8,7,1,10,7,1,12,7,1,14,7,1,16,7,
1,18,7,1,20,7,1,22,7,1,24,7,1,…]

n=5:

[0;4,10,1,2,9,1,4,9,1,6,9,1,8,9,1,10,9,1,12,9,1,14,9,1,16,
9,1,18,9,1,20,9,1,22,9,1,24,9,1,…]

n=10:

[0;9,20,1,2,19,1,4,19,1,6,19,1,8,19,1,10,19,1,12,19,1,14,
19,1,16,19,1,18,19,1,20,19,1,22,19,1,24,19,1,…]

Beweis ???

⟶

**Vermutung 2**

Numerisches Material

$scf(\frac{\sqrt[16]{e}}{16})$ = [0;15,32,1, 2,31,
1, 4,31,
1, 6,31,
1, 8,31,
1,10,31,
1,12,31,…]

$scf(\frac{\sqrt[16]{e}}{8}) = [0;7,\ 1,\ 1,15,$
$1,\ 5,15,$
$1,\ 9,15,$
$1,13,15,$
$1,17,15,$
$1,21,15,\ldots]$

$scf(\frac{\sqrt[16]{e}}{4}) = [0;3,\ 1,\ 3,\ 7,$
$1,11,\ 7,$
$1,19,\ 7,$
$1,27,\ 7,$
$1,35,\ 7,$
$1,43,\ 7,\ldots]$

$scf(\frac{\sqrt[16]{e}}{2}) = [0;1,\ 1,\ 7,\ 3,$
$1,23,\ 3,$
$1,39,\ 3,$
$1,55,\ 3,$
$1,71,\ 3,$
$1,87,\ 3,\ldots]$

$scf(\frac{\sqrt[16]{e}}{1}) = [1;\ 15,\ 1,$
$1,\ 47,\ 1,$
$1,\ 79,\ 1,$
$1,111,\ 1,$
$1,143,\ 1,$
$1,175,\ 1,\ldots]$

$scf(\frac{\sqrt[8]{e}}{8}) = [0;7,16,1,\ 2,15,$
$1,\ 4,15,$
$1,\ 6,15,$

1, 8,15,
1,10,15,
1,12,15,…]

$scf(\frac{\sqrt[8]{e}}{4}) = [0;3,\ 1,\ 1,\ 7,$
1, 5, 7,
1, 9, 7,
1,13, 7,
1,17, 7,
1,21, 7,…]

$scf(\frac{\sqrt[8]{e}}{2}) = [0;1,\ 1, 3,\ 3,$
1,11, 3,
1,19, 3,
1,27, 3,
1,35, 3,
1,43, 3,…]

$scf(\frac{\sqrt[8]{e}}{1}) = [1;\ 7, 1,$
1,23, 1,
1,39, 1,
1,55, 1,
1,71, 1,
1,87, 1,…]

$scf(\frac{\sqrt[4]{e}}{4}) = [0;7,\ 8,1,\ 2,\ 7,$
1, 4, 7,
1, 6, 7,
1, 8, 7,
1,10, 7,
1,12, 7,…]

$scf(\frac{\sqrt[4]{e}}{2})$ =[0;1, 1, 1, 3,
1, 5, 3,
1, 9, 3,
1,13, 3,
1,17, 3,
1,21, 3,…]

$scf(\frac{\sqrt[4]{e}}{1})$ =[1; 3, 1,
1,11, 1,
1,19, 1,
1,27, 1,
1,35, 1,
1,43, 1,…]

Vermutete Kompression

$scf(\frac{\sqrt[2^k]{e}}{2^m})$ = ???

Beweis ???

→

**Vermutung 3**

$scf(\frac{\sqrt[n]{e}}{2})$ = ???

