Unit n°90

Aus der „Schülerinformatik“ vor 20 Jahren Baustein 1 “Rhapsodie in sqr(2)“ [23]

> "Neugier, allgemeinsprachlich oft abwertend gebrauchte Bez. für unangemessenes Interesse an den Angelegenheiten anderer Menschen; grundsätzlich ist N. (N.-Verhalten) ein Bedürfnis nach Neuem und Aufsuchen von Neuem, wobei orientiertes ebenso wie gerichtetes und zielstrebiges Vorgehen eine Rolle spielt. N. ist ein bei Menschen und bei Tieren zu beobachtendes Verhalten, das wahrscheinlich angeboren ist (Trieb zur Exploration). Sie regt zum Auskundschaften der Umwelt und zu oft spieler. äußerem und innerem Experimentieren um der Entdeckung des Neuen willen an. Der kindl. N. und ihrer Förderung durch ein freilassendes und Anregungen bietendes Verhalten der Erziehungspersonen wird in der Pädagogik eine große Bedeutung beigemessen für die Entwicklung der Motivation eines späteren Strebens nach Erkenntnis (Lernfähigkeit, Wißbegier), schöpfer. Tätigkeiten, aber auch für Offenheit und Kontaktbereitschaft im Sozialisationsprozeß. Bei vielen Tieren erlischt das N. Verhalten mit der Geschlechtsreife. Beim Menschen dagegen bleibt die N. lebenslang bestehen."
>
> Brockhaus Enzyklopädie, Band 15, S. 474, Mannheim 1991

2.1 Basisinvention

Interpretiert man die Halbwinkelbeziehung der Cosinusfunktion

$$2\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \sqrt{2+2cos\alpha}; \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \tag{2.1}$$

als Rekursionsgleichung und

$$2\cos\left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} \tag{2.2}$$

als die zugehörige Startgleichung, so ergibt sich als Lösung die Kettenwurzeldarstellung

$$2\cos\left(\frac{1}{2^{m+1}}\frac{\pi}{2}\right) = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{(m+1)-mal\ \ Radikand\ 2};\ \ m \in N_0\,, \qquad (2.3)$$

$$m-stelliges\ Vorzeichenwort{:}+\ +\cdots+$$

in der (m+1)-mal der Radikand 2 auftritt und die Wurzeln durch das m-stellige Vorzeichenwort + + ... + verknüpft werden.

Mit

$$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \qquad (2.4)$$

und

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad (2.5)$$

folgt andererseits aus Gleichung (2.3)

$$2\sin\left(\frac{1}{2^{m+1}}\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2^{m+1}}\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{2^{m+1}-1}{2^{m+1}}\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \sqrt{4-4\cos^2\left(\frac{1}{2^{m+1}}\frac{\pi}{2}\right)} \qquad (2.6)$$

und damit die Kettenwurzeldarstellung

$$2\cos\left(\frac{2^{m+1}-1}{2^{m+1}}\frac{\pi}{2}\right) = \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{(m+1)-mal\ \ Radikand\ 2};\ \ m \in N_0\,. \qquad (2.7)$$

$$m-stelliges\ Vorzeichenwort{:}-\ +\cdots+$$

Sie erkennen:

Bei gleicher Struktur unterscheiden sich die Gleichungen

(2.3) | (2.7)

- auf der linken Seite im (diskreten) Argument der Cosinusfunktion:

$\frac{1}{2^{m+1}}\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2^{m+1}-1}{2^{m+1}}\frac{\pi}{2}$,

- auf der rechten Seite im m-stelligen Vorzeichenwort der Wurzelverknüpfung:

$+ + \ldots +$ | $- + \ldots +$.

An dieser Stelle erwacht Ihre Neugier, der Trieb zur Exploration und "verführt" Sie zu der Hypothese:

Es könnte sein, dass eine Kettenwurzeldarstellung der Cosinusfunktion

$$2\cos\left(\frac{Z\ddot{a}hler}{2^{m+1}}\frac{\pi}{2}\right) = \underbrace{\sqrt{2+v_{m-1}\sqrt{2+v_{m-2}\sqrt{2+\cdots+v_1\sqrt{2+v_0\sqrt{2}}}}}}_{(m+1)-mal\ Radikand\ 2}\ ;\ m \in N_0 \qquad (2.8)$$

existiert, wobei jedem möglichen diskreten Argumentwert

$$0 < \frac{Z\ddot{a}hler}{2^{m+1}}\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2};\quad Z\ddot{a}hler \in N_0 \qquad (2.9)$$

eineindeutig ein m stelliges Vorzeichenwort

$$v = v_{m-1}v_{m-2}\ldots v_1v_0;\quad v_i = (-1)^{b_i} \in \{+1,-1\} \qquad (2.10)$$

bzw. ein zugehöriges m-stelliges Binärwort

$$b = b_{m-1}b_{m-2}\ldots b_1b_0 \quad \in \{0,1\}^m \qquad (2.11)$$

zugeordnet ist:

Zähler = f (b), b = f^{-1} (Zähler). (2.12)

Da eine Bestätigung dieser Hypothese durch eine exakte Herleitung der Gleichungen (2.8) - (2.12) schwierig erscheint, entscheiden Sie sich zunächst für eine Überprüfung durch ein Experiment, das bei negativem Ausgang die Hypothese widerlegt:

Bei m=3 wird für alle $b \in \{0,1\}^3$ aus den Gleichungen (2.8) - (2.11) numerisch, z.B. mittels Taschenrechner, Zähler/2^{m+1} berechnet.

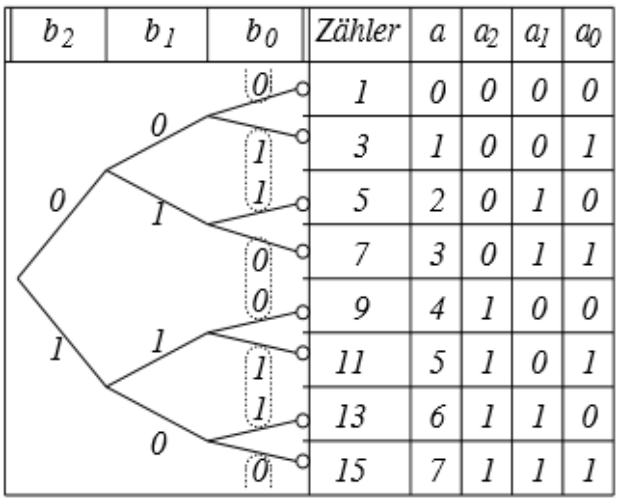
Ergebnis:

b_2	b_1	b_0	Zähler/2^{m+1}
0	0	0	1/16
0	0	1	3/16
0	1	0	7/16
0	1	1	5/16
1	0	0	15/16
1	0	1	13/16
1	1	0	9/16
1	1	1	11/16

D.h., die Hypothese ist für m = 3 bestätigt, insbesondere ist jedem Zähler eineindeutig ein *b* zugeordnet.

Darüberhinaus eröffnet die Interpretation des vorliegenden Ergebnisses (m=3) einen Weg zur Bestimmung des noch unbekannten Bildungsgesetzes von f:

- Zähler = 2a + 1; $a \in N_0$ (2.13)
- $a = a_2 a_1 a_0$; $a_i \in \{0, 1\}$ (2.14)
- Heuristisches Kernstück; Umordnung der Ergebnistabelle nach steigendem a



Aus vorstehender Baumdarstellung entnehmen Sie sofort: Der gesuchte bijektive Zusammenhang zwischen Zähler und a bzw. b ist der Gray-Kode [1,2] **(Konstruktionsprinzip Paarbildung!).**

$$\underbrace{b_i = a_{i+1} \oplus a_i}_{Gray-Kode} \quad ; \quad \underbrace{a_i = b_{m-1} \oplus \dots \oplus b_{i+1} \oplus b_i}_{inv.Gray-Kode}$$

$$b = g(a) \quad ; \quad a = g^{-1}(b) \tag{2.15}$$

Aufgabe 1

Überprüfen Sie die durch die Gleichungen (2.13) – (2.15) erweiterte Hypothese experimentell für m = 4.