Numerisches Material

n=1:

[1;2,1,3,1,1,1,3,3,3,1,3,1,3,5,3,1,5,1,3,7,3,1,7,1,3,9,3,1,
9,1,3,11,3,1,11,1,3,13,3,…]

n=2:

[0;1,4,1,2,3,1,4,3,1,6,3,1,8,3,1,10,3,1,12,3,1,14,3,1,16,3,
1,18,3,1,20,3,1,22,3,1,24,3,1,…]

n=3:
[0;1,2,3,4,3,1,6,1,3,10,3,1,12,1,3,16,3,1,18,1,3,22,3,1,
24,1,3,28,3,1,30,1,3,34,3,1,36,1,3,…]
n=4:
[0;1,1,1,3,1,5,3,1,9,3,1,13,3,1,17,3,1,21,3,1,25,3,1,29,3,
1,33,3,1,37,3,1,41,3,1,45,3,1,49,…]
n=5:
[0;1,1,1,1,3,7,3,1,11,1,3,17,3,1,21,1,3,27,3,1,31,1,3,37,
3,1,41,1,3,47,3,1,51,1,3,57,3,1,61,…]
n=6:
[0;1,1,2,3,1,8,3,1,14,3,1,20,3,1,26,3,1,32,3,1,38,3,1,44,
3,1,50,3,1,56,3,1,62,3,1,68,3,1,74,…]
n=7:
[0,1,1,2,1,3,10,3,1,16,1,3,24,3,1,30,1,3,38,3,1,44,1,3,52,
3,1,58,1,3,66,3,1,72,1,3,80,3,1,86,…]
n=8:
[0;1,1,3,3,1,11,3,1,19,3,1,27,3,1,35,3,1,43,3,1,51,3,1,
59,3,1,67,3,1,75,3,1,83,3,1,91,3,1,99,…]
n=9:
[0;1,1,3,1,3,13,3,1,21,1,3,31,3,1,39,1,3,49,3,1,57,1,3,67,
3,1,75,1,3,85,3,1,93,1,3,103,3,1,111,…]
n=10:
[0;1,1,4,3,1,14,3,1,24,3,1,34,3,1,44,3,1,54,3,1,64,3,1,74,
3,1,84,3,1,94,3,1,104,3,1,114,3,1,124,…]
Vermutete Kompression?
Beweis?
⟶
**Vermutung 4**
$\mathrm{scf}(\frac{\sqrt[n]{e}}{4}) = ???$
Numerisches Material

n=1:
[0;1,2,8,3,1,1,1,1,7,1,1,2,1,1,1,2,7,1,2,2,1,1,1,3,7,1,3,2,
1,1,1,4,7,1,4,2,1,1,1,…]
n=2:
[0;2,2,2,1,7,1,1,1,1,1,2,3,7,1,3,1,1,1,2,5,7,1,5,1,1,1,2,7,
7,1,7,1,1,1,2,9,7,1,9,…]
n=3:
[0;2,1,6,2,7,1,2,1,7,5,7,1,5,1,7,8,7,1,8,1,7,11,7,1,11,1,
7,14,7,1,14,1,7,17,7,1,17,1,7,…]
n=4:
[0;3,8,1,2,7,1,4,7,1,6,7,1,8,7,1,10,7,1,12,7,1,14,7,1,16,7,
1,18,7,1,20,7,1,22,7,1,24,7,1,…]
n=5:
[0;3,3,1,1,1,3,7,1,5,2,1,1,1,8,7,1,10,2,1,1,1,13,7,1,15,2,
1,1,1,18,7,1,20,2,1,1,1,23,7,…]
n=6:
[0;3,2,1,1,2,4,7,1,6,1,1,1,2,10,7,1,12,1,1,1,2,16,7,1,18,1,
1,1,2,22,7,1,24,1,1,1,2,28,7,…]
n=7:
[0;3,2,7,5,7,1,7,1,7,12,7,1,14,1,7,19,7,1,21,1,7,26,7,1,2,
8,1,7,33,7,1,35,1,7,40,7,1,42,1,7,…]
n=8:
[0;3,1,1,7,1,5,7,1,9,7,1,13,7,1,17,7,1,21,7,1,25,7,1,29,7,
1,33,7,1,37,7,1,41,7,1,45,7,1,49,…]
n=9:
[0;3,1,1,2,1,1,1,6,7,1,10,2,1,1,1,15,7,1,19,2,1,1,1,24,7,1,
28,2,1,1,1,33,7,1,37,2,1,1,1,…]
n=10:
[0;3,1,1,1,1,1,1,2,7,7,1,11,1,1,1,2,17,7,1,21,1,1,1,2,27,7,1,
31,1,1,1,2,37,7,1,41,1,1,1,2,…]
Vermutete Kompression?