Aufgabe 2

Verfizieren Sie die so erhärtete Hypothese nun durch exakte Herleitung aller Gleichungen (2.8) – (2.15).

Ergebnis:

Die Funktionswerte von sin *x* und cos *x* lassen sich für diskrete äquidistante Argumente *x* ($0 < x < \frac{\pi}{2}$) in Form einer endlichen Kettenwuzel darstellen.

$$2\sin\left(\frac{2a+1}{2^{m+1}}\frac{\pi}{2}\right) = \underbrace{\sqrt{2-(-1)^{b_{m-1}}\sqrt{2+(-1)^{b_{m-2}}\sqrt{2+\dots+(-1)^{b_1}\sqrt{2+(-1)^{b_0}\sqrt{2}}}}}}_{(m+1)-mal\ Radikand\ 2} \tag{2.16}$$

$$2\cos\left(\frac{2a+1}{2^{m+1}}\frac{\pi}{2}\right) = \underbrace{\sqrt{2+(-1)^{b_{m-1}}\sqrt{2+(-1)^{b_{m-2}}\sqrt{2+\dots+(-1)^{b_1}\sqrt{2+(-1)^{b_0}\sqrt{2}}}}}}_{(m+1)-mal\ Radikand\ 2} \tag{2.17}$$

$$a \in \mathbb{N}_0(0, 2^m - 1), \quad m \in \mathbb{N}_0 \tag{2.18}$$

$$b = b_{m-1}b_{m-2}\dots b_1b_0 \in \{0,1\}^m \quad v \tag{2.19}$$

$$a = g^{-1}(b), \quad b = g(a) \quad (Gray - Kode) \tag{2.20}$$

Spezialfälle:

- a=0 ⟶ b=0, $m \gg 1$ (2.21)

$$2\sin\left(\frac{2a+1}{2^{m+1}}\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{1}{2^{m+1}}\frac{\pi}{2}\right) \approx 2\left(\frac{1}{2^{m+1}}\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2^{m+1}}\pi$$

$$= \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{(m+1)-mal\ Radikand\ 2} \tag{2.22}$$

Aus Gleichungen (2.22) folgt eine Kettenwurzeldarstellung für π

$$\pi = \lim_{t\to\infty} 2^t \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{t-mal\ Radikand\ 2} \tag{2.23}$$

(entspricht Archimedes-Algorithmus zur näherungsweisen Berechnung von π, vgl. Baustein 7)

- a = $2^m - 1 \longrightarrow$ b=2^{m-1}, $\quad m \gg 1$ (2.24)

$$2\sin\left(\frac{2a+1}{2^{m+1}}\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{2^{m+1}-1}{2^{m+1}}\frac{\pi}{2}\right) \approx 2\,sin\frac{\pi}{2} = 2$$

$$= \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{(m+1)-mal\ Radikand\ 2} \tag{2.25}$$

Aus Gleichungen (2.25) folgt eine Kettenwurzeldarstellung für 2

$$2 = \lim_{t\to\infty} \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{t-mal\ Radikand\ 2} \tag{2.26}$$

Aufgabe 3

Geben Sie auf Grundlage der Gleichungen (2.16) – (2.20)

Kettenwurzeldarstellungen weiterer mathematischer Konstanten an. Z.B. ist

$$\tau = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) = \lim_{t\to\infty} \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2-\cdots\pm\sqrt{2}}}}}}}_{t-mal\ Radikand\ 2} \tag{2.27}$$

Aufgabe 4

Untersuchen Sie numerisch das Konvergenzverhalten der Kettenwurzeldarstellungen Gleichungen (2.23), (2.26), (2.27), ..

2.2 Go to tan

Aus den Gleichungen (2.16) – (2.20) folgt

$$\tan\left(\frac{2a+1}{2^{m+1}}\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{2a+1}{2^{m+1}}\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{2a+1}{2^{m+1}}\frac{\pi}{2}\right)} = \quad \longrightarrow \quad \text{Rationalmachen des Nenners} \quad \longrightarrow \quad =$$

$$\left(\underbrace{\sqrt{2}}_{1-mal}\left(\underbrace{\sqrt{2+(-1)^{b_0}\sqrt{2}}}_{2-mal}\left(\ldots\left(\underbrace{\sqrt{2+(-1)^{b_{m-2}}\sqrt{2+\ldots+(-1)^{b_1}\sqrt{2+(-1)^{b_0}\sqrt{2}}}}}_{m-mal\ Radikand\ 2}-(-1)^{a_{m-1}}\right)-\ldots\right)-(-1)^{a_1}\right)-(-1)^{a_0}\right) \tag{2.28}$$

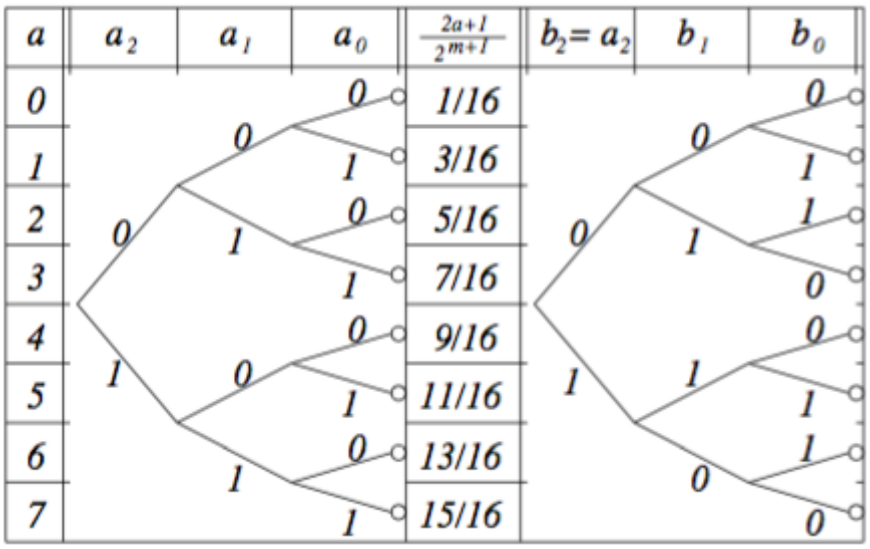
$$a \in \mathbb{N}(0, 2^m - 1) \ , \ a = a_{m-1}\ldots a_1 a_0 \in \{0,1\}^m \ , \ m \in \mathbb{N} \tag{2.29}$$

$$b = a_{m-1}b_{m-2}\ldots b_1 b_0 \in \{0,1\}^m \tag{2.30}$$

$$a = g^{-1}(b) \ , \ b = g(a) \ (Gray - Kode) \tag{2.31}$$

Beispiel: $m = 3$

$$\tan\left(\frac{2a+1}{16}\frac{\pi}{2}\right) = \left(\sqrt{2}\left(\sqrt{2+(-1)^{b_0}\sqrt{2}}\left(\sqrt{2+(-1)^{b_1}\sqrt{2+(-1)^{b_0}\sqrt{2}}}-(-1)^{a_2}\right)-(-1)^{a_1}\right)-(-1)^{a_0}\right) \tag{2.32}$$



Aufgabe 5

Führen Sie die Herleitung der Gleichungen (2.29) - (2.31) aus den Gleichungen (2.16) - (2.20) detailiert durch.

2.3 Archimedes-Kode

Es liegt nahe, die in Abschinitt 2.1, Gleichungen (2.16) - (2.20), beschriebene Kettenwurzeldarstellung von sin *x* und cos *x* für spezielle äquidistante Argumente *x* explorativ auslotend auch zu einer Binärkodierung beliebiger positiver reeller Zahlen $wert \in \mathbb{R}(0,2)$ zu benutzen.

Gegeben:

$$wert \in \mathbb{R}(0,2) \tag{2.33}$$

Gesucht:

$$wort = b = b_{m-1} \dots b_1 b_0 \in \{0,1\}^m, \tag{2.34}$$

wobei gilt

$$wert = \sqrt{2 + (-1)^{b_{m-1}} \sqrt{2 + (-1)^{b_{m-2}} \sqrt{2 + \dots + (-1)^{b_1} \sqrt{2 + (-1)^{b_0} \sqrt{2}}}}}. \tag{2.35}$$

(Kettenwurzelentwicklung von wert)

Dabei können folgende Fälle auftreten:

(a) *m* ist endlich, Kettenwurzelentwicklung bricht eigengesteuert ab,

(b) *m* ist unendlich, *wort* ist nicht periodisch,

(c) *m* ist unendlich, *wort* ist periodisch mit der Periodenlänge *perl*,

(d) Kettenwurzelentwicklung Gleichung (2.35) ist nicht möglich.