Beweis?

## Teil 2

Zur Diskussion:

Analyse und graphische Darstellung von scf($\sqrt[8]{e + \Delta}$),

$\Delta$ = "kleine Störung"

$\in \{0, 10^{-6}, 10^{-8}, 10^{-20}, 10^{-50}, 10^{-100}\}$

scf($\sqrt[8]{e + 0}$) =

scf(2.718282828459045235360287471352662497757247093700 0…)

[1; 7, 1, 1, 23, 1, 1, 39, 1, 1, 55, 1, 1, 71, 1, 1, 87, 1, 1, 103, 1, 1, 119, 1, 1, 135, 1, 1, 151, 1, 1, 167, 1, 1, 183, 1, 1, 199, 1, 1, 215, 1, 1, 231, 1, 1, 247, 1, 1, 263, 1, 1, 279, 1, 1, 295, 1, 1, 311, 1, 1, 327, 1, 1, 343, 1, 1, 359, 1, 1, 375, 1, 1, 391, 1, 1, 407, 1, 1, 423, 1, 1, 439, 1, 1, 455, 1, 1, 471, 1, 1, 487, 1, 1, 503, 1, 1, 519, 1, 1, 535, 1, 1, 551, 1, 1, 567, 1, 1, 583, 1, 1, 599, 1, 1, 615, 1, 1, 631, 1, 1, 647, 1, 1, 663, 1, 1, 679, 1, 1, 695, 1, 1, 711, 1, 1, 727, 1, 1, 743, 1, 1, 759, 1, 1, 775, 1, 1, 791, 1, 1, 807, 1, 1, 823,…]

…

scf($\sqrt[8]{e + 10^{-6}}$) =

scf(2.718282828459045235360287471352662497757247093700 0…) =

[1; 7, 1, 1, 23, 1, 1, 18, 1, 2, 4, 6, 3, 1, 3, 1, 1, 51, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 22, 24, 3, 1, 1, 53, 3, 24, 1, 2, 1, 8, 3, 1, 8, 1, 8, 84, 1, 2, 54, 1, 3, 17, 1, 3, 1, 2, 6, 1, 11, 1, 13, 4, 2, 2, 61, 1, 21, 1, 1, 1, 3, 2, 10, 52, 1, 3, 1, 3, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 27, 1, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 1, 1, 6, 1, 2, 1, 2, 2, 2, 2,

11, 2, 1, 46, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 5, 7, 1, 1, 1, 11, 2, 1, 1, 10, 1, 2, 1, 1, 8, 2, 9, 1, 1, 6, 1, 10, 1, 1, 1, 5, 1, 9, 1, 1, 3, 1, 2, 5, 5, 7, 2, 1, 2, 1, 3, 5, 10, 1, 1, 10, 3, 3, 4, 8, 9, 1, 1, 1, 5, 3, 5, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 4, 3, 1, 84, 9, 2, 1, 93, 2, 8, 5, 1, 1, 1, 4, 1, 4, 1, 3, 3, 1, 14, 2, 3,…]

scf($\sqrt[8]{e + 10^{-8}}$) =
[1; 7, 1, 1, 23, 1, 1, 39, 13, 3, 1, 3, 1, 1, 7, 4, 1, 1, 1, 1, 72, 3, 1, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 11, 9, 5, 1, 1, 7, 1, 20, 3, 2, 5, 2, 1, 3, 24, 7, 3, 1, 211, 1, 2, 6, 1, 4, 2, 1, 1, 2, 7, 15, 26, 1, 20, 67, 1, 3, 1, 6, 114, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 14, 1, 4, 1, 2, 6, 2, 1, 2, 1891, 3, 7, 2, 1, 10, 2, 132, 3, 2, 2, 40, 2, 5, 1, 10, 1, 1, 5, 2, 1, 1, 2, 5, 1, 1, 3, 5, 20, 1, 1, 5, 2, 5, 4, 1, 10, 1, 4, 13, 1, 1, 4, 2, 1, 48, 1, 4, 1, 22, 2, 1, 1, 36, 1, 1, 2, 1, 85, 3, 4, 2, 1, 1, 1, 37, 1, 2, 2, 14, 1, 2, 6, 5, 1, 1, 11, 1, 4, 1, 2, 5, 1, 1, 6, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 2, 2, 315, 1, 32, 1, 12, 1, 4, 1, 11, 1, 1, 4, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 2, 2, 1,…]

scf($\sqrt[8]{e + 10^{-20}}$) =
[1, 7, 1, 1, 23, 1, 1, 39, 1, 1, 55, 1, 1, 71, 1, 1, 91, 7, 60, 1, 229, 3, 2, 1, 18, 2, 1, 14, 5, 91, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 6, 1, 11, 3, 1, 7, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 1, 2, 10, 1, 1, 1, 19, 1, 5, 2, 1, 9, 1, 2, 1, 2, 15, 1, 2, 16, 2, 1, 3, 1, 3, 4, 1, 7, 3, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 4, 1, 3, 1, 2, 44, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 1, 1, 2, 96, 1, 4, 16, 2, 3, 11, 1, 1, 1, 12, 1, 3, 1, 4, 1, 4, 14, 6, 1, 126, 1, 12, 5, 6, 4, 1, 2, 1, 6, 28, 152, 2, 5, 1, 1, 8, 1, 33, 3, 1, 2, 11, 6, 1, 1, 3, 2, 1, 3, 12, 1, 15, 17, 5, 25, 15, 2, 4, 3, 1, 1, 2, 2, 1, 73, 1, 2, 20, 1, 4, 1, 4, 5, 1, 34, 1, 1, 8, 13, 1, 1, 3, 1, 3, 1, 1, 1, 6, 1, 4, 2, …]

scf($\sqrt[8]{e + 10^{-50}}$) =
[1; 7, 1, 1, 23, 1, 1, 39, 1, 1, 55, 1, 1, 71, 1, 1, 87, 1, 1,
103, 1, 1, 119, 1, 1, 135, 1, 1, 151, 1, 1, 167, 1, 1, 184,
2, 2, 2, 41, 4, 1, 7, 1, 1, 1, 1, 3, 22, 6, 4, 2, 1, 228, 1, 1,
3, 2, 4, 1, 5, 1, 104, 1, 10, 33, 3, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 3, 1, 3,
2, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 2, 1, 1, 3, 3, 16, 2, 1, 3, 7555, 1, 1, 22,
1, 8, 1, 1, 4, 16, 1, 7, 1, 2, 11, 1, 2, 5, 1, 1, 3, 6, 3, 1, 2,
1, 2, 1, 1, 3, 1, 3, 7, 2, 9, 23, 10, 2, 1, 1, 1, 9, 1, 1, 1, 1,
1, 2, 4, 1, 19, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 5, 1, 8, 10, 2, 2, 10, 1, 11,
1, 34, 1, 18, 6, 2, 2, 1, 6, 1, 1, 3, 1, 2, 1, 5, 11, 1, 3, 3, 3,
913, 1, 1, 1, 1, 8, 1, 7, 2, 5, 2, 1, 1,3, 5, 1, 1, 2, 9, 5, 1,
3, …]