In den Fällen (a) bzw. (b) kann bzw. muss die Kettenwurzelentwicklung bei einer vorgegebenen Wortlänge $l < m$ abgebrochen werden (näherungsweise Kettenwurzelentwicklung), im Fall (c) erfolgt der Abbruch zweckmäßigerweise nach Erreichen der Periodizität.

Lösung:

Kodierungsalgorithmus $wert \longrightarrow wort$ (Archimedes-Kode)

Regel	Bedingung	Aktion	Verbundaktion
1		$x := wert \; ; \; y := \varepsilon$	
2		$x := x^2 - 2$	
3	$x = 0$ oder $length(y) = l$	$wort := y$ $(:\approx)$	stop
4	$x > 0$	$y := y \circ 0$	goto r2
5		$y := y \circ 1$	goto r2

(A1)

Aufgabe 6

Leiten Sie den Kodierungsalgorithmus $wert \longrightarrow wort$ aus den Gleichungen (2.33) – (2.35) her.

Aufgabe 7

Konstruieren Sie den zugehörigen Dekodierungsalgorithmus $wort \longrightarrow wert$.

Lösung :

Regel	Bedingung	Aktion	Verbundaktion
1		$x := \sqrt{2}\ ;\ y := wort$	
2	$y = \varepsilon$	$wert := x$ $(:\approx)$	stop
3	$right(y,1) = 0$	$x := \sqrt{2 + x}; y := y \ominus 0$	goto r2
4	$right(y,1) = 1$	$x := \sqrt{2 - x}; y := y \ominus 1$	goto r2

(A2)

Aufgabe 8

Beginnen Sie nun auch hier explorativ zu experimentieren!

Experiment 8.1 :

Kodierung von $wert = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right); n = 3,4,5, \ldots$

n	$wort$	$perl$
3	$\overline{1}$	1
4	ε	0
5	$\overline{01}$	2
6	$0\overline{1}$	1
7	$\overline{011}$	3
8	0	0
9	$\overline{001}$	3
10	$0\overline{01}$	2
11	$\overline{00111}$	5
12	$00\overline{1}$	1
13	$\overline{001101}$	6
14	$0\overline{011}$	3
15	$\overline{0011}$	4
16	00	0
17	$\overline{0001}$	4
18	$0\overline{001}$	3
19	$\overline{000101111}$	9
20	$00\overline{01}$	2
21	$\overline{000101}$	6
22	$0\overline{00111}$	5
23	$\overline{00011101011}$	11
24	$000\overline{1}$	1
25	$\overline{0001111001}$	10
26	$\overline{0001101}$	6

n	$wort$	$perl$
27	$\overline{000110111}$	9
28	$00\overline{011}$	3
29	$\overline{00011001011101}$	14
30	$0\overline{0011}$	4
31	$\overline{00011}$	5
32	000	0
33	$\overline{00001}$	5
34	$0\overline{0001}$	4
35	$\overline{000010011111}$	12
36	$00\overline{001}$	3
37	$\overline{000101100111110101}$	18
38	$0\overline{000101111}$	9
39	$\overline{000010111011}$	12
40	$00\overline{001}$	2
41	$\overline{0000101001}$	10
42	$0\overline{000101}$	6
43	$\overline{0000111}$	7
44	$0\overline{000111}$	5
45	$\overline{000011101101}$	12
46	$0\overline{00011101011}$	11
47	$\overline{000011111001011010100 11}$	23
48	$0000\overline{1}$	1
49		
50		

Aufgabe 9

Diskutieren Sie die bei Experiment 8.1 erhaltene zahlentheoretische Funktion *perl(n)*:

- Z.B. erkennen

  perl(n) | (p – 1), p – Primzahl. (2.36)

  Beweis!

- …

Aufgabe 10

Vergleichen Sie *perl(n)* mit den zahlentheoretischen Funktionen:

- *perl1(n)*
  Periodenlänge der Dezimalbruchdarstellung von $\frac{1}{n}$ (vgl. [3,4])
- *perl2(n)*
  Periodenlänge der regulären Kettenbruchdarstellung von $\sqrt{n}$ (vgl. [5])
- … .

Aufgabe 11

- Stellen Sie in Experiment 8.1 erhaltene charakteristische Archimedes-Kodewörter

  $wort = z(0)z(1)z(2)z(3) \ldots \in \{0,1\}^*$ (2.37)

  unter Benutzung des zweidimensionalen Notierungsmodells „Ulam-Spirale“ [6,7] als Schwaz-Weiß-Muster dar:

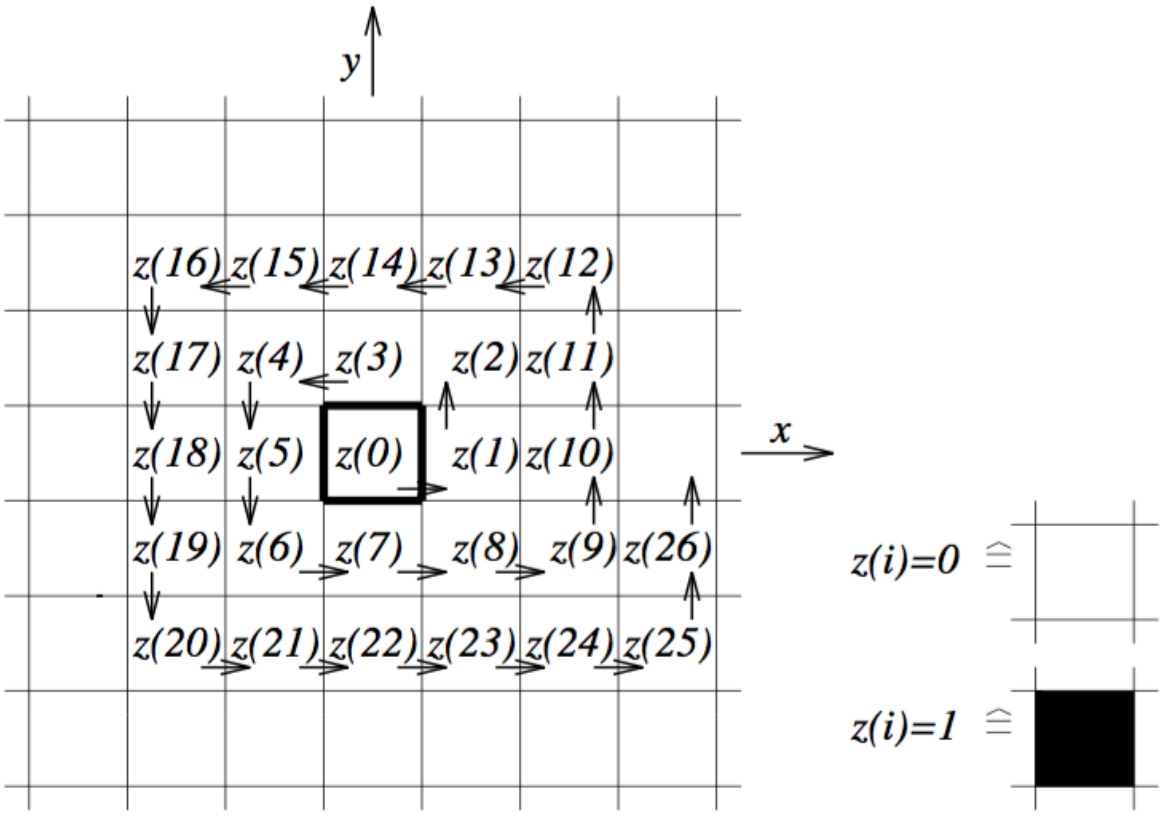


Bild 1: Ulam-Spirale

Auf diese Weises eröffnen sich speziell für die Archimedes-Kodierung, aber auch für alle ähnlichen Binärkodierungen (vgl. Abschnitt 2.4) qualitativ neue Möglichkeiten zur Darstellung (Visualisierung) und Analyse der "inneren Struktur" von irrationalen und transzendenten Zahlen (neue methodische, heuristische und experimentelle Zugänge, z.B. auch durch Einbeziehen des Methodeninventars der digitalen Bildverarbeitung). Dabei werden ästhetisch sehr interessante, z.B. escheroide [8,9] oder ornamentale [10,11,12,13,14] Schwarz-Weiß-Muster generiert (Bild 2, Bild 3).

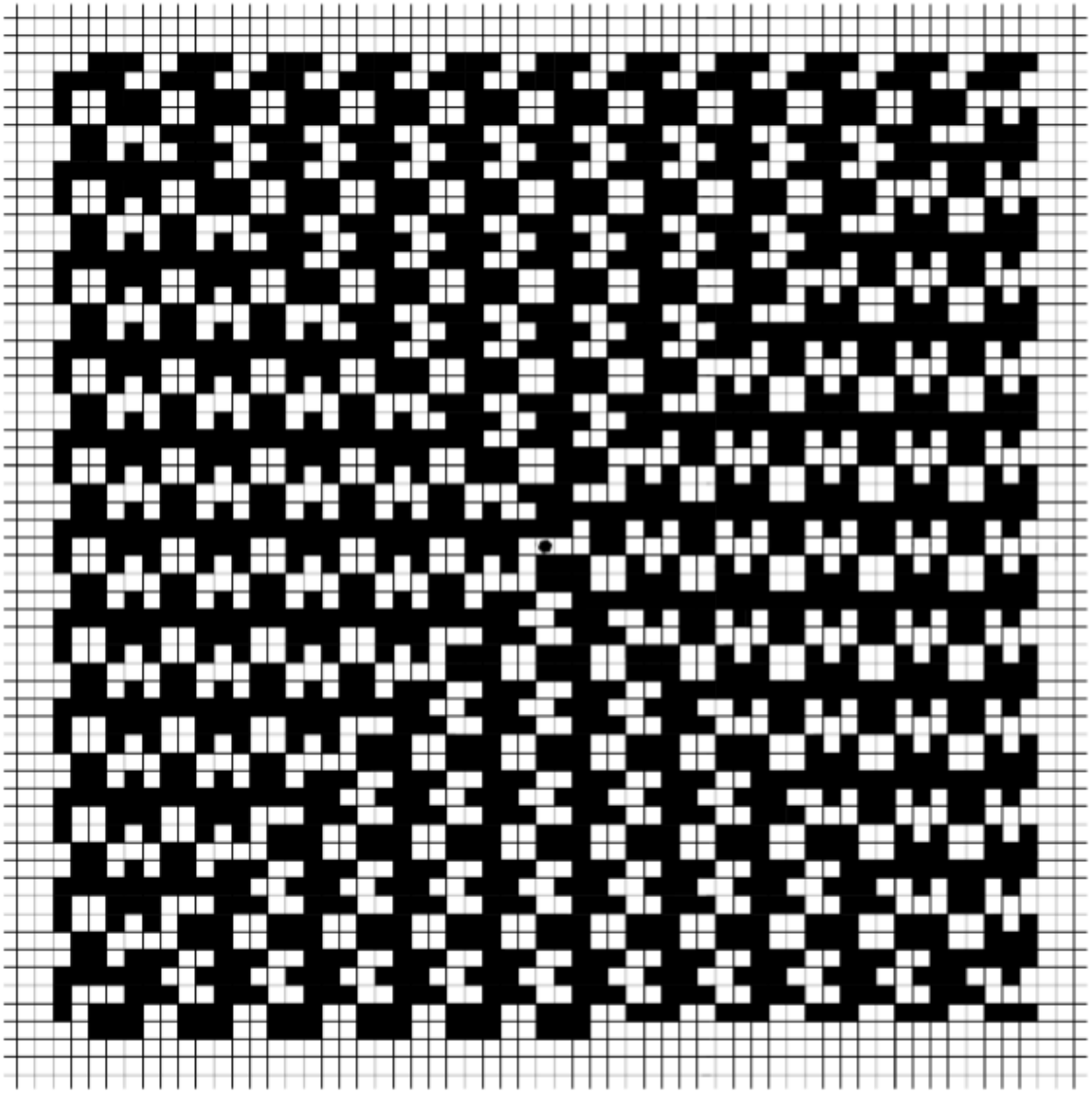


Bild 2: Ulam-Spirale für $wort\left(2cos\frac{\pi}{11}\right) = \overline{00111},\ \ Archimedes - Kode$

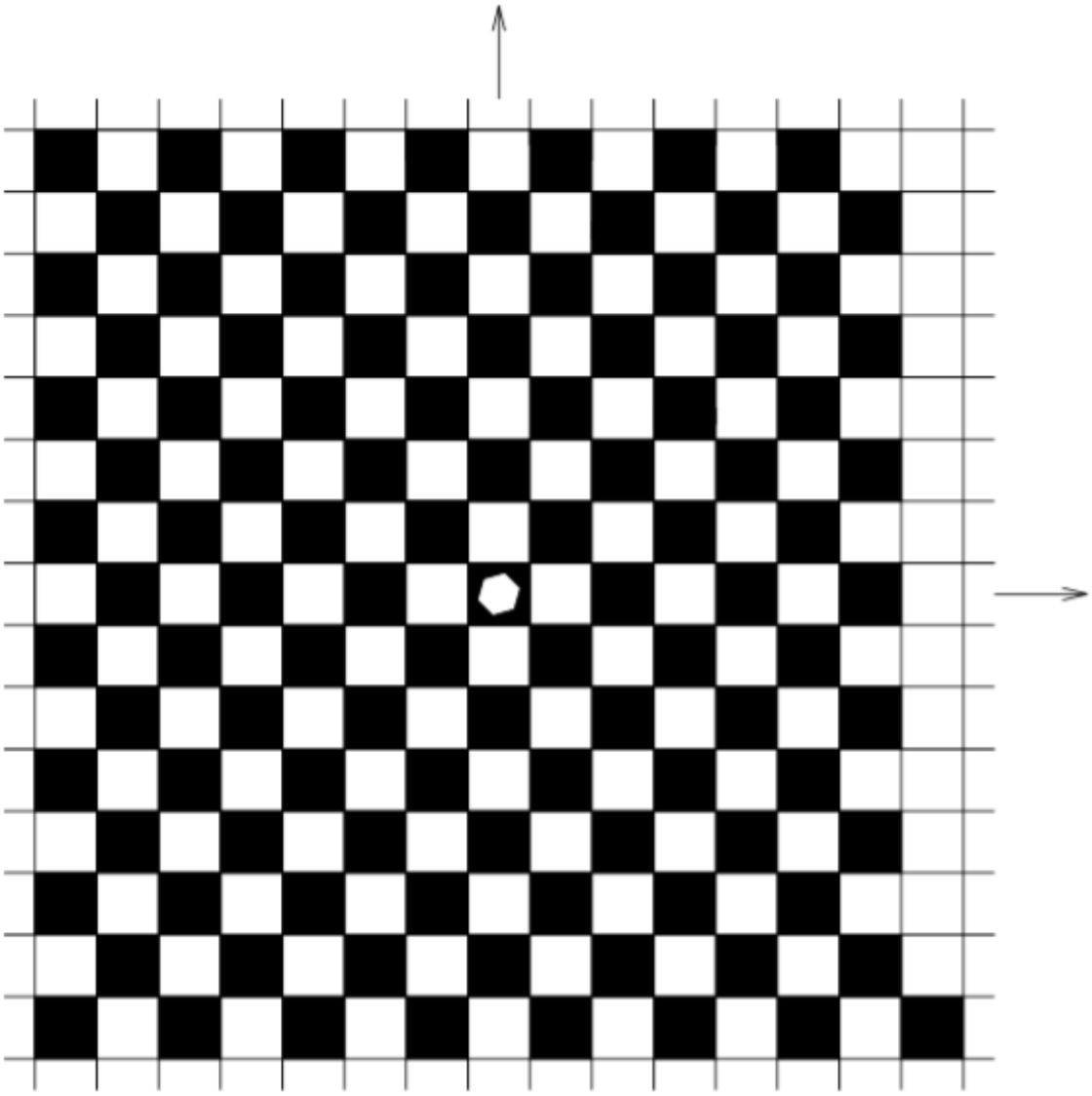


Bild 3: Ulam-Spirale für $wort\left(\tau = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\right) = \overline{10}, Archimedes - Kode$

Aufgabe 12

In welchen Fällen ist eine Kettenwurzelentwichlung von $wert \in \mathbb{R}(0,2)$ nicht möglich?