scf($\sqrt[8]{e + 10^{-100}}$) =
[1; 7, 1, 1, 23, 1, 1, 39, 1, 1, 55, 1, 1, 71, 1, 1, 87, 1, 1,
103, 1, 1, 119, 1, 1, 135, 1, 1, 151, 1, 1, 167, 1, 1, 183,
1, 1, 199, 1, 1, 215, 1, 1, 231, 1, 1, 247, 1, 1, 263, 1, 1,
279, 1, 1, 295, 1, 1, 311, 1, 1, 327, 2, 2, 1, 10, 1, 2, 1, 3,
1, 1, 304, 2, 3, 7, 1, 8, 6, 1, 7, 5, 2, 36, 27, 1, 1, 5, 1, 2,
1, 1, 1, 9, 1, 6, 4, 3, 3, 5, 2, 1, 2, 1, 143, 2, 8, 8, 11, 1, 4,
4, 1, 3, 1, 3, 3, 1, 7, 1, 10, 71, 1, 1, 17, 1, 3, 3, 6, 1, 1, 2,
10, 8, 4, 1, 11, 524, 1, 1, 2, 5, 7, 3, 1, 3, 1, 6, 3, 12, 13,
10, 2, 2, 37, 4, 1, 7, 1, 1, 8, 3, 8, 4, 1, 9, 1, 3, 1, 17, 2, 1,
1448, 1, 2, 1, 3, 1, 20, 3, 14, 3, 1, 2, 12, 1, 7, 1, 7, 3, 1,
4, 6, 1, 1, 1, 5, 8, 4, 1, ….]

## Teil 3

Untersuche scf(***) in bezug auf systematischen Aufbau.
*** = arithmetisches/harmonisches/geometrisches

Mittel von $\sqrt[m]{e}$ und $\sqrt[n]{e}$ , m,n∈ℕ ;

Beispiel:

$*** = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{e} + \sqrt[7]{e}) = 1.27458871$ ...

scf(***) = [1;3,1,1,1,3,1,4,???]

*** = $\sqrt[n]{a}$ ; n∈ℕ, a – mathematische Konstante [1,2]

[1] https://mathworld.wolfram.com/Constant.html

[2] https://de.wikipedia.org/wiki/Mathematische_Konstante

https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_constant

## Teil 4

Auszulotende Kettenbruchdarstellung:

scf($\frac{e^{\frac{1}{n}}-e^{\frac{-1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{-1}{n}}}$) = scf($\tanh\frac{1}{n}$) = [0;n,3n,5n,7n,9n,…] =

$$\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\cfrac{1}{a_5+\cdots}}}}}$$ ; $a_i = n*(2i-1)$; i=1,2,3,…

$$scf(\frac{\sqrt[8]{e}+1}{\sqrt[8]{e}-1}) = [16;48,80,\ldots]$$

$$scf(\frac{\sqrt[n]{e}+1}{\sqrt[n]{e}-1}) =$$

[2n;6n,10n,14n,18n,22n,26n,30n,34n,38n,…]

Untersuchen Sie den Verlauf der Funktion

$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{-1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{-1}{x}}}$

für x∈ℝ (Graph) und für x∈ℂ (Reliefbild)

**Be**rechnen und diskutieren Sie

$\mathrm{scf}\left(\frac{e^{\frac{-1}{n}}-e^{\frac{1}{n}}}{e^{\frac{-1}{n}}+e^{\frac{1}{n}}}\right)$; $n\in\mathbb{N}$ für spezielle n, z.B. 8, 18, …

## Teil 5

Lateral: Variationen auf „Chintschin's Kettenbruchkonstante" [1,2,3]

**Algorithmus**

**input**: $r\in\mathbb{R}_+$ , $n\in\mathbb{N}$

**init**: $i:=0$ , $x:=r$ , $a_0:=[r]$ (größte ganze Zahl kleiner oder gleich r)

**rec1**: $i:=i+1$, $x := \frac{1}{(x-[x])^n}$ , $a_i:=[x]$

or

**rec2**: $i:=i+1$, $x := \frac{1}{\sqrt[n]{x-[x]}}$ , $a_i:=[x]$

**output**: $g_{1/2}(r,n) = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\prod_{i=1}^{k} a_i}$

Spezialfall: $g_{1/2}(r,1) = 2.6854520010653\ldots$ für fast jede reelle Zahl r, aber z.B. **nicht für r =** $\sqrt[m]{e}$ [1].