Aufgabe 13

Dekodieren Sie die Ulam-Spirale der Primzahlverteilung Bild 4 mittels Algorithmus (A2).

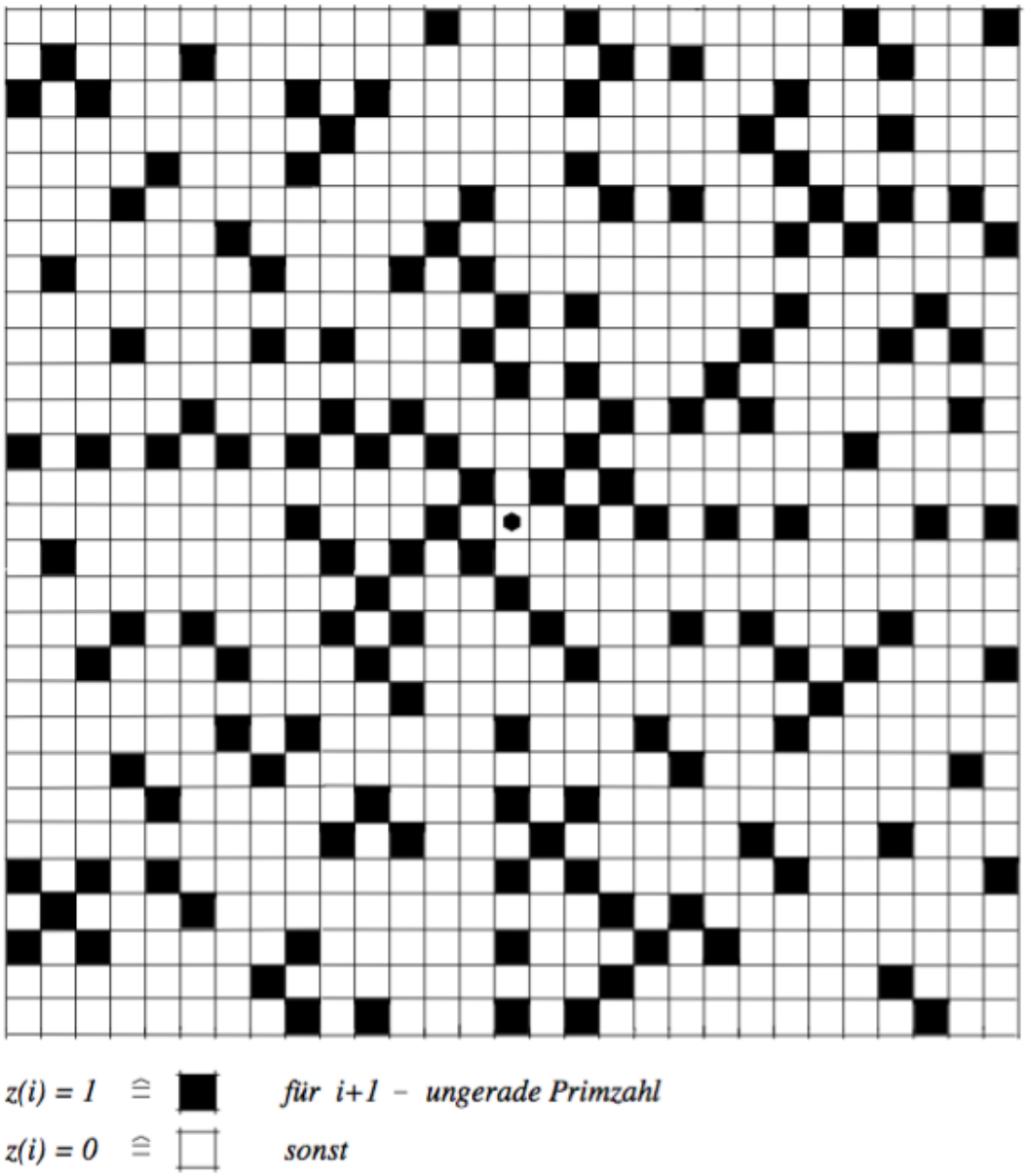


Bild 4: Ulam-Spirale der Primzahlverteilung, (vgl. [6])

(a) Aus der Ulam-Spirale entnehmen Sie das m – stellige Binärwort

$$wort(m) = z(0)z(1) \dots z(m-2)z(m-1)$$

$$= b_{m-1}b_{m-2} \dots b_1 b_0$$

$$= 00101010001010001 01 \dots . \quad (2.38)$$

Die Dekodierung liefert

$$\lim_{m\to\infty} wert(m) = 1{,}899788346331489 \dots . \quad (2.39)$$

Diskutieren Sie dieses Ergebnis, benutzen Sie hierzu [15].

(b) Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten von *wert(m)* anhand der Verläufe von

- Differenzenquotient $\frac{wert(m)-wert(m+1)}{wert(m+1)-wert(m+2)}$
- und $pset(wert = (m), wert(m+1).$

(c) Dekodieren Sie das zu *wort(m)*

- reverse Binärwort

$$revwort(m) = z(m-1)z(m-2) \dots z(1)z(0)$$
$$= b_{m-1}b_{m-2} \dots b_1 b_0, \tag{2.40}$$

- komplementäre Binärwort

$$komwort(m) = \overline{z(0)}\,\overline{z(1)} \dots \overline{z(m-2)}\,\overline{z(m-1)}$$
$$= b_{m-1}b_{m-2} \dots b_1 b_0, \tag{2.41}$$

(d) Untersuchen und diskutieren Sie das Konvergenzverhalten des zugehörigen

- *revwert(m),*
- *komwert(m)*

anhand der Verläufe von

- *pset(m, revwert(m)), pset(m, komwert(m)),*
- *Differenzenquotient,*
- *pset(revwert(m), revwert(m+1)), pset(komwert(m), komwert(m+1)).*

2.4 Ad astra

Die betrachtete quadratische Kettenwurzel

$$\sqrt{2+(-1)^{b_{m-1}}\sqrt{2+\ldots+(-1)^{b_1}\sqrt{2+(-1)^{b_0}\sqrt{2}}}} =$$
$$\left(2+(-1)^{b_{m-1}}\left(2+\ldots+(-1)^{b_1}\left(2+(-1)^{b_0}(2)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\ldots\right)\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$\left(x^{\frac{1}{2}}, 2; b_{m-1}, \ldots, b_1, b_0\right) \tag{2.42}$$

kann als **Spezialfall der Kettenpotenz**

$$(x^n, 2;\ b_{m-1}, \dots, b_1, b_0) =$$

$$\underbrace{(2 + (-1)^{b_{m-1}}(2 + \dots + (-1)^{b_1}(2 + (-1)^{b_0}(2)^n)^n \dots)^n)^n}_{(m+1)-mal\ Operand\ 2,\ \ m-mal\ Basis-1} \tag{2.43}$$

$$m \in \mathbb{N}_0 \tag{2.44}$$

$$n \in \mathbb{R} \tag{2.45}$$

$$b = b_{m-1} \dots b_1 b_0 \in \{0,1\}^m \tag{2.46}$$

angesehen werden (vgl. [5,16,17]).

Weitere Spezialfälle:

- n = 1 – „Kettensumme“
- n = – 1 – Kettenbruch

$$\left(x^{-1}, 2; b_{m-1}, \dots, b_1, b_0\right) = \cfrac{1}{2 + \cfrac{(-1)^{b_{m-1}}}{2 + \ddots + \cfrac{(-1)^{b_1}}{2 + \cfrac{(-1)^{b_0}}{2}}}} \tag{2.47}$$

$$= \frac{1}{\left|2\right.} + \frac{(-1)^{b_{m-1}}}{\left|2\right.} + \dots + \frac{(-1)^{b_1}}{\left|2\right.} + \frac{(-1)^{b_0}}{\left|2\right.}$$

- n = – 2, – 3, ... – „ Potenzkettenbruch“

$$\left(x^{-k}, 2; b_{m-1}, \dots, b_1, b_0\right) = \cfrac{1}{\left(2 + \cfrac{(-1)^{b_{m-1}}}{\left(2 + \ddots + \cfrac{(-1)^{b_1}}{\left(2 + \cfrac{(-1)^{b_0}}{(2)^k}\right)^k}\right)^k}\right)^k}$$

$$= \frac{1}{\left|2\right.}^k + \frac{(-1)^{b_{m-1}}}{\left|2\right.}^k + \dots + \frac{(-1)^{b_1}}{\left|2\right.}^k + \frac{(-1)^{b_0}}{\left|2\right.}^k$$

$$k = 2, 3, \dots \tag{2.48}$$

- $n = \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ – kubische, ... Kettenwurzel

$$(x^{\frac{1}{k}}, 2;\ b_{m-1}, \ldots, b_1, b_0) = \sqrt[k]{2 + (-1)^{b_{m-1}} \sqrt[k]{2 + \cdots + (-1)^{b_1} \sqrt[k]{2 + (-1)^{b_0} \sqrt[k]{2}}}}$$

$k = 3, 4, \ldots$ (2.49)

Analog zu der in Abschnitt 2.3 betrachteten Kettenwurzelentwicklung einer reellen positiven Zahl $wert \in \mathbb{R}(0, 2)$ (Archimedes-Kode) ist damit auch eine Kettenpotenzentwicklung reeller positiver Zahl $wert \in \mathbb{R}(r_1, r_2)$ (Binärkodierung) impliziert ; dabei gilt die für die Gleichungen (2.33) – (2.35) gemachte Fallunterscheidung entsprechend:

Gegeben :

$wert \in \mathbb{R}(r_1, r_2)$ (2.50)

Gesucht :

$wort = b = b_{m-1} \ldots b_1 b_0 \in \{0,1\}^m$ (2.51)

mit

$wert = (x^n, 2; wort)$ (2.52)

Lösung :

Kodierungsalgorithmus $wert \longrightarrow wort$

Regel	Bedingung	Aktion	Verbundaktion
1		$x := wert\ ;\ y := \varepsilon$	
2		$x := \lvert x \rvert^{\frac{1}{n}} - 2$	
3	$x = 0$ oder $length(y) = l$	$wort := y$ $(:\approx)$	stop
4	$x > 0$	$y := y \circ 0$	goto r2
5		$y := y \circ 1$	goto r2

(A3)

Dekodierungsalgorithmus $wort \longrightarrow wert$

Regel	Bedingung	Aktion	Verbundaktion
1		$x := 2^n\ ;\ y := wort$	
2	$y = \varepsilon$	$wert := x$ $(:\approx)$	stop
3	$right(y, 1) = 0$	$x := (2 + x)^n; y := y \ominus 0$	goto r2
4	$right(y, 1) = 1$	$x := (2 - x)^n; y := y \ominus 1$	goto r2

(A4)

Aufgabe 14

Leiten Sie die Algorithmen (A3) und (A4) aus den Gleichungen (2.50) - (2.52) her. Formulieren Sie dabei die Bedingungen für die Kettenpotenzentwicklung für *wert*.

Von Besonderem Interesse ist dies auch als Teilgebiet der in Baustein 8 behandelten Kettenbruchtechnik - die Entwicklung einer positiven reellen Zahl $wert \in \mathbb{R}(r_1, r_2)$ in einem Kettenbruch Gleichung (2.47) mittels Algorithmus (A3), n = -1. Die nachstehende Tabelle zeigt hierfür einige Beispiele.

wert	ist Nullstelle des Polynoms	*wort*	Ulam Spirale für *wort*(*wert*)
1	$x^2 - 1$	$\overline{1}$	
$\sqrt{2} - 1$	$x^2 + 2x - 1$	$\overline{0}$	
$\tau = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$	$x^2 + x - 1$	$\overline{10}$	**Bild 5**
$\tau^2 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$	$x^2 - 3x + 1$	$\overline{01}$	
$\sqrt{3} - 1$	$x^2 + 2x - 2$	$\overline{1^2 0^2}$	**Bild 6**
$\frac{1}{3}(3 - \sqrt{3})$	$3x^3 - 6x + 2$	$\overline{0^2 1^2}$	
$\frac{1}{14}(\sqrt{485} - 11)$	$7x^2 + 11x - 13$	$\overline{1^3 0^3}$	**Bild 7**
$\frac{1}{46}(41 - \sqrt{485})$	$23x^2 - 41x + 13$	$\overline{0^3 1^3}$	
$\frac{1}{5}(\sqrt{66} - 4)$	$5x^2 + 8x - 10$	$\overline{1^4 0^4}$	
$\frac{1}{114}(\sqrt{34597} - 89)$	$57x^2 + 89x - 117$	$\overline{1^5 0^5}$	**Bild 8**
$e - 2 = 0,71828182\ldots$		$1^2 01^4 01^6 01^8 01^{10}\ldots$	**Bild 9**

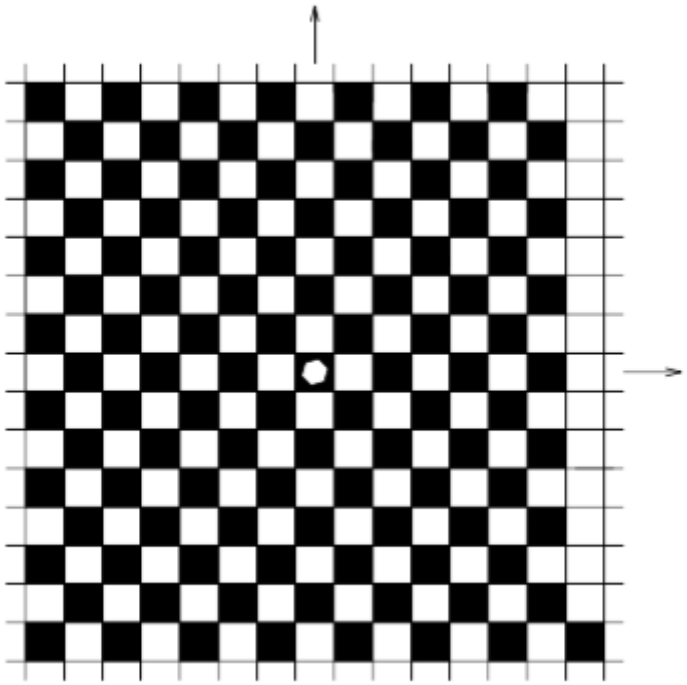


Bild 5: Ulam-Spirale für $wort\left(\tau = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)\right) = \overline{10}$, Algorithmus (A3) n = – 1

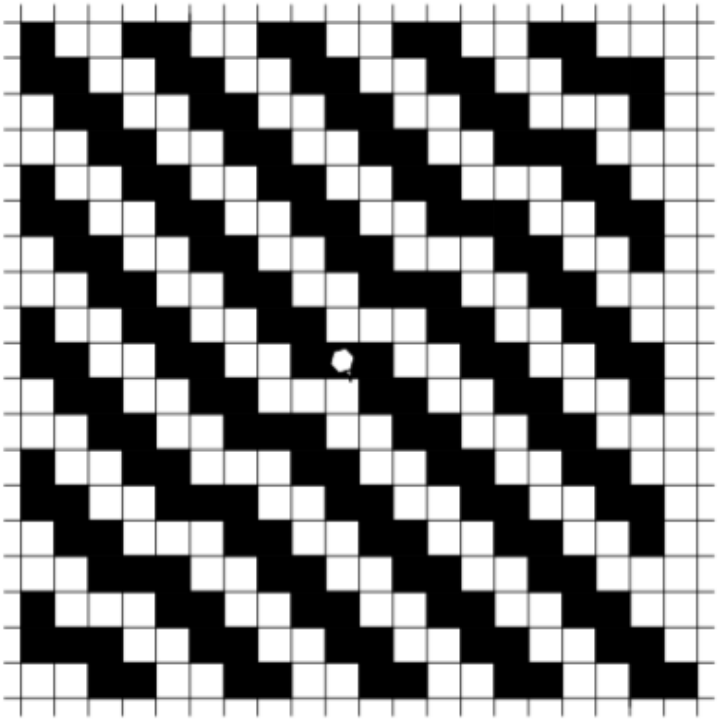


Bild 6: Ulam-Spirale für $wort\left(\left(\sqrt{3}-1\right)\right)=\overline{1^2 0^2}$, Algorithmus (A3) n = –1