Diskutieren Sie den Verlauf von $g_{1/2}(r,n)$ , $n\in\mathbb{N}$ , auch speziell für $r = \sqrt[m]{e}$ .

LateralLateral

**Algorithmus**

**input**: $r\in\mathbb{R}_+$ , $n\in\mathbb{N}$

**init**: $i:=0$ , $x:=r$ , $a_0:=[r]$ (größte ganze Zahl kleiner oder gleich r)

**rec** $i:=i+1$, $x := \varphi(x)$ , $a_i:=[x]$

$\varphi(x)\in\{x^x, \sqrt[x]{x}, x^{x^x}, e^{e^x}, \ldots\}$

$$\textbf{output:}\quad g_{\varphi}(r,n) = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\prod_{i=1}^{k} a_i}$$

[1] https://de.wikipedia.org/wiki/Kettenbruch#Chintschin-Konstante
[2] https://oeis.org/A002210
[3] Spektrum der Wissenschaft 9/22, S. 55
[4] Spektrum der Wissenschaft Spezial 3/22

## Teil 6

Lateral: Variationen auf

$$P = \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{11+\cfrac{1}{13+\cfrac{1}{17+\cfrac{1}{19+\cfrac{1}{23\ldots}}}}}}}} = [0;3,5,7,11,13,17,19,23,\ldots]$$

$$= 0.31303673643\ldots$$

$\rightarrow$ ??? scf(g(P)) , $g(P) \in \{P^n, \sqrt[n]{P}, \tanh(P), \tanh(\frac{1}{P}), \ldots\}$

# Pi, e, … überall?

https://www.spektrum.de/kolumne/pi-ist-ueberall-auch-im-collatz-problem/2035834?utm_source=pocket-newtab-global-de-DE

https://www.spektrum.de//kolumne/pi-ist-ueberall-auch-in-der-mandelbrotmenge/1996588

https://www.spektrum.de/kolumne/dynamische-systeme-pi-ist-ueberall/1990717

**https**://www.spektrum.de/kolumne/pi-ist-ueberall-auch-im-spiel-des-lebens/2008873

Offene Probleme

a) Findet man dort auch e?

b) Pi und e in der Collatz-Erweiterung Unit 31

c) Pi und e im „Feigenbaum“ Unit 900

d) Pi und e im „Kugelkondensator“ Unit 12

e) Pi und e in ASIS-Graphiken Units 69

f) Pi und e im √2-Algorithmus Unit 1

g) e hoch pi in Units 68, 101, 103, 105

h) Pi und e im Pascalschen Dreieck Units 2.1, 6, 42

i) Pi und e in Benford’s Law Unit 11

j) Pi und e in Pick’s Theorem Units 23,24,25

k) Pi und e in Spektrum Kompakt 3/2020

**https**://www.spektrum.de/pdf/spektrum-kompakt-mathematisches-parkett/1686080

**https**://www.spektrum.de/magazin/eine-neue-art-von-quasikristall/1511573

**https**://www.spektrum.de/magazin/moderne-mathematik-in-islamischen-ornamenten/902962l)

l) Spektrum Kompakt 06.19 Primzahlen. Die Stars der Mathematik

m) E. Weitz. Pi und die Primzahlen: Eine Entdeckungsreise in die Mathematik. Springer 2021, ISBN-13: 978-3662628799

n) Primzahlen in Units 83.1,2,3, 86

Lateral;

**https**://www.spektrum.de/raetsel/wie-viele-seltsame-primzahlen-gibt-es/2037016?utm_source=browser&utm_medium=push-

notifications&utm_campaign=cleverpush-1657693212#?cleverPushBounceUrl=https%3A%2F%2Fwww.spektrum.de%2Fartikel-archiv%2F&cleverPushNotificationId=wXnvrkGzoqyi5W2tW
**https**://www.spektrum.de/kolumne/freistetters-formelwelt-**die-seltsame-6174**/1874215