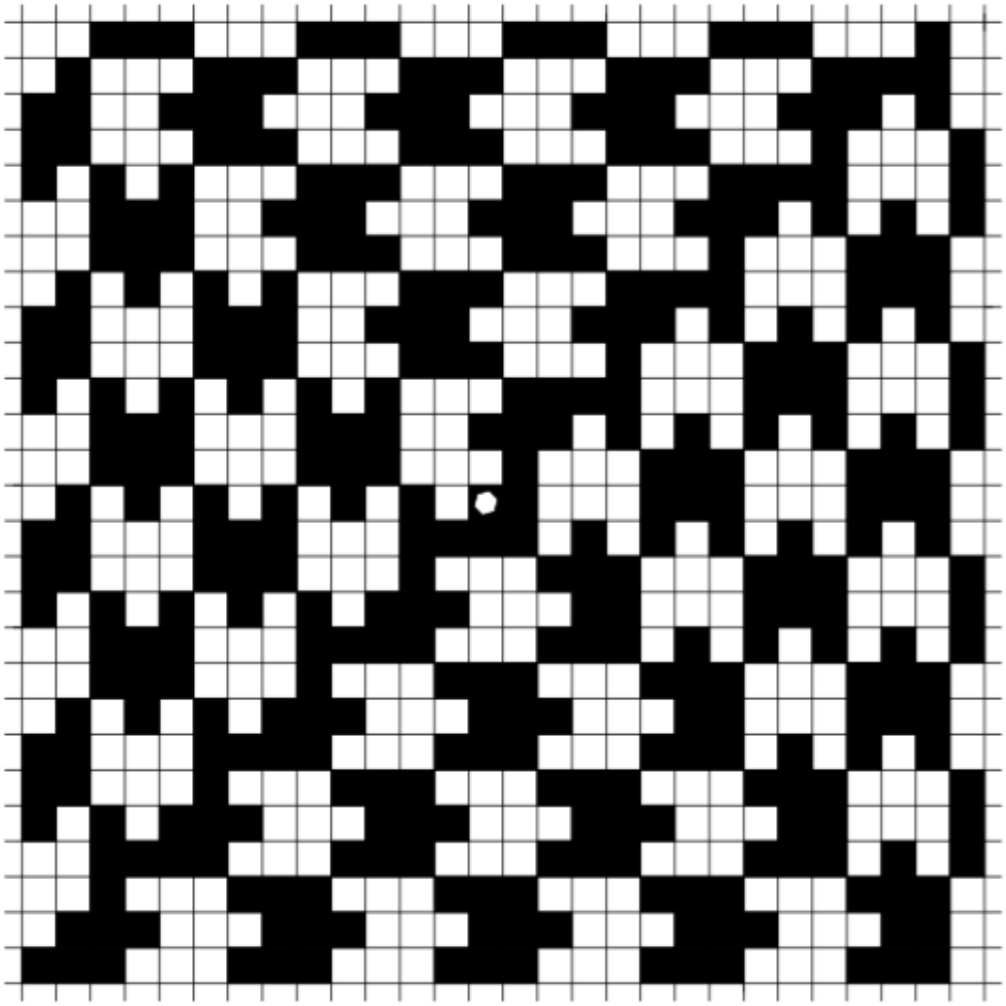


Bild 7: Ulam-Spirale für $wort\left(\frac{1}{14}\left(\sqrt{485}-11\right)\right)=\overline{1^3 0^3}$, Algorithmus (A3) n = -1

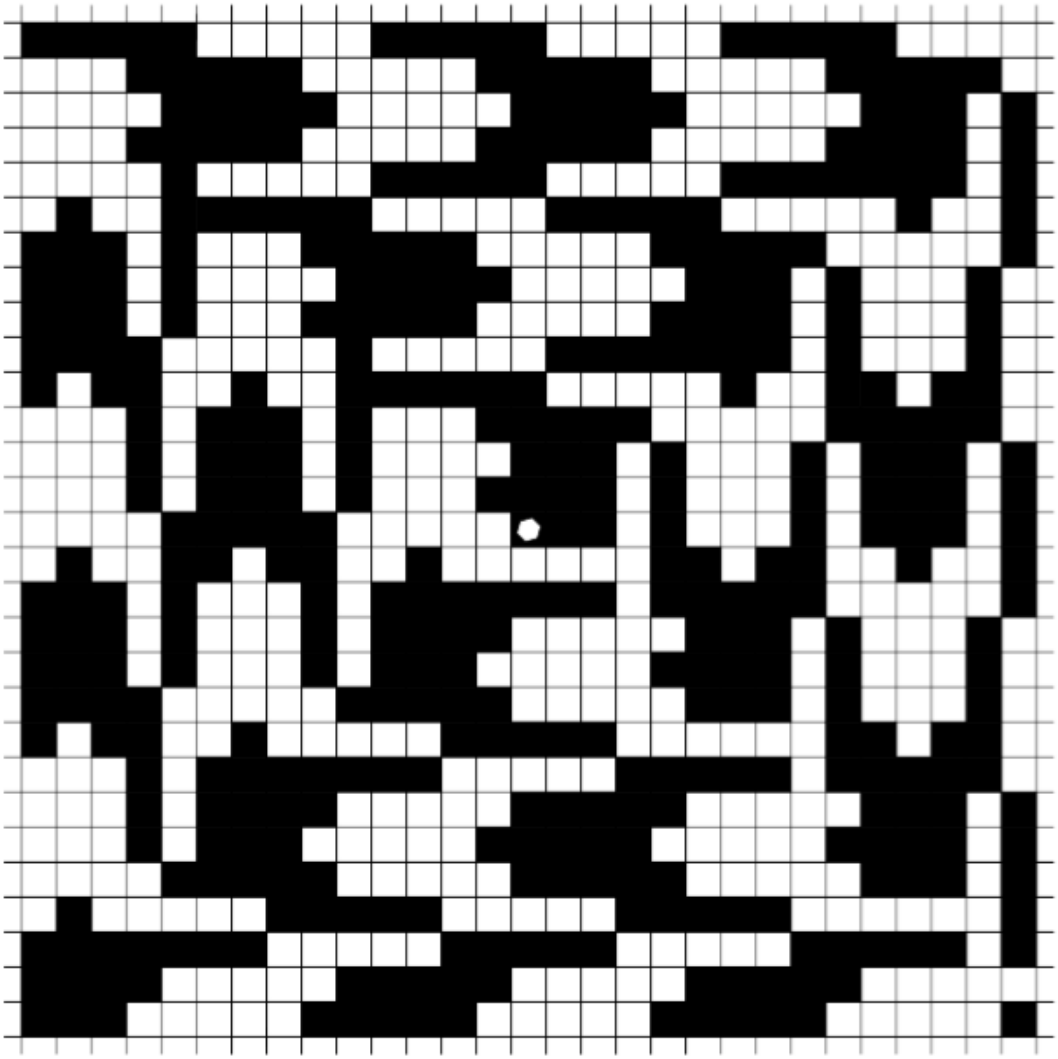


Bild 8: Ulam-Spirale für $wort\left(\frac{1}{114}\left(\sqrt{34597}-89\right)\right)=\overline{1^5 0^5}$, Algorithmus (A3) n = -1