22.07.2024 EPScol&alg DScalc&crit Sköweb
**********

## Mathematics and Art, ….

**https**://www.theguardian.com/science/alexs-adventures-in-numberland/2015/dec/02/why-the-history-of-maths-is-also-the-history-of-art
# L. Gamwell, N. deGrasse Tyson. Mathematics and Art: A Cultural History.
Princeton University Press 2015, ISBN-13 : 978-0691165288
# S. Ornes. Math Art: Truth, Beauty, and Equations.
Sterling 2019, ISBN-13 : 978-1454930440
# M. Marcolli. Lumen Naturae: Visions of the Abstract in Art and Mathematics.
The MIT Press 2020, ISBN-13 : 978-0262043908
# G.B. Meisner, R. Araujo. The Golden Ratio: The Divine Beauty of Mathematics.
Race Point Publishing 2018, ISBN-13 : 978-1631064869
# G.B. Meisner. Der Goldene Schnitt: Die Schönheit der Mathematik.
Librero 2022, ISBN-13 : 978-9463596411
**https**://en.wikipedia.org/wiki/Mathematics_and_art
**https**://en.wikipedia.org/wiki/Islamic_geometric_patterns
**https**://de.wikipedia.org/wiki/Geometrische_Muster_in_der_is

lamischen_Kunst
**https**://en.wikipedia.org/wiki/Peter_Lu
**https**://de.wikipedia.org/wiki/Peter_Lu

**https**://de.wikipedia.org/wiki/Philosophie_der_Mathematik

**https**://en.wikipedia.org/wiki/Mathematics_and_architecture
**https**://en.wikipedia.org/wiki/Patterns_in_nature

**https**://de.wikipedia.org/wiki/Antoni_Gaud%C3%AD
**https**://de.wikipedia.org/wiki/Sagrada_Fam%C3%Adlia

**https**://www.spektrum.de/thema/themenseite-die-schrift/1417538

**https**://www.spektrum.de/kolumne/freistetters-formelwelt-das-geheimnis-des-haversin/2052702
**https**://www.spektrum.de/video/partner/hector-fellow-academy/martin-wegener-ueber-massgeschneiderte-metamaterialien/1622432?utm_medium=nl&utm_content=video

# F. Kittler. Musik und Mathematik I: Hellas 1: Aphrodite
Brill | Fink; 2005th edition, ISBN-13 : 978-3770537822
# F. Kittler. Musik und Mathematik I: Hellas 2: Eros
Brill | Fink; 2009th edition, ISBN-13 : 978-377054778
# F. Kittler. Musik und Mathematik II: Roma aeterna.
1. Sexus, 2. Virginitas
(Friedrich Kittler. Gesammelte Schriften)
Brill | Fink; 2020th edition, ISBN-13 : 978-3770558773
**********

## Bio…

**https**://msx.tu-dresden.de/owa/projection.aspx
Polarisiertes Mondlicht führt Ameisen zurück zum Nest
**https**://www.spektrum.de/news/magnetsinn-kuenstliche-magnetfelder-veraendern-ameisengehirne/2207135

**https**://www.spektrum.de/news/magnetsinn-bei-voegeln-navigieren-mittels-quanteneffekt/1887973
**https**://www.spektrum.de/news/gedaechtnis-meisen-speichern-verstecke-als-neuronalen-barcode/2217882
**https**://www.spektrum.de/thema/orientierung/1419584?utm_source=sdwv_daily&utm_medium=nl&utm_content=thema
**https**://www.spektrum.de/news/wahrnehmung-schleimpilz-misst-groesse-von-objekten/1895992
**https**://www.spektrum.de/kolumne/star-bugs-die-kleine-tiere-kolumne-gut-gebruellt-ameisenloewe/2223301?utm_source=sdwv_daily&utm_medium=nl&utm_content=kolumne
**********

27.07.2024 EPScol&alg DScalc&crit SKöweb