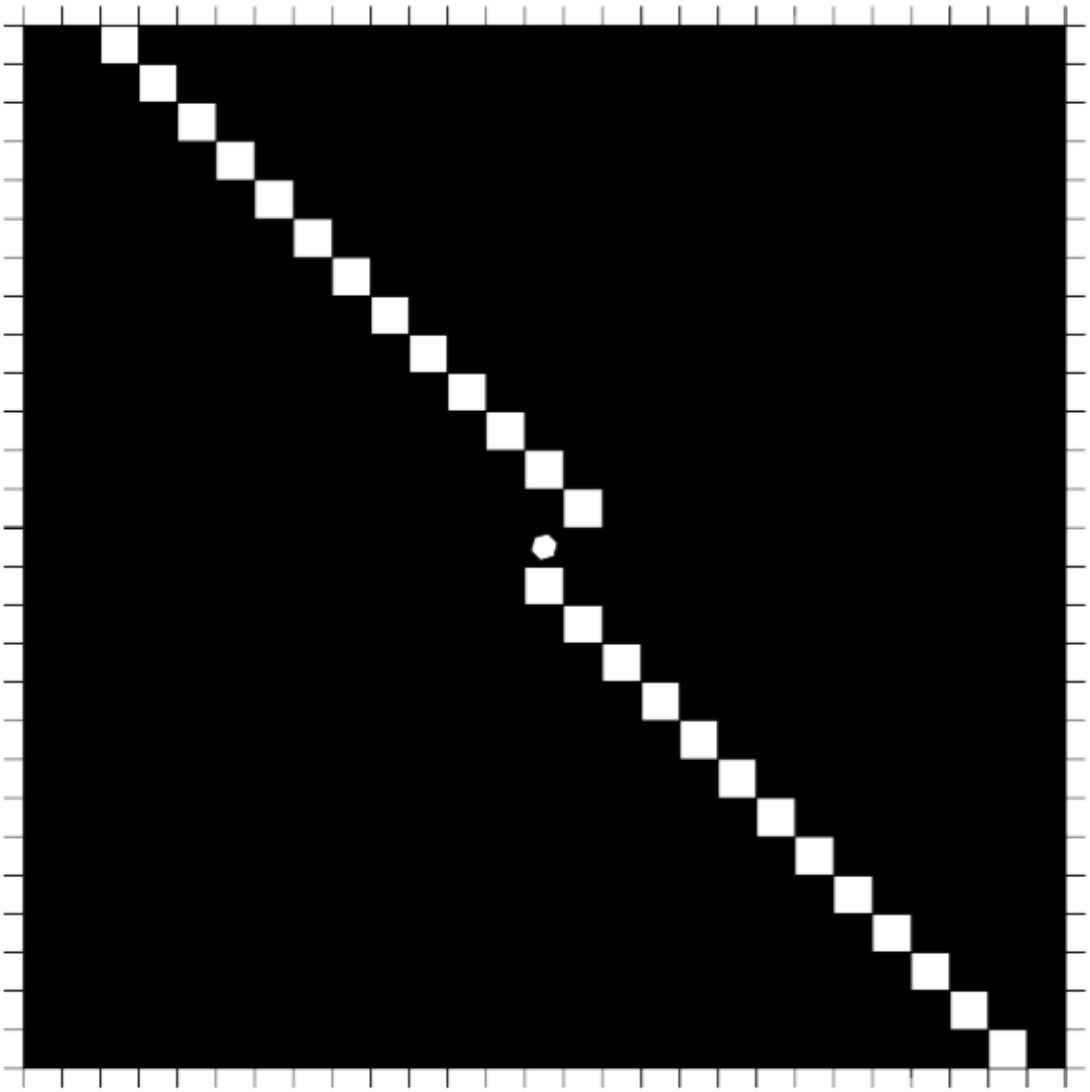


Bild 9: Ulam-Spirale für *wort*(e-2) = $1^{2}01^{4}01^{6}01^{8}01^{10}$ ... , Algorithmus (A3) n = -1

Aufgabe 15

Experimentieren Sie nun weiter mit den Kodierungs- und Dekodierungsalgorithmen (A3) und (A4) für verschiedene n, bearbeiten Sie z.B. Aufgabe 13 für Algorithmus (A4), n=1, .. .

Aufgabe 16

Neugier:

Welche Funktionen lassen sich als spezielle Kettenpotenzen (x^{n}, 2; b) darstellen?

n	$(x^n, 2; b) =$	
$\frac{1}{2}$	$2\cos\left(\frac{2a+1}{2^{m+2}}\pi\right)$; $a = g^{-1}(b)$	Kettenwurzeldarstellung der Cosinusfunktion, (Abschnitt 2.1 , Gleichungen (2.16) – (2.20))
1	$-2\left(2\left(\sum_{i=0}^{m-1} a_i\right) + 1 - (m+2)\right)$; $a_i = b_{m-1} \oplus b_{m-2} \oplus \ldots \oplus b_i$	Kettensummendarstellung der ?funktion
-1	?	Kettenbruchdarstellung der ?funktion
$\vdots$		

2.5 Schlußbetrachtung

Mit der in den Abschnitten 2.1 und 2.3 bzw. 2.4 skizzierten Kettenwurzeldarstellung haben Sie ein Untersuchungs- und Visualisierungsinstrument(tool!) kennengelernt, das Ihnen einen vergleichenden Blick in die "innere Struktur" von mathematischen Konstanten und von Funktionen gestattet.

Experimentieren Sie mit diesem Instrument im Sinne der einleitend genannten Zielstellung selbständig, loten Sie es produktiv aus (z.B. auch bzgl. der Möglichkeiten einer B-basierten (B ≠ 2) Kettenpotenzdarstellung), suchen Sie aber auch seine Grenzen und Nachteile festzustellen!

Algorithmen zur Berechnung

- der Zahlenwerte mathematischer Konstanten
- der Funktionswerte interessanter Funktionen

finden Sie z.B. in [18,19,20,21,22].

2.6 Literatur

[1] W. Gellert, H. Kästner, S. Neuber. *Lexikon der Mathematik.* Leipzig 1977, S. 272-273

[2] R.W. Hamming. *Information und Kodierung*. Weinheim, New York 1987

[3] M. Miller. *Gelöste und ungelöste mathematische Probleme.* Leipzig 1979

[4] K. Girstmair. *Periodische Dezimalbrüche - was nicht jeder darüber weiß.* Jahrbuch Überblicke Mathematik, Braunscheweig, Wiesbaden 1995, S. 163 179

[5] C.D. Olds. *Continued Fractions.* Washington 1963

[6] A.K. Dewdnez*. Computer - Kurzweil.* Spektrum der Wissenschaft 9(1988)9, S.8-11

[7] I. Peterson. *Mathematische Expeditionen*. Heidelberg 1992

[8] B. Ernst. *Der Zauberspiegel des M.C. Escher.* Köln 1992

[9] D. Schattschneider. *Eschers Metaphern.* Spektrum der Wissenschaft 16(1995)1, S. 78 84

[10] W.v.Wesin*. Das elementare Ornament und seine Gesetzlichkeit. Eine Morphologie des Ornamentes.* Ravensburg 1953

[11] C. Humbert. *Ornamente. 1000 ornamentale Motive.* München 1970

[12] C. Humbert. *Ornamente 2. Eintausendeins islamische Motive*. München 1980

[13] F.S. Mezer. *Handbuch der Ornamentik.* Leipzig 1983

[14] J. Flachsmeyer. *Mathematik und ornamentale Kunstformen.* Thun, Frankfurt/Main 1991

[15] J. Borwein, P. Borwein. *A Dictionary of Real Numbers.* Pacific Grove 1990

[16] D. Laugwitz. *Kettenwurzeln und Kettenoperationen.* Elemente der Mathematik 45(1990)4, S. 89-116

[17] W.S. Sizer*. Continued roots*. Mathematical Magazine 59(1986)1, p.23-27

[18] W. Kranzer*. So interessant ist Mathematik*. Berlin 1989

[19] R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik. *Concrete Mathematics. A Foundation for Computer Science. Reading, ..,* San Juan 1990

[20] C.A. Pickover*. Computers and the Imagination. Visual Advantures Beyond the Edge.* New York 1991

[21] H.-O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe. *Chaos and Fractals. New Frontiers of Science.* New York, .., Budapest 1991

[22] M. Schroeder. *Fraktale, Chaos und Selbstähnlichkeit. Notizen aus dem Paradies der Unendlichkeit.* Heidelberg, Berlin, Oxford 1994

[23] E.P. Stoschek. Abenteuer Algorithmus.
Abschn. 2, Baustein 1
Dresden University Press 1996
ISBN 3-931828-31-